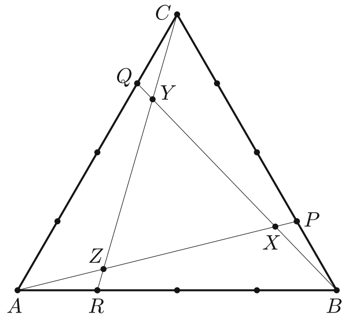
Bizonyítsunk sokféleképpen! – Egy érettségi feladat továbbgondolása

1. Előzmények

A 2020. októberi matematika érettségi emelt szintű írásbeli vizsga 9.*b*) feladata a következő volt[1]:

9.*b*) Jelölje a 4 egység oldalú ABC szabályos háromszög BC oldalának B-hez közelebbi negyedelőpontját P, a CA oldal C-hez közelebbi negyedelőpontját Q, az AB oldal A-hoz közelebbi negyedelőpontját pedig R. Jelölje továbbá AP és BQ szakaszok metszéspontját X, BQ és CR szakaszok metszéspontját Y, végül CR és AP szakaszok metszéspontját Z (*1. ábra*).

Határozza meg az XYZ háromszög területét!



1. ábra

A hivatalos javítási útmutatóban a feladatra négy megoldás található. Ebben a cikkben néhány észrevétel mellett további megoldási és általánosítási lehetőségeket sorolunk fel.

2. A hivatalos megoldások

Röviden áttekintjük a javítási útmutatóban szereplő megoldásokat.[2]

Előzetesen megállapíthatjuk, hogy a harmadrendű forgásszimmetria miatt:

– az ABP, BCQ, CAR háromszögek egybevágók;

– az ABX, BCY, CAZ háromszögek egybevágók;

– az ARZ, BPX és CQY háromszögek egybevágók;

– az XYZ háromszög szabályos.

I. megoldás. A ZX szakasz hosszát számítjuk ki, ebből az XYZ háromszög területe már számolható.

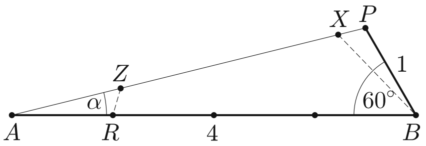
Az ABP háromszögben ismert három adat, így meghatározhatjuk pl. a koszinusztétellel az AP szakasz hosszát és a $BAP\sphericalangle = \alpha$ szöget. Ekkor az AZR háromszögben ismerünk három adatot ($ARZ\sphericalangle = APB\sphericalangle = 120° - \alpha$), így pl. a szinusz-

[1]`https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2020osz_emelt/e_mat_20okt_fl.pdf`

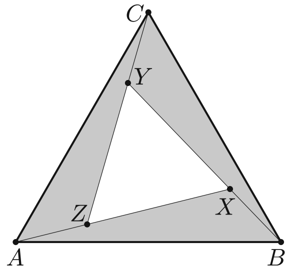
[2]`https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2020osz_emelt/e_mat_20okt_ut.pdf`

tétellel AZ és ZR kiszámolható. És mivel $XP=ZR$, így $ZX=AP-AZ-ZR$ (*2. ábra*).

Az XYZ szabályos háromszög területe pedig $t=\frac{\sqrt{3}}{4}ZX^2$. (A számadatokkal $t\approx 2{,}13$.)



2. ábra

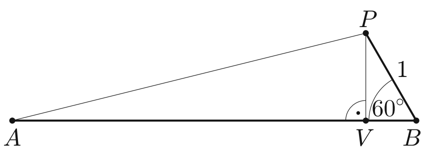


3. ábra

II. megoldás. Kiszámítjuk az ABX háromszög területét, majd az ABC háromszög területéből kivonjuk ennek a 3-szorosát.

Mint az I. megoldásban, kiszámítjuk AP-t és az α szöget. Ekkor az ABX háromszögben is három adat ismert ($ABX\sphericalangle=60^\circ-\alpha$), így meghatározható az AX oldal, és az ABX háromszög területét megkapjuk a trigonometrikus területképlet alkalmazásával (*3. ábra*).

III. megoldás. A ZX szakasz hosszát számítjuk ki, mint az I. megoldásban, de most trigonometria alkalmazása nélkül.



4. ábra

A P pont AB-re eső merőleges vetületét jelöljük V-vel (*4. ábra*). Rendre meghatározhatjuk PV és VB hosszát (a PVB „félszabályos” háromszög befogói), majd AV-t ($AV=AB-VB$), végül AP-t (az AVP derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével).

Az ABP és a BXP háromszögek hasonlók, mert két szögük egyenlő ($PBX\sphericalangle=$ $=PAB\sphericalangle=\alpha$, lásd a *2. ábrát*). A megfelelő oldalak arányából egyrészt $\frac{XP}{PB}=\frac{PB}{PA}$, innen XP számolható; másrészt $XB=4XP$ $(=AZ)$.

$ZX=AP-XB-XP$, vagyis megkaptuk a szabályos háromszög egy oldalát.

