

Erdős Pál (1913–1996), a világhírű magyar matematikus gyakran emlegette, hogy a Jóistennek (aki természetesen matematikus) van egy Könyve, amelyben a matematikai tételek tökéletes megoldását őrzi. A matematikusok, amikor rácsodálkoznak egy probléma nagyon egyszerű és emiatt különösen szép, frapáns megoldására, akkor azt mondják: *Ez a Könyvből való bizonyítás!* Erdős véleménye szerint egy matematikusnak nem kell hinnie Istenben, de hinnie kell a Könyvben<sup>1</sup>!

A fizikusok közül sokan úgy vélik, hogy a Könyv nem csupán matematikai tételek bizonyításával van tele, jut benne hely a fizika (és más tudományágak) problémáinak is. Ha ez így van, akkor az alábbi feladat és annak megoldása sem hiányozhat közülük!



**A probléma.** *Egy  $h$  magas toronyból adott  $v_0$  nagyságú kezdősebességgel különböző irányokba hajíthatunk el pontszerű testeket. Legfeljebb mekkora (vízszintesen mért) távolságra juthatnak el a testek, ha a légellenállás nem számottevő?*

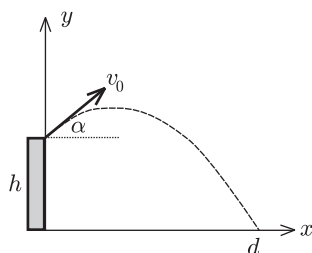
Ez a feladat (amely sokféleképpen, pl. egy  $h$  magas súlylökő leghatékonyabb dobóstratégiájának megkereséseként is megfogalmazható) többféle módon is megoldható. Az alábbiakban *négy* megoldást is bemutatunk, ezek közül az első bizonyára nem nyerné el a szépségdíjat. (Akik még nem „barátkoztak meg” a differenciálszámítással, nyugodtan átugorhatják a megoldás (5) egyenlet utáni részét, legfeljebb annak hosszára vessenek egy pillantást!) A másodikról a jelen sorok írója sokáig azt hitte, hogy a Könyvből való, mindaddig, amíg meg nem ismerkedett a harmadik megoldással. Ennek megértéséhez azonban egy olyan matematikai művelet ismerete szükséges, amellyel esetleg nem minden középiskolás találkozott, ezért megadunk egy negyedik, csak elemi geometriai és fizikai ismereteket igénylő megoldási módot is. A harmadik és a negyedik megoldás lényegében egyenértékű, csak megfogalmazásuk különböző. Olvasóink eldönthetik, hogy véleményük szerint vajon melyik kerülhet be a Könyvbe.

Mielőtt belekezdenénk a részletes megoldásba, bevezetünk egy hasznos jelet:  $v_0$ -t  $\sqrt{2gH}$  alakban írjuk fel, ahol  $H$  egy hosszúság dimenziójú állandó.  $H$  szemléletes jelentése: ilyen magasról leejtett test éppen a feladatban szereplő  $v_0$  sebességgel érne földet. A továbbiakban a hajítások kezdősebességét mindig átszámítjuk  $H$ -ra, és a maximális dobási távolságot is  $H$  egységekben fogjuk kifejezni.

**I. megoldás.** Írjuk le a test mozgását, vagyis a ferde hajítás folyamatát az *1. ábrán* látható derékszögű koordináta-rendszerben!

---

<sup>1</sup>Idén jelent meg a Typotex kiadó gondozásában M. Aigner–G. M. Ziegler: *Bizonyítások a Könyvből* című munkája, amely több mint száz matematikai probléma ilyen szellemű megoldását tartalmazza.



1. ábra

A vízszintes ( $x$  tengely irányú) mozgás egyenletes:

$$(1) \quad x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t,$$

ahol  $\alpha$  az elhajítás irányának a vízszintessel bezárt szöge.

A függőleges, egyenletesen gyorsuló mozgást leíró összefüggés:

$$(2) \quad y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + h.$$

Az (1) egyenletből kifejezhetjük az időt:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha},$$

majd ezt (2)-be helyettesítve megkapjuk a pályagörbe egyenletét:

$$(3) \quad y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha + h.$$

A hajítás vízszintes távolságát,  $d$ -t úgy kapjuk meg, hogy a fenti egyenletben  $y$  helyébe  $0$ -t írunk (hiszen a földet érésre ez jellemző), s a hozzá tartozó  $x$  éppen a szóban forgó  $d$  lesz. Tehát

$$(4) \quad 0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} d^2 + d \operatorname{tg} \alpha + h,$$

ami a korábban említett  $v_0 = \sqrt{2gH}$  jelöléssel

$$(5) \quad 0 = -\frac{d^2}{4H \cos^2 \alpha} + d \operatorname{tg} \alpha + h$$

alakra hozható. Ez  $d$ -re nézve egy másodfokú egyenlet, melynek számunkra érdekes ( $d > 0$ ) megoldása:

$$(6) \quad d(\alpha) = 2H \left[ \sin \alpha \cos \alpha + \sqrt{(\sin \alpha \cos \alpha)^2 + \frac{h}{H} \cos^2 \alpha} \right].$$

