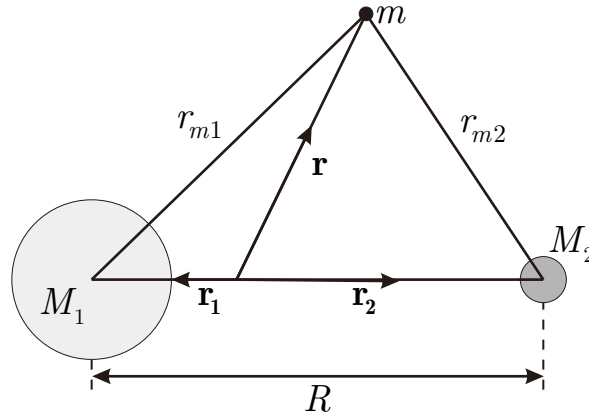


WoPhO – 10. feladat

Lagrange-pontok stabilitása

A Földdel együtt a Nap körül forgó vonatkoztatási rendszerben öt egyensúlyi helyzet létezik (ahol a testekre ható eredő erő zérus). Ezt az öt pontot Lagrange-pontnak nevezzük Joseph Lagrange után, aki először tanulmányozta a háromtest-probléma ezen esetét. A rendszer teljesen precíz elemzése rendkívül bonyolult és kaotikus. Ebben a feladatban a két test tömege (M_1 és M_2) sokkal nagyobb a harmadik testénél (m). Az M_1 és M_2 közti távolság legyen R .



1. A rendszer alapegyenletei

- (a) Írjuk fel az m -re ható eredő gravitációs erő \mathbf{F}_g vektorát.
- (b) Feltéve, hogy $M_1 > M_2 \gg m$, határozzuk meg az M_1 – M_2 rendszer Ω szögsebességét.
- (c) A rendszerrel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben m -re ható tehetetlenségi erők lépnek fel. Írjuk fel az m -re ható eredő erő \mathbf{F}_Ω vektorát ebben a vonatkoztatási rendszerben.
- (d) Tekintsünk egy olyan koordinátarendszert, amelyben a három test az xy -síkban van, az Ω szögsebesség pedig $+z$ irányú. Az origót helyezzük az x tengelyen elhelyezkedő M_1 – M_2 rendszer tömegközéppontjába. Írjuk m helyzetét $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ alakba. A forgó vonatkoztatási rendszerben írjuk fel az m -re ható eredő erőket, ha annak sebessége zérus. Használjuk az $\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$ és $\beta = \frac{M_1}{M_1 + M_2}$ paramétereket.

2. A Lagrange-pontok meghatározása

Öt olyan pont van a vonatkoztatási rendszerben, amelyekben az m -re ható eredő erő zérus. Ezek közül három (L_1 , L_2 , L_3) az M_1M_2 egyenesen (az x -tengelyen), míg kettő az xy -síkon szimmetrikus helyzetben van az x -tengely alatt és fölött, azaz $y_4 = -y_5$.

- (a) Először L_1 , L_2 és L_3 meghatározását végezzük el. Legyen $x = (\nu - \alpha)R$, ahol ν jelenti m és M_1 távolságát R egységben. Írjunk fel egy olyan egyenletet, amit ezeknek a pontoknak ki kell elégítenie. Az egyenletet ν -vel és α -val fejezzük ki.
- (b) Az egyenlet három esetre bomlik (ezek adják az egyes Lagrange-pontokat): $\nu < \alpha$, $\alpha < \nu < 1$, és $\nu > 1$. Határozzuk meg α és ν értékét.

A továbbiakban feltesszük, hogy α kicsi (a Nap-Föld rendszerben ez $3,0 \cdot 10^{-6}$). α -val csak a legkisebb nem-nulla rendben számolunk, a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk. A következő kérdések segítenek az x -tengelyen fekvő Lagrange-pontok meghatározásában.

- (c) Az első esetben ($\nu < a$) legyen $\nu = -1 + \delta_1$, ahol δ_1 egy α -tól függő kicsiny pozitív szám. ν ezen értéke az L_1 Lagrange-pont helyzetét $x = -R(1 + \zeta_1)$ alakban adja meg. Határozzuk meg ζ_1 -et α függvényében.
- (d) A második esetben ($a < \nu < b$) legyen $\nu = 1 - \delta_2$, ahol δ_2 egy α -tól függő kicsiny pozitív szám. ν ezen értéke az L_2 Lagrange-pont helyzetét $x = R(1 - \zeta_2)$ alakban adja meg. Határozzuk meg ζ_2 -t α függvényében.
- (e) A harmadik esetben ($b < \nu$) legyen $\nu = 1 + \delta_3$, ahol δ_3 egy α -tól függő kicsiny pozitív szám. ν ezen értéke az L_3 Lagrange-pont helyzetét $x = R(1 + \zeta_3)$ alakban adja meg. Határozzuk meg ζ_3 -at α függvényében.

A negyedik és ötödik Lagrange-pont helyzetének meghatározása összetettebb módszert igényel. Először bontsuk fel az m -re ható erőt az \mathbf{r} vektorral párhuzamos és merőleges komponensre.