IV. megoldás. A ZX szakasz hosszát számítjuk ki, erősebb trigonometriai eszközök segítségével.

Az ABP háromszögben szinusztétellel $\frac{\sin\alpha}{\sin(120^\circ-\alpha)}=\frac{1}{4}$, innen az addíciós tételek segítségével kiszámítjuk α-t. Az ABX háromszögben ismert három adat, így az oldalakat meghatározhatjuk a szinusztétellel, például

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 120^\circ}=\frac{BX}{4}\quad\text{és}\quad\frac{\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin 120^\circ}=\frac{AX}{4}$$

alapján. Ezután az XYZ háromszög oldala már adódik:

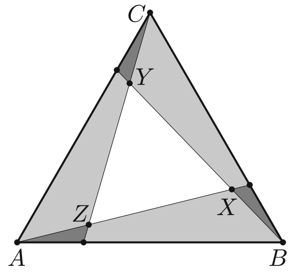
$$ZX = AX - AZ = AX - BX.$$

3. Egy további megoldás

Ez a megoldás a fejlesztés során sokáig szerepelt az útmutatóban, de végül nem került be.

V. megoldás. A III. megoldás módosításával a keresett területet „kiszitáljuk”.

Az XYZ háromszög területét megkaphatjuk úgy is, hogy az ABC háromszög területéből levonjuk az ABP háromszög területének 3-szorosát, majd hozzáadjuk az ARZ háromszög területének 3-szorosát (ugyanis az előző levonásnál az ARZ háromszög területét 6-szor vontuk le, holott csak 3-szor kellett volna, *5. ábra*).



5. ábra

A szokásos módon járunk el: az ABP háromszögben a területet kiszámíthatjuk a trigonometrikus területképlettel, majd meghatározhatjuk AP és α értékét. Az ARZ háromszögben pedig ismerjük a szögeket és az AR oldalt, így a területe már számolható.

4. Általánosítás

Az egyik általánosítási lehetőség, ha tetszőleges, $\frac{1}{2}$-nél kisebb $r = AR : AB$ aránnyal dolgozunk. (A kitűzött feladatban $r = \frac{1}{4}$ volt.)

Jelölje az ABC háromszög oldalainak hosszát a, ekkor tehát $AR = BP = CQ = ar$.

Az ABP háromszögben a koszinusztételből $AP = a\sqrt{1 - r + r^2}$.

Az ABP és a BXP háromszögek hasonlóságából (III. megoldás) $\frac{XP}{PB} = \frac{PB}{PA}$, innen

$$XP = \frac{a^2r^2}{a\sqrt{1-r+r^2}} = a \cdot \frac{r^2}{\sqrt{1-r+r^2}};$$

valamint

$$BX = AZ = \frac{XP}{r} = a \cdot \frac{r}{\sqrt{1-r+r^2}}.$$

$$ZX = AP - AZ - XP = a\sqrt{1-r+r^2} - \frac{ar}{\sqrt{1-r+r^2}} - \frac{ar^2}{\sqrt{1-r+r^2}},$$

átalakítások után $ZX = a \cdot \frac{1-2r}{\sqrt{1-r+r^2}}$ adódik.

Az XYZ háromszög területe:

$$T_{XYZ} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{(1-2r)^2}{1-r+r^2}.$$

Megjegyzések:

– Megkaptuk az egyes szakaszok hosszának arányát: $AZ:ZX:XP=r:(1-2r):r^2$;

– s megkaptuk az XYZ és ABC háromszögek területének arányát is:

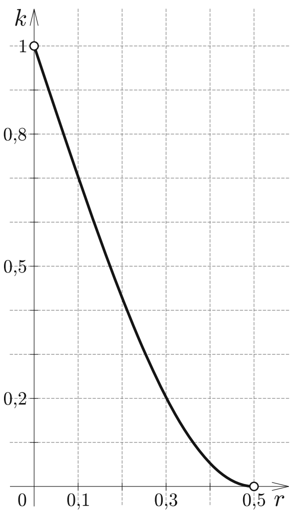
$$\frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}}=\frac{(1-2r)^2}{1-r+r^2}.$$

– Az $a=4$ és $r=\frac{1}{4}$ helyettesítésekkel megkapjuk a III. megoldásban szereplő pontos értékeket:

$$T_{XYZ}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2\cdot\frac{\left(1-2\cdot\frac{1}{4}\right)^2}{1-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{16\sqrt{3}}{13},$$

$$AZ:ZX:XP=\frac{1}{4}:\left(1-2\cdot\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}:\frac{1}{16}=4:8:1,$$

$$\frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}}=\frac{\left(1-2\cdot\frac{1}{4}\right)^2}{1-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{13}{16}}=\frac{4}{13}.$$



6. ábra

– Érdekességképpen ábrázolhatjuk a $k:\,]0;0{,}5[\,\to\mathbb{R}$; $k(r)=\frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}}=\frac{(1-2r)^2}{1-r+r^2}$ függvényt (*6. ábra*).

Néhány érdekes függvényérték:

$$k\left(\frac{1}{20}\right)=\frac{108}{127};\quad k\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{100}{133};$$

$$k\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{64}{91};\quad k\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{9}{21};\quad k\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{7};$$

$$k\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{19};\quad k\left(\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{37};\quad k\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{1}{61};$$

$$k\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{3n^2+3n+1}.$$

5. További megoldások területarányok segítségével

Ezekben a megoldásokban azt használjuk fel, hogy az azonos magasságú háromszögek területe arányos az alapjukkal.

