

WoPhO – 9. feladat

Két szilárd tárgy ütközési modellje

Két szilárd tárgy ütközésekor a mechanikai energiavesztés egyik módja a két test belsejében elinduló hanghullámok által felemésztett energia. Habár a valódi helyzet sokkal bonyolultabb, használjuk most a következő egyszerű modellt. Először helyettesítsük a szilárd rudakat egy-egy rugóval, melyek nyújtatlan hossza rendre L_l és L_r . A rugóállandó szorozva a rugóhosszal az egyes rugókra K_l és K_r ; az egységnyi rugóhosszra eső tömeg pedig rendre ρ_l és ρ_r . Az l és r indexek a bal és jobb (left, right) oldali rugókat jelölik.

A bal oldali rugó $+v_0/2$, a jobb oldali pedig az ellenkező irányba $-v_0/2$ sebességgel halad. A rugók kezdetben nyújtatlanok. $t = 0$ -kor a rugók az $x = 0$ helyen ütköznek. A rugók egyes pontjainak elmozdulását az $y(x, t)$ függvény írja le, tehát az ütközés után az eredetileg x koordinátájú pont a t időpontban az $x + y(x, t)$ koordinátájú pontba kerül.

1. Vezessük le a rugók hullámegyenletét és adjuk meg a rugókban a hullámsebességet.

A hullámegyenlet általános megoldása $y(x, t) = \psi(ct - x) + \phi(ct + x)$ alakú, ahol c a hullám terjedési sebessége. A ψ és ϕ függvények alakját a határfeltételekből kaphatjuk meg.

2. Írjuk fel a határfeltételeket az $x = 0$, $x = -L_l$, $x = L_r$ pontokban.
3. Írjuk fel az $y(x, t)$ függvényt az ütközés előtt ($t \leq 0$), azaz az $y_{0,l}(x, t)$ és $y_{0,r}(x, t)$ függvényeket.

$t = 0$ -kor akusztikus hullám indul el mindkét rugóban az $x = 0$ ütközési pontból. A rendszer dinamikáját az 1. ábrán látható hely-idő diagramon elemezzük. A vízszintes tengely az időt, a függőleges a rugó pontjainak helyzetét mutatja. A diagram minden vonala egy akusztikus hullámfrontot ábrázol, amelyek mindig akkor indulnak el, amikor egy hullám a határhoz érkezik.