- (f) Adjuk meg az \mathbf{r} vektorral párhuzamos $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$ és a rá merőleges $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ egységvektort az xy -síkban.
- (g) Határozzuk meg az m -re ható eredő erő \mathbf{r} -rel párhuzamos F_{Ω}^{\parallel} és a rá merőleges F_{ω}^{\perp} komponensét.
- (h) Adjuk meg az \mathbf{r} -re merőleges irányú egyensúly feltételét. Ennek felhasználásával adjuk meg az r_{m1} és r_{m2} közötti kapcsolatot.
- (i) Adjuk meg az \mathbf{r} -rel párhuzamos irányú egyensúly feltételét. Ennek felhasználásával adjuk meg az r_{m1} és R közötti kapcsolatot.
- (j) Határozzuk meg a negyedik és az ötödik Lagrange-pont helyzetét, rendre (x_4, y_4) -et és (x_5, y_5) -öt.

3. A Lagrange-pontok stabilitása

Az egyes Lagrange-pontok stabilitásának ellenőrzésére megzavarjuk m -et egyensúlyi helyzetében. Mivel ebben a rendszerben az erők m (x, y) helyétől és (v_x, v_y) sebességétől függnek, a stabilizáló erőket a helyzet és a sebesség különböző változásaira kell kiszámítani. Fejezzük ki az erőt az alábbi módon:

$$F_x(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, v_{x,0} + \delta v_x, v_{y,0} + \delta v_y) = \frac{\partial F_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_x}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial F_x}{\partial v_y} \delta v_y;$$

$$F_y(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, v_{x,0} + \delta v_x, v_{y,0} + \delta v_y) = \frac{\partial F_y}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_y}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_y}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial F_y}{\partial v_y} \delta v_y.$$

Ez az erő figyelembe veszi az m tömeg sebességének járulékát. Az összes parciális deriváltat az egyensúlyi helyzetben $(x_0, y_0, v_{x,0}, v_{y,0})$ számítjuk ki.

- (a) Adjuk meg $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial x}, \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial y}, \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial x}, \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial y}$ általános alakját. Mutassuk meg, hogy $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$.
- (b) Számítsuk ki $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial v_x}$ -et, $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial v_y}$ -t, $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial v_x}$ -et, és $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial v_y}$ -t.

A fenti nyolc együtthatónak a rugóállandó analógiájára a zavarokat csillapítania kell. Ezek után ellenőrizzük az öt Lagrange-pont stabilitását. α -val csak a legkisebb nem-nulla rendben számoljunk, hanyagoljuk el a magasabb rendű tagokat.

(c) Az első Lagrange-pont

- i. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial x} = c_1 \Omega^2$, és határozzuk meg c_1 -et.
- ii. Mutassuk meg, hogy $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$.
- iii. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial y} = c_2 \alpha \Omega^2$, és határozzuk meg c_2 -t.
- iv. $\delta x = Ae^{\lambda t}$ és $\delta y = Be^{\lambda t}$ ($A, B \neq 0$) helyettesítésével határozzuk meg λ -t, kizárólag α és Ω függvényében.
- v. λ -nak négy lehetséges értéke van. Adjuk meg azt a feltételt, amit ezeknek a megoldásoknak teljesíteniük kell, hogy L_1 stabil legyen, és döntsük el, hogy L_1 stabil-e.
- vi. A Nap-Föld rendszerre $\alpha = 3,0 \cdot 10^{-6}$, és $\Omega = 2\pi/\text{év}$. Ha ez a pont stabil, adjuk meg a körülötte végezhető rezgés periódusidejét (nap mértékegységben), ha nem stabil, akkor az $1/\lambda$ időállandót (szintén napokban).

(d) A második Lagrange-pont

- i. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial x} = c_3 \Omega^2$, és határozzuk meg c_3 -at.
- ii. Mutassuk meg, hogy $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$.
- iii. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial y} = c_4 \Omega^2$, és határozzuk meg c_4 -et.
- iv. $\delta x = Ae^{\lambda t}$ és $\delta y = Be^{\lambda t}$ ($A, B \neq 0$) helyettesítésével határozzuk meg λ -t, kizárólag α és Ω függvényében.
- v. λ -nak négy lehetséges értéke van. Adjuk meg azt a feltételt, amit ezeknek a megoldásoknak teljesíteniük kell, hogy L_2 stabil legyen, és döntsük el, hogy L_2 stabil-e.
- vi. Ha ez a pont a Nap-Föld rendszerben stabil, adjuk meg a körülötte végezhető rezgés periódusidejét (nap mértékegységben), ha nem stabil, akkor az $1/\lambda$ időállandót (szintén napokban).

A harmadik Lagrange-pont hasonló a másodikhoz, tehát nem kell külön foglalkoznunk vele.

(e) A negyedik Lagrange-pont

- i. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial x} = c_5 \Omega^2$, és határozzuk meg c_5 -öt.
- ii. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial x} = (c_6 + c_7 \alpha) \Omega^2$, és határozzuk meg c_6 -ot és c_7 -et.
- iii. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial y} = c_8 \Omega^2$, és határozzuk meg c_8 -at.
- iv. $\delta x = Ae^{\lambda t}$ és $\delta y = Be^{\lambda t}$ ($A, B \neq 0$) helyettesítésével határozzuk meg λ -t, kizárólag α és Ω függvényében.
- v. Legyen $\zeta = M_1/M_2$. Határozzuk meg ζ azon értéktartományát, amire a negyedik Lagrange-pont stabil.

Az ötödik Lagrange-pont azonosan viselkedik, mint a negyedik, így nem kell külön foglalkoznunk vele.