VI. megoldás $\left(r=\frac{1}{4}\right)$. Mivel $\frac{BP}{PC}=\frac{AR}{RB}=\frac{1}{3}$, így

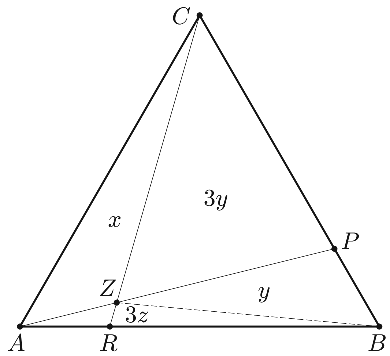
$$\frac{T_{BPZ}}{T_{CPZ}}=\frac{1}{3},\quad\text{illetve}\quad\frac{T_{ARC}}{T_{BRC}}=\frac{1}{3}\quad\text{és}\quad\frac{T_{ARZ}}{T_{BRZ}}=\frac{1}{3}.$$

Ez az arány a területek különbségére is megmarad, így

$$\frac{T_{ARC}-T_{ARZ}}{T_{BRC}-T_{BRZ}}=\frac{T_{AZC}}{T_{BZC}}=\frac{1}{3}$$

is teljesül.

Húzzuk be a BZ szakaszt, és jelölje a *7. ábra* szerinti részháromszögek területét x, y, z, az ABC háromszög területét T. Ekkor az ábrán szereplő másik két háromszög területe $3y$ és $3z$. A fenti összefüggések alapján felírható az alábbi egyenletrendszer:



7. ábra

(1) $$\frac{x}{4y}=\frac{1}{3},$$

(2) $$x+3y=\frac{3}{4}T.$$

(1)-ből $y=\frac{3x}{4}$, ezt (2)-be írva $x=\frac{3}{13}T$.

A forgásszimmetria miatt kapjuk (II. megoldás), hogy

$$T_{XYZ}=T-3x=\tfrac{4}{13}T.$$

Megjegyzések:

– Nem kellett kiszámolnunk z értékét, de $T_{ARC}=z+x=\frac{T}{4}$-ből $z=\frac{T}{52}=\frac{1}{12}x$.

– A kapott eredmény természetesen összhangban van az általánosítás

$$T_{XYZ}=\frac{(1-2r)^2}{1-r+r^2}T$$

formulájával, $r=\dfrac{1}{4}$ esetén.

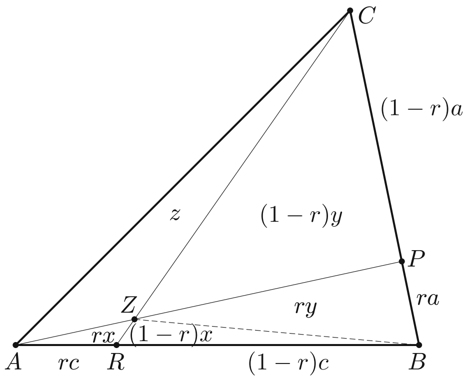
– Észrevehetjük, hogy nem használtuk fel, hogy az ABC háromszög oldalai egyenlők, vagyis eredményünk tetszőleges háromszögre igaz.

Második általánosítás. Ha tetszőleges T területű háromszögben behúzzuk az oldalakat megfelelő módon negyedelő szakaszokat (továbbiakban: osztószakaszok), akkor a keletkezett XYZ háromszög területére

$$T_{XYZ}=\frac{4}{13}T.$$

A további megoldások az általános ABC háromszögre vonatkoznak.

VII. megoldás (harmadik általánosítás). A hagyományos módon legyen az ABC háromszög oldalainak hossza rendre a, b, c, ekkor $AR=rc$ és $BP=ra$.



8. ábra

Húzzuk be a BZ szakaszt, és jelölje a *8. ábra* szerinti részháromszögek területeit rx, $(1-r)x$; ry, $(1-r)y$ és z, az ABC háromszög területét T. Ekkor felírhatók például az alábbi összefüggések:

$$\frac{T_{AZC}}{T_{BZC}}=\frac{z}{y}=\frac{r}{1-r},\tag{3}$$

$$\frac{T_{AZC}}{T_{AZB}}=\frac{z}{x}=\frac{1-r}{r},\tag{4}$$

$$rx+z=rT,\tag{5}$$

$$(1-r)y+z=(1-r)T.\tag{6}$$

(4)-ből $x=\frac{rz}{1-r}$, ezt (5)-be írva $\frac{r^2z}{1-r}+z=rT$, innen pedig $z=\frac{r(1-r)T}{r^2-r+1}$. Eszerint z nem függ a háromszög a, b, c oldalaitól (csak r-től), vagyis $z=T_{CAZ}=$ $=T_{ABX}=T_{BCY}$, így

$$T_{XYZ}=T-3z=\frac{r^2-r+1-3r(1-r)}{r^2-r+1}\cdot T=\frac{(1-2r)^2}{r^2-r+1}\cdot T$$

ebben az általános esetben is teljesül.

Megjegyzés. A (3)–(6) egyenletekből csak kettőt használtunk fel.

6. További megoldások hasonlóság alkalmazásával

Ezekben a megoldásokban párhuzamost húzunk valamelyik egyenessel, és egy kijelölt hasonlósági centrummal kapott hasonló háromszögek oldalainak arányára vonatkozó egyenlőségeket írunk fel. (A párhuzamos egyeneseken egyenlő váltószögek vagy egyállású szögek keletkeznek.) Többféle lehetőségünk is van: a párhuzamost húzhatjuk valamelyik csúcsból, osztószakasz talppontjából vagy az osztószakaszok metszéspontjából; és amivel párhuzamost húzunk, az lehet az ABC háromszög valamelyik oldala vagy osztószakasza. (És természetesen ezeket a módszereket vegyesen is alkalmazhatjuk.)

