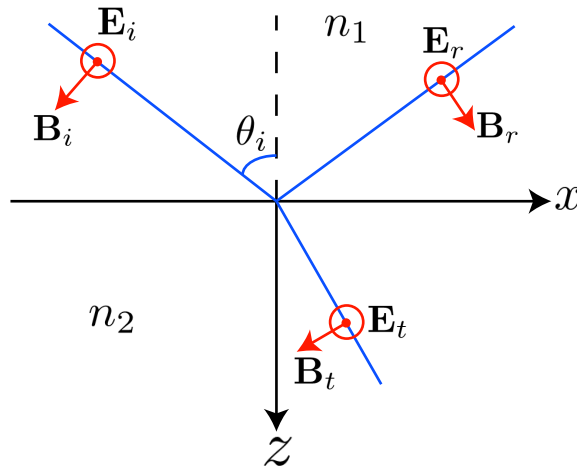


WoPhO – 3. feladat

Szigetelő hullámvezető lemez

1. Teljes visszaverődés

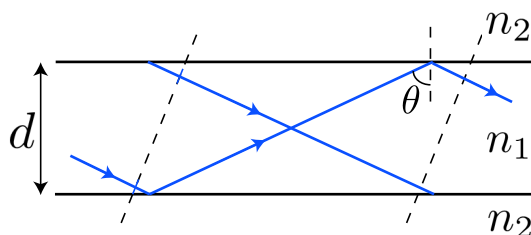
Egy polarizált monokromatikus elektromágneses síkhullám elektromos tere általánosan $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ alakban adható meg, ahol \mathbf{E} a hullám amplitúdója, \mathbf{k} a hullámszámvektor és ω a körfrekvencia. Tegyük fel, hogy egy n_1 törésmutatójú közegben ω körfrekvenciájú monokromatikus síkhullám terjed, ami elér egy n_2 törésmutatójú közeget. A bejövő hullám θ_i szöget zár be a határfelület beesési merőlegesével. A probléma során csak transzverzálisan polarizált hullámokkal foglalkozunk, azaz olyanokkal, amelyekben az elektromos mező merőleges a beesési síkra. Egyik közeg sem mágneses.



- Ha $n_1 > n_2$, létezik egy θ_c határszög, amelyre teljesül, hogy a $\theta_i > \theta_c$ szög alatt beérkező hullámok teljesen visszaverődnek (total internal reflection: TIR). A visszavert hullám fázisa δ -val késik a bejövőhöz képest. Vezessük le δ -t, és adjuk meg n_1 , n_2 , és θ_i függvényében.
- A szükséges határfeltételek felhasználásával adjuk meg a visszaverődés R mértékét $n_1 > n_2$ esetén. Mutassuk meg, hogy a hullám teljesen visszaverődik minden $\theta_i > \theta_c$ esetén.

2. Erősítő fáziscsatolás

A legegyszerűbb dielektromos hullámvezető egy d vastagságú, n_1 törésmutatójú síklemez, amit homogén, n_2 törésmutatójú közeg vesz körül ($n_1 > n_2$). TIR esetén a lemez felhasználható hullámok veszteség nélküli továbbítására, feltéve, hogy a hullámok interferenciája erősítő, azaz a hullámfrontok megmaradnak a hullámterjedése során a hullámvezetőben. A hullámszámok vákuumban, az n_1 és az n_2 törésmutatójú közegben rendre k_0 , k_1 , és k_2 .



1. Határozzuk meg az erősítő fáziscsatolás szükséges feltételét.
2. A hullámot csak θ bizonyos értékei esetén lehet veszteségmentesen továbbítani. Mutassuk meg, hogy θ -nak ki kell elégítenie a következő egyenletet:

$$k_1 d \cos \theta - \delta = m\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Igazoljuk, hogy a fenti egyenlet így is felírható:

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{k_0 d}{2} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (2)$$

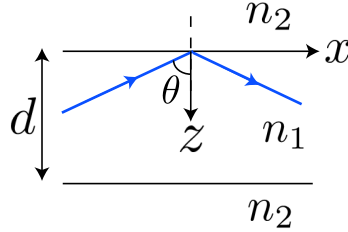
$$u \tan u = v \text{ vagy } u \cot u = v \quad (3)$$

$$\text{ha } u = \frac{k_1 d}{2} \cos \theta \text{ és } v = \frac{d}{2} \sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta - k_2^2}.$$

3. Maxwell-egyenletek

A Maxwell-féle hullámegyenlet egy ϵ relatív dielektromos állandójú közegben az elektromos térerősségre:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (4)$$



Az ábrán látható hullámvezető lemez esetén $\epsilon = n_1^2$, ha $0 < z < d$, különben pedig $\epsilon = n_2^2$. Olyan koordinátarendszerben, amelyben a hullám az xz -síkban terjed, az elektromos térerősség általánosan

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{E}(z) \exp(i(\beta x - \omega t)) \quad (5)$$

alakban adható meg, ahol β az effektív terjedési állandó a hullámvezetőben, figyelembe véve a rendszer eltolási szimmetriáját az x -tengely irányában. A transzverzálisan polarizált hullámok továbbítása esetén $\mathbf{E}(z)$ y -irányú, továbbá $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ -nek egyszerű harmonikus rezgésnek kell lennie a rétegen belül, azon kívül pedig exponenciálisan kell lecsengenie.

1. Mi a kapcsolat β , k_1 és θ között?
2. A $z = 0$ és $z = d$ értéknél felírható határfeltételek felhasználásával vezessük le a hullámvezetés 2. részben megkapott feltételét a Maxwell-egyenletekből.

4. Normál módusok

A normál módusok θ azon értékeihez kötődnek, amikor a lemezben hullámvezetés történik. Az $m = 0$ -hoz (lásd 2. rész) tartozó módus az alpmódus (legalacsonyabb módus, első módus), az $m = 1$ -hez tartozó módus a második módus, stb.

1. Vázoljunk fel az (u, v) koordinátarendszerben a (2) és a (3) egyenleteket leíró görbéket. Határozzuk meg annak szükséges feltételét, hogy csak egy normál módus létezzen.
2. Mutassuk meg, hogy a szigetelő lemez által támogatott módusok maximális száma

$$M = \left\lceil \frac{k_0 d}{\pi} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right\rceil, \quad (6)$$

ahol $\lceil x \rceil$ azt a legkisebb egész számot jelöli, amely legalább akkora, mint x .

3. Igazoljuk, hogy a körfrekvencia minden

$$\Delta\omega = \frac{\pi c}{d\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \quad (7)$$

emelkedése a módusok számát eggyel növeli.

4. Az (1) egyenlet alapján mutassuk meg, hogy a csoportsebesség $(\partial\omega/\partial\beta)$ minden támogatott normál módusra

$$v_g = \frac{d \tan \theta + \frac{\partial \delta}{\partial \beta}}{\frac{n_1 d}{c \cos \theta} - \frac{\partial \delta}{\partial \omega}}. \quad (8)$$

5. Mutassuk meg, hogy az L távolság befutásához szükséges idők közötti legnagyobb időkülönbség a különböző módusokban terjedő hullámok esetén

$$\tau = \frac{L}{c}(n_1 - n_2). \quad (9)$$

6. Legyen $n_1 = 1,7$; $n_2 = 1,5$; $\lambda = 800$ nm (vákuumban) és $d = 1\mu\text{m}$. Határozzuk meg az összes módust $\theta > \theta_c$ -re. Ábrázoljuk az $E(z)$ elektromos térerősséget ezekre a módusokra.