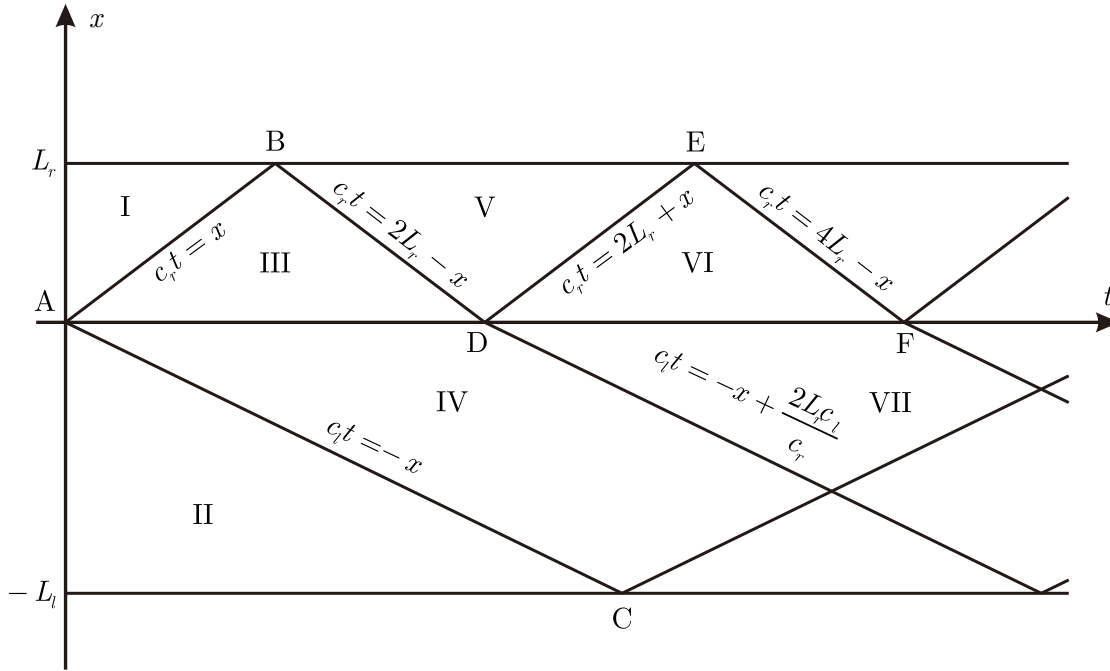
Például az AB vonal az ütközéskor az A pontból kiinduló hullámfront helyzetét ábrázolja az idő függvényében. Írják le az $f_l(c_l t + x)$ és $f_r(c_r t - x)$ függvények az ütközéskor rendre a bal, illetve a jobb oldali rugóban elinduló hullámokat, ahol c_l és c_r rendre a bal és a jobb oldali rugókban terjedő hullám sebessége. A hely-idő diagramról látható, hogy a feladatban $L_l/c_l > L_r/c_r$. Amikor az $f_r(c_r t - x)$ hullámfront eléri a B pontot, egy új $g_r(c_r t + x)$ visszavert hullám indul visszafelé. Hasonló játszódik le a bal oldali rugóban a C pontban.

Amikor a jobb oldali rugóban a $g_r(c_r t + x)$ hullámfront eléri a rugó végét (D pont az ábrán), egy új visszavert ($h_r(c_r t - x)$) és egy új átvitt ($h_l(c_l t + x)$) hullám indul el.

Ezek a jelenségek mindig bekövetkeznek, amikor egy hullámfront a két rugó valamelyik határára ér.

4. Írjuk fel az $y(x, t)$ hullámfüggvényt a diagram I, II, III, IV, V, VI és VII jelű tartományaiban y_0 , f_r , f_l , g_r , h_r és h_l segítségével.
5. A határfeltétel(ek) felhasználásával határozzuk meg az $f_l(c_l t + x)$ és $f_r(c_r t - x)$ függvényeket a rugók paramétereinek és kezdősebességének függvényében.
6. Határozzuk meg az érintkezési pont sebességét közvetlenül az első ütközés után.

7. A határfeltétel(ek) felhasználásával határozzuk meg a $g_r(c_r t + x)$ függvényt a rugók paramétereinek és kezdősebességének függvényében.



1. ábra. Hely-idő diagram

Tekintsük azt az esetet, amikor a két rugó a hosszuktól eltekintve egyforma, azaz legyen $\rho_l = \rho_r = \rho$ és $K_l = K_r = K$. Legyen $L_r < L_l$.

8. Határozzuk meg $y(x, t)$ -t a III és a IV tartományban. Ábrázoljuk $y(x)$ -et $t = 0,4L/c$ -nél. A grafikon rajzolásához legyen $L_r = 0,6L$, $L_l = L$ és $v_0 = 0,5c$.
9. Határozzuk meg $y(x, t)$ -t az V tartományban. Ábrázoljuk $y(x)$ -et $t = 0,8L/c$ -nél, L_r , L_l és v_0 az előző feladatban adott értékei mellett.
10. Mikor válik el egymástól a két rugó? Ábrázoljuk $y(x)$ -et, L_r , L_l és v_0 az előző feladatban adott értékei mellett.
11. Határozzuk meg a rugók ütközésére jellemző e ütközési számot.
12. Számítsuk ki a rugók ütközés utáni és előtti összes haladó mozgási energiájának hányadosát.