VIII. megoldás. Párhuzamost húzunk a B csúcson át az AC oldallal, ennek az AP és CR egyenesekkel való metszéspontját jelölje D és E (*9. ábra*). A könnyebb leírás kedvéért vezessük még be az $AZ=u$, $ZP=v$, $PD=w$ jelölést is.

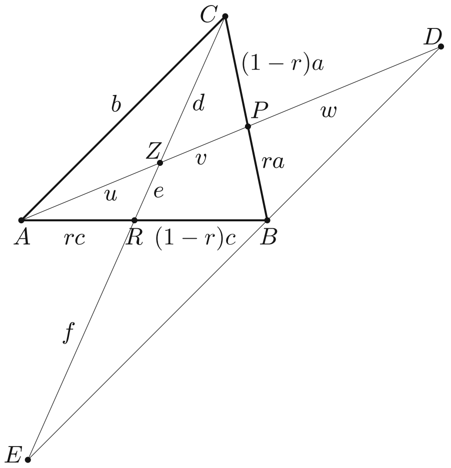
A DPB és APC háromszögek hasonlók, ezért $\frac{w}{u+v}=\frac{r}{1-r}$ és $DB=\frac{br}{1-r}$.

A BRE és ARC háromszögek hasonlók, ezért $BE=\frac{b(1-r)}{r}$.

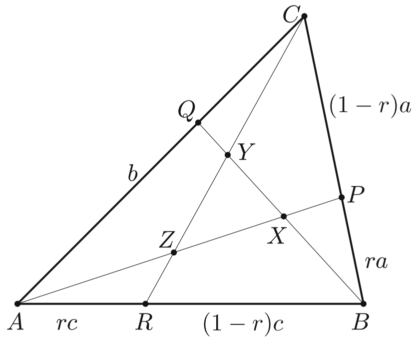
Végül aDZE és $AZC$is hasonló háromszögek, innen

$$\frac{v+w}{u}=\frac{DB+BE}{AC}=\frac{r}{1-r}+\frac{1-r}{r}.$$

Ha az u, v, w-re kapott két összefüggésből kiküszöböljük w-t, akkor megkapjuk az $\frac{u}{v}$ arányt. Az első egyenletből $w=\frac{r}{1-r}(u+v)$, a másodikból $w=u\frac{2r^2-2r+1}{r(1-r)}-v$, a jobb oldalak egyenlőségéből pedig, némi átalakítás után, $\frac{u}{v}=\frac{r}{(1-r)^2}$ adódik.



9. ábra



10. ábra

Ugyanígy meghatározhatjuk a $\frac{CZ}{ZR}$ osztásarányt is. Ha a CZ, ZR, RE szakaszokat rendre d, e, f jelöli, akkor a keletkezett hasonló háromszögekből

$$\frac{f}{e+d}=\frac{1-r}{r} \quad \text{és} \quad \frac{f+e}{d}=\frac{r}{1-r}+\frac{1-r}{r},$$

vagyis az előző megoldás $\frac{u}{v}$ arányához képest r és $(1-r)$ szerepet cserél. Az egyenletrendszerből kapjuk, hogy $\frac{d}{e}=\frac{1-r}{r^2}$.

Ha az AP és CR szakaszok osztásaránya már ismert, akkor a megoldás többféleképpen is befejezhető. Az osztószakaszok szimmetrikus szerepe miatt $\frac{AX}{XP}=\frac{CZ}{ZR}$, innen megkaphatjuk a korábbról ismert $AZ:ZX:XP=r:(1-2r):r^2$ arányokat (a levezetést az olvasóra bízzuk), és ez a másik két osztószakasz esetén is fennáll. Ekkor például rendre felírhatjuk a következő háromszögek területét (*10. ábra*):

$$T_{RCB}=\frac{RB}{AB}T_{ABC}=\frac{1-r}{1}T_{ABC};$$

$$T_{RBY}=\frac{RY}{RC}T_{RCB}=\frac{1-2r+r^2}{r^2-r+1}\cdot\frac{1-r}{1}T_{ABC};$$

$$T_{ZBY}=\frac{ZY}{RY}T_{RBY}=\frac{1-2r}{1-2r+r^2}\cdot\frac{1-2r+r^2}{r^2-r+1}\cdot\frac{1-r}{1}T_{ABC}; \quad \text{végül}$$

$$T_{ZXY}=\frac{XY}{BY}T_{ZBY}=\frac{1-2r}{1-r}\cdot\frac{1-2r}{1-2r+r^2}\cdot\frac{1-2r+r^2}{r^2-r+1}\cdot\frac{1-r}{1}T_{ABC}=$$

$$=\frac{(1-2r)^2}{r^2-r+1}T_{ABC}.$$

A további megoldásokat tehát visszavezethetjük két osztószakasz osztásarányának meghatározására.

IX. megoldás. Párhuzamost húzunk a P ponton át az AC oldallal, ennek az AB és CR egyenesekkel való metszéspontját jelölje D és E (*11. ábra*). A könnyebb leírás kedvéért vezessük még be az $AZ=u$, $ZP=v$, $CZ=d$, $ZR=e$, $RE=f$ jelöléseket.

A BDP és BAC háromszögek hasonlósága miatt $DP=rb$, $BD=rc$ és így $RD=(1-2r)c$.

Az ARC és DRE háromszögek hasonlósága miatt $DE=\frac{1-2r}{r}b$.

Végül az AZC és PZE háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{v}{u}=\frac{PD+DE}{b}=\frac{(1-r)^2}{r}$$

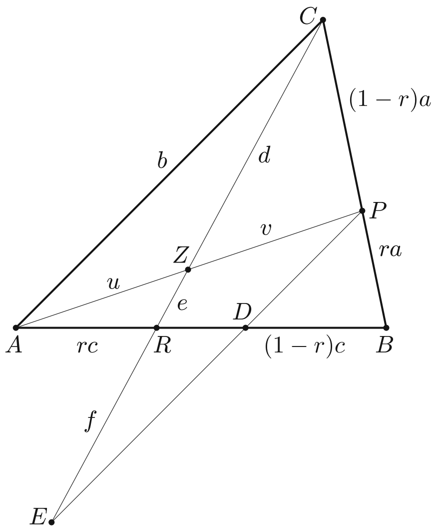
rögtön adódik.

A CR osztószakaszra felírható két összefüggés:

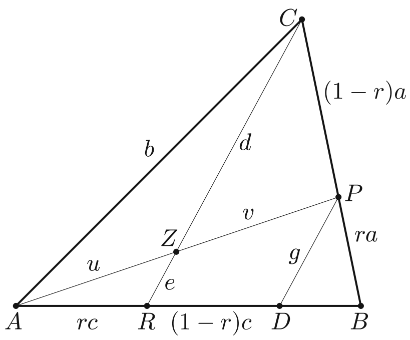
$$\frac{f}{e+d}=\frac{1-2r}{r}, \quad \text{illetve} \quad \frac{f+e}{d}=\frac{v}{u}=\frac{(1-r)^2}{r}.$$

A két egyenletből a szokásos módon $\frac{d}{e}=\frac{1-r}{r^2}$ adódik.

A megoldás innen már (a korábbiakhoz hasonló módon) befejezhető.



11. ábra



12. ábra

X. megoldás. Párhuzamost húzunk a P ponton át a CR szakasszal, ennek az AB egyenessel való metszéspontját jelölje D (*12. ábra*). A hagyományos jelölésekkel $AZ=u$, $ZP=v$, $CZ=d$, $ZR=e$, és legyen $PD=g$.

A BDP és BRC háromszögek hasonlósága miatt $g=r(e+d)$, $BD=r(1-r)c$ és így $RD=(1-r)^2c$.

Az ADP háromszögben $RZ||DP$ felhasználásával $\frac{u}{v}=\frac{r}{(1-r)^2}$ rögtön adódik (párhuzamos szelők tétele). Felírható továbbá, hogy $\frac{e}{rc}=\frac{g-e}{(1-r)^2c}$, innen g-t kifejezzük:

$$g=\frac{e(1-r)^2}{r}+e=\frac{e(r^2-r+1)}{r}.$$

Végül összevetjük a g-re kapott két egyenletet: $r(e+d)=\frac{e(r^2-r+1)}{r}$, ebből $\frac{e}{d}=\frac{r^2}{1-r}$, megkaptuk a már ismert képletet.

A megoldás innen már (a korábbiakhoz hasonló módon) befejezhető.

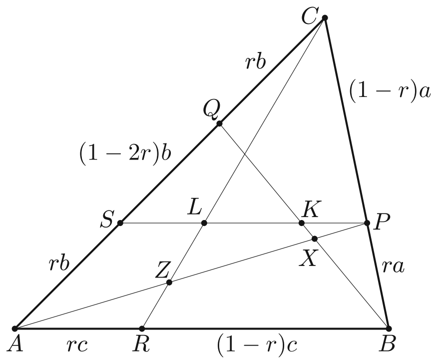
XI. megoldás. Alkalmazhatunk „vegyes” módszereket is.

Legyen S az AC oldal olyan pontja, amelyre $\frac{AS}{SC}=\frac{r}{1-r}$, így SP párhuzamos az AB oldallal, és $SQ=(1-2r)b$. Jelölje továbbá L és K az SP szakasz CR és BQ egyenesekkel való metszéspontjait (*13. ábra*).

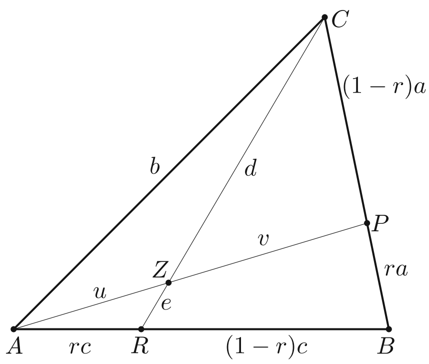
A párhuzamos szelők tétele miatt

$$\frac{PL}{LS}=\frac{BR}{RA}=\frac{1-r}{r} \quad \text{és} \quad \frac{CL}{LR}=\frac{CP}{PB}=\frac{1-r}{r}.$$

Ugyanígy $\frac{PS}{BA}=1-r$ és $\frac{PL}{BR}=1-r$, innen $PS=(1-r)c$ és $PL=(1-r)^2c$.



13. ábra



14. ábra

Az ARZ és PLZ háromszögek hasonlósága miatt $\frac{AZ}{ZP}=\frac{r}{(1-r)^2}$. A párhuzamos szelők tétele miatt $\frac{KS}{BA}=\frac{1-2r}{1-r}$, innen $KS=\frac{1-2r}{1-r}\cdot c$.

$$PK=PS-KS=\left(1-r-\frac{1-2r}{1-r}\right)\cdot c=\frac{r^2}{1-r}\cdot c.$$

Végül az ABX és PKX háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{AX}{XP}=\frac{AB}{KP}=\frac{1-r}{r^2}.$$

Ezt az $\frac{AZ}{ZP}$ aránnyal összevetve kapjuk, hogy $AZ : ZX : XP = r : (1-2r) : r^2$. A megoldás innen már (a korábbiakhoz hasonló módon) befejezhető.

7. További megoldások

Néhány olyan megoldási módszer következik, amiket a tanulók ritkábban alkalmaznak.

XII. megoldás (szabadvektorok). Dolgozhatunk szabadvektorokkal is. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{y}$, és u, v, d, e jelentése a szokásos (*14. ábra*). Kétféleképpen is felírhatjuk az $\overrightarrow{AZ}$ vektort.

Egyrészt $\overrightarrow{AP} = \mathbf{x} + r(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, így

$$\overrightarrow{AZ} = \frac{u}{u+v}\overrightarrow{AP} = \frac{u}{u+v}\big(\mathbf{x} + r(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) = \mathbf{x}\frac{u}{u+v}(1-r) + \mathbf{y}\frac{u}{u+v}r.$$

Másrészt $\overrightarrow{AR} = r\mathbf{x}$, $\overrightarrow{RC} = \mathbf{y} - r\mathbf{x}$, $\overrightarrow{RZ} = \frac{e}{e+d}(\mathbf{y} - r\mathbf{x})$, és így

$$\overrightarrow{AZ} = r\mathbf{x} + \frac{e}{e+d}(\mathbf{y} - r\mathbf{x}) = \mathbf{x}\frac{dr}{e+d} + \mathbf{y}\frac{e}{e+d}.$$

Az

$$\mathbf{x}\frac{u}{u+v}(1-r) + \mathbf{y}\frac{u}{u+v}r = \mathbf{x}\frac{dr}{e+d} + \mathbf{y}\frac{e}{e+d}$$

vektoregyenlet helyettesíthető két skalálegyenlettel:

$$\frac{u}{u+v}(1-r) = \frac{dr}{e+d} \quad \text{és} \quad \frac{u}{u+v}r = \frac{e}{e+d}.$$

A két egyenlet hányadosából $\frac{1-r}{r} = \frac{dr}{e}$, innen $\frac{d}{e} = \frac{1-r}{r^2}$, azaz megkaptuk az egyik jól ismert összefüggést.

Vegyük az első egyenlet reciprokát:

$$\left(1 + \frac{v}{u}\right)\frac{1}{1-r} = \frac{1}{r} + \frac{e}{dr},$$

az előbb kapott összefüggés miatt

$$\left(1 + \frac{v}{u}\right)\frac{1}{1-r} = \frac{1}{r} + \frac{r}{1-r}.$$

Innen pedig $\frac{v}{u} = \frac{(1-r)^2}{r}$, mint korábban már láttuk.

A megoldás innen már (a korábbiakhoz hasonló módon) befejezhető.

Megjegyzés. Kicsit elegánsabb (egyszerűbb) lett volna a $v = 1 - u$ és $e = 1 - d$ jelölések alkalmazása; ekkor u, v és d, e a megfelelő szakaszok hosszának arányát jelentik.

XIII. megoldás (helyvektorok). Hasonlóképpen dolgozhatunk helyvektorokkal is.

Mutasson például az A, B, C csúcsokba rendre az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ helyvektor (az origót úgy vegyük fel a síkon kívül, így a három helyvektor nem esik egy síkba, ezért egyikük sem fejezhető ki a másik kettővel, azaz „függetlenek”). Ekkor a P-be mutató helyvektor

$$\mathbf{p}=(1-r)\mathbf{b}+r\mathbf{c},$$

Z pedig az AP szakaszt osztja:

$$\mathbf{z}=\frac{v\mathbf{a}+u\mathbf{p}}{u+v}=\frac{v\mathbf{a}+u(1-r)\mathbf{b}+ur\mathbf{c}}{u+v}.$$

Másrészt az R-be mutató $\mathbf{x}$ helyvektor $\mathbf{x}=r\mathbf{b}+(1-r)\mathbf{a}$, és Z az RC szakaszt is osztja:

$$\mathbf{z}=\frac{e\mathbf{c}+d\mathbf{x}}{d+e}=\frac{e\mathbf{c}+dr\mathbf{b}+d(1-r)\mathbf{a}}{d+e}.$$

A

$$\frac{v\mathbf{a}+u(1-r)\mathbf{b}+ur\mathbf{c}}{u+v}=\frac{e\mathbf{c}+dr\mathbf{b}+d(1-r)\mathbf{a}}{d+e}$$

vektoregyenletben (az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ helyvektorok függetlensége miatt) a megfelelő együtthatók páronként egyenlők, az így kapott három összefüggés:

$$\frac{v}{u+v}=\frac{d(1-r)}{d+e},$$

$$\frac{u(1-r)}{u+v}=\frac{dr}{d+e},$$

$$\frac{ur}{u+v}=\frac{e}{d+e}.$$

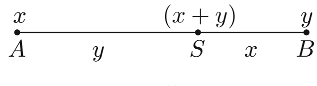
A második és harmadik egyenlet hányadosából $\frac{1-r}{r}=\frac{dr}{e}$, innen $\frac{d}{e}=\frac{1-r}{r^2}$. Az első és harmadik egyenlet hányadosából

$$\frac{v}{ur}=\frac{d(1-r)}{e},\quad \text{azaz}\quad \frac{v}{u}=\frac{dr(1-r)}{e},$$

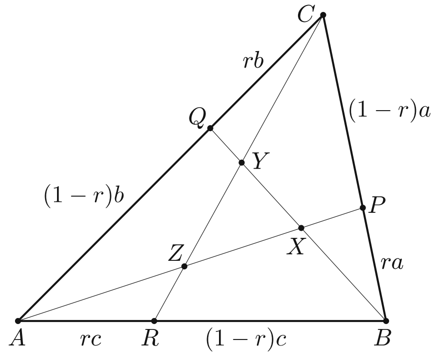
amiből az előbb kapott összefüggést felhasználva $\frac{v}{u}=\frac{(1-r)^2}{r}$ adódik.

A megoldás innen már (a korábbiakhoz hasonló módon) befejezhető.

XIV. megoldás (súlyozás). Ebben a megoldásban azt használjuk ki, hogy véges, súlyozott pontrendszer súlypontja egyértelmű, és a súlypontszerkesztési tétel segítségével, a súlyok számának redukálásával meghatározható (*15. ábra*).



15. ábra



16. ábra

A súlypontszerkesztési tétel kimondja, hogy ha egy A pontban x, egy B pontban pedig y nagyságú súly (tömeg) van, akkor a két súly helyettesíthető az AB szakasz S súlypontjába helyezett egyetlen $(x+y)$ súllyal. Az S súlypont helyzetére $\frac{AS}{SB}=\frac{y}{x}$ teljesül (*16. ábra*).

Az A, B, C csúcsokba úgy helyezünk súlyokat, hogy a rendszer súlypontja Z-ben legyen.

Ekkor A-ban és B-ben olyan $[A]$ és $[B]$ súlyoknak kell lenni, hogy a két súly eredője (összege) R-be kerüljön. Ekkor ugyanis a rendszer súlypontja rajta lesz az RC egyenesen. Ebből $[A]r=[B](1-r)$, vagyis $\frac{[A]}{[B]}=\frac{1-r}{r}$ következik.

Hasonlóan B-ben és C-ben olyan $[B]$ és $[C]$ súlyoknak kell lenni, hogy a két súly eredője (összege) P-be kerüljön, mert ekkor az $[A]$ és $[P]$ rendszer súlypontja az AP egyenesen lesz. Így tehát $\frac{[B]}{[C]}=\frac{1-r}{r}$.

Mindkét feltételnek megfelel például az $A\big[(1-r)^2\big]$, $B\big[r(1-r)\big]$ és $C[r^2]$ súlyok választása. Ezután kétféleképpen határozhatjuk meg a súlypontot. Ha $[B]$ és $[C]$ eredőjét P-be helyezzük, akkor

$$\frac{AZ}{ZP}=\frac{[B]+[C]}{[A]}=\frac{r(1-r)+r^2}{(1-r)^2}=\frac{r}{(1-r)^2},$$

ez tehát a keresett $\frac{AZ}{ZP}$ arány.

Ha pedig kezdetben $[A]$ és $[B]$ eredőjét R-be helyezzük, akkor

$$\frac{RZ}{ZC}=\frac{[C]}{[A]+[B]}=\frac{r^2}{(1-r)^2+r(1-r)}=\frac{r^2}{1-r},$$

ez pedig a keresett $\frac{RZ}{ZC}$ arány.

A megoldás innen már (a korábbiakhoz hasonló módon) befejezhető.

XV. megoldás. Menelaosz tételét alkalmazzuk: Tekintsünk egy ABC háromszöget, és egy egyenest, ami a háromszög BC, CA, illetve AB oldalegyenesét rendre az A_1, B_1, illetve C_1 pontban metszi. Ekkor az alábbi, előjeles szakaszok arányaira:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$$

Írjuk fel a tételt a BCR háromszögre és az AP egyenesre (*16. ábra*).

A tétel szerint ekkor (figyelmen kívül hagyva a szakaszok előjelét)

$$\frac{RA}{AB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CZ}{ZR}=r\cdot\frac{r}{1-r}\cdot\frac{CZ}{ZR}=1,\quad\text{azaz}\quad\frac{ZR}{ZC}=\frac{r^2}{1-r}.$$

Majd írjuk fel a tételt a CAR háromszögre és a BQ egyenesre. A tétel szerint ekkor

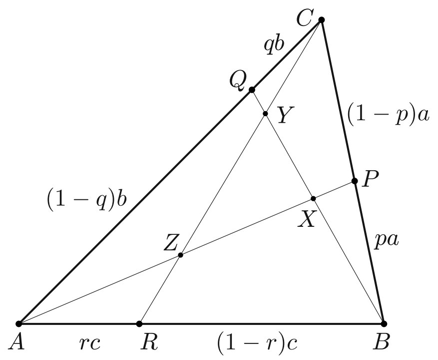
$$\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AB}{BR}\cdot\frac{RY}{YC}=\frac{r}{1-r}\cdot\frac{1}{1-r}\cdot\frac{RY}{YC}=1,\quad \text{azaz}\quad \frac{YC}{YR}=\frac{r}{(1-r)^2}.$$

Innen $CY:YZ:ZR=r:(1-2r):r^2$ könnyen adódik.

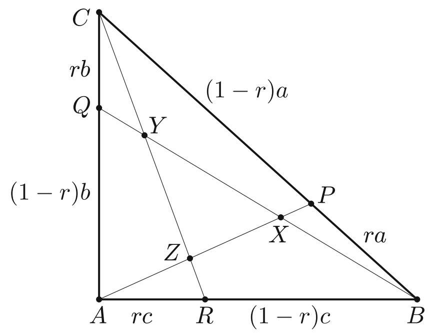
8. Észrevételek, általánosítás tetszőleges háromszögre és arányokra

XVI. (Általánosítás.) Korábban láttuk, hogy a $\frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}}$ arány kiszámításához elegendő az AP és CR szakaszok osztásarányát meghatározni. Észrevehetjük, hogy az $AR=rc$ és $BP=ra$ összefüggéseket felhasználó összes korábbi megoldásunk elvégezhető az $AR=rc$ és $BP=pa$ arányokkal is. Ebből pedig az következik, hogy tetszőleges $0<r,p,q<0{,}5$ választás esetén is meghatározhatjuk a $\frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}}$ arányt (*17. ábra*).

A feladat tehát tetszőleges háromszögre, (majdnem) tetszőleges r, p, q paraméterekkel is megoldható. (Ez az ún. Routh-tétel: `https://en.wikipedia.org/wiki/Routh%27s_theorem`.)



17. ábra



18. ábra

XVII. Az alapfeladatban (szabályos háromszög, adott r) ABC és XYZ szabályos háromszögek voltak, tehát hasonlók is. Felmerül a kérdés, hogy tetszőleges háromszögben, adott r esetén öröklődik-e a hasonlóság.

A válasz nemleges, az ABC és XYZ háromszögek általában nem hasonlók.

Az ABP háromszögben a koszinusztételből

$$AP^2=c^2+r^2a^2-2cra\cos\beta=c^2+r^2a^2-2cra\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=$$
$$=(1-r)c^2+(r^2-r)a^2+rb^2.$$

Mivel $ZX=\frac{1-2r}{r^2-r+1}AP$, így

$$ZX=\frac{1-2r}{r^2-r+1}\sqrt{(1-r)c^2+(r^2-r)a^2+rb^2}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$XY = \frac{1-2r}{r^2-r+1}\sqrt{(1-r)a^2+(r^2-r)b^2+rc^2} \quad \text{és}$$

$$YZ = \frac{1-2r}{r^2-r+1}\sqrt{(1-r)b^2+(r^2-r)c^2+ra^2}.$$

A két háromszög hasonlóságához két-két megfelelő oldal arányának meg kellene egyeznie, de ez most (általában) nem teljesül.

Egy egyszerű ellenpélda az egyenlő szárú derékszögű háromszög, ha $c=b=1$ (ekkor $a=\sqrt{2}$), és pl. $r=\frac{1}{3}$ (*18. ábra*).

A számadatokkal

$$ZX = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}} = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{7},$$

$$XY = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}} = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{7} \quad \text{és}$$

$$YZ = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{2}{3}-\frac{2}{9}+\frac{2}{3}} = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{7},$$

vagyis még az egyenlőszárú tulajdonság sem maradt meg.

9. Zárás

A feladatlapokat és a javítási-értékelési útmutatókat összeállító tételkészítő bizottságnak – több szempontot figyelembe véve – mérlegelnie kell, hogy egy-egy feladatnak hány különböző megoldása kerüljön be az útmutatóba. A javítási útmutatónak több célja is van, és ezek közül csak az egyik a dolgozatok minél egyszerűbb, pontosabb és egységesebb kijavításának elősegítése. Az adott vizsgaidőszakban vizsgázók is elsősorban az útmutatóból tájékozódnak a lehetséges helyes megoldásokról, de ezen túl az útmutatónak szolgálnia kell a későbbi évfolyamok eredményes felkészülését is.

E célokból következik, hogy mindenképpen szerepeljenek azok a megoldások, melyek várhatóan sok dolgozatban fognak megjelenni. Sokszor szerepelnek olyan megoldások is, melyek csak kevés dolgozatban fordulnak elő, de valamilyen szempontból figyelemre méltóak, például különösen egyszerűek vagy elegánsak, „szépek". Ugyanakkor nem szerencsés, ha az útmutató túl terjengős lesz a megoldások nagy száma miatt, el kell kerülni ezek öncélú szaporítását. A közölt megoldások ezért legyenek valóban lényegesen különbözőek. Az V. megoldás sokáig benne volt a tervezett útmutatóban, végül – tekintettel az utolsó említett szempontra – mégis kikerült belőle, hiszen alapelveit tekintve sokban hasonlít a III. megoldásra, így kevés újat mond, ötödikként talán túlzás lett volna szerepeltetni.

Végül még egy érdekesség: ez a feladat tulajdonképpen a 2017. májusi emelt szintű feladatsor 8/b. feladata[3] „ikerfeladatának" is tekinthető. Ott a szabályos há-

[3] `https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2017tavasz_emelt/e_mat_17maj_fl.pdf`

romszög szögeit, itt az oldalait osztottuk egyenlő részekre. Mindkét feladatra sok, változatos megoldás készíthető, melyek a geometria számos szépségét felvonultatják. A javítási útmutatóba ezek közül akkor is csak néhány kerülhetett bele, ezért aztán az a feladat is a KöMaL-ban élt tovább[4].

A matematika érettségi tételkészítő bizottság

[4] http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201959 (KöMaL, 2017. november)