A szélsőértékszámítás szabályai szerint ennek a kifejezésnek  $d'(\alpha)$  deriváltja a maximális  $d$  értéknél nulla. Ez a feltétel megadja a kérdéses  $\alpha$  szöveget, ahonnan

(meglehetősen bonyolult számolás után)  $d_{\max}$  is meghatározható. Egyszerűbben célhoz érünk, ha képezzük az (5) egyenlet  $\alpha$  szerinti deriváltját, miközben kihasználjuk, hogy a keresett helyen  $d'(\alpha) = 0$ , vagyis  $d$  állandónak tekinthető:

$$(7) \quad \frac{d}{d\alpha} \left[ -\frac{d^2}{4H \cos^2 \alpha} + d \operatorname{tg} \alpha + h \right] = -\frac{d^2}{4H} \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{d}{\cos^2 \alpha} = 0,$$

azaz

$$d = \frac{2H}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Ezt (5)-be helyettesítve és a kapott egyenletet  $\operatorname{tg} \alpha$ -ra megoldva

$$(8) \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{H}{H+h}};$$

a legnagyobb hajítási távolságra pedig

$$(9) \quad d_{\max} = 2H \sqrt{\frac{H+h}{H}} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

adódik.

*Megjegyzés:* A talajszintről ( $h = 0$ ) történő hajításnál visszakapjuk a jól ismert  $\alpha = 45^\circ$  és  $d_{\max} = 2H = v_0^2/g$  összefüggéseket.

**II. megoldás.** A feladat elemi matematikával, differenciálszámítás alkalmazása nélkül is megoldható. Induljunk ki az (5) egyenletből, és használjuk ki az  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$  trigonometrikus azonosságot! Ekkor az  $u = \operatorname{tg} \alpha$  jelöléssel a következő egyenletet kapjuk:  $(1 + u^2)d^2 - 4u dH - 4hH = 0$ . Ez az egyenlet nemcsak  $d$ -re nézve másodfokú, hanem (adott  $d$  esetén) az  $u$  változóban is másodfokú egyenlet:

$$u^2 \cdot d^2 - u \cdot 4dH + (d^2 - 4hH) = 0.$$

Ennek akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nem negatív, azaz

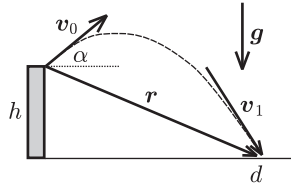
$$(2dH)^2 - d^2(d^2 - 4hH) \geq 0.$$

Innen

$$d^2 \leq 4H^2 + 4hH$$

adódik, és a határeset (az egyenlőség) nyilván a legnagyobb hajítási távolságnak felel meg; ez pedig éppen (9)-cel egyenértékű.

**III. megoldás.** Jelöljük a kezdősebesség vektorát  $\mathbf{v}_0$ -lal, a földet érés sebességét  $\mathbf{v}_1$ -gyel, a teljes mozgáshoz tartozó elmozdulásvektort  $\mathbf{r}$ -rel, a nehézségi gyorsulást (mint vektort) pedig  $\mathbf{g}$ -vel (2. ábra)!



2. ábra

Newton II. törvénye szerint

$$(10) \quad \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0}{t} = \mathbf{g},$$

ahol  $t$  a mozgás időtartama. (Kihasználtuk, hogy a gyorsulás időben állandó, ezért a pillanatnyi gyorsulás és az átlagos gyorsulás megegyezik.)

Másrészt igaz, hogy

$$(11) \quad \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0}{2} \cdot t = \mathbf{r},$$

itt azt használtuk ki, hogy a sebesség időben egyenletesen változik, tehát az átlagsebesség megegyezik a kezdeti- és végsebesség számtani közepével.

Szorozzuk össze a fenti két vektor-egyenletet skaláris szorzással:

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = gh,$$

azaz a földetérés sebességének nagysága

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Ez nem túl érdekes összefüggés, hiszen az energiamegmaradás törvényéből ezt már korábban is tudtuk. Meglepő eredményt kapunk azonban akkor, ha a (10) és (11) egyenleteket vektoriális szorzással szorozzuk össze. Felhasználva, hogy  $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_0$ , továbbá  $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_1 = 0$ , azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{g} \times \mathbf{r}.$$

Képezzük a fenti egyenlet mindkét oldalának abszolút értékét (és használjuk fel, hogy két vektor vektoriális szorzatának nagysága a tényezők abszolút értékeinek és a közbezárt szög szinuszának a szorzata):

$$(12) \quad |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_0| = |\mathbf{v}_0| |\mathbf{v}_1| \sin \gamma = v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh} \cdot \sin \gamma = |\mathbf{g} \times \mathbf{r}| = g \cdot d.$$

(Kihasználtuk, hogy  $\mathbf{g}$  és  $\mathbf{r}$  vektoriális szorzásánál  $\mathbf{r}$ -nek csak a vízszintes komponense számít, ennek hossza pedig éppen a keresett vízszintes elmozdulás.)

A (12) egyenletből leolvasható, hogy  $d$  akkor a legnagyobb, amikor a  $\mathbf{v}_0$  és a  $\mathbf{v}_1$  vektorok merőlegesek egymásra, és a legnagyobb hajítási távolság

$$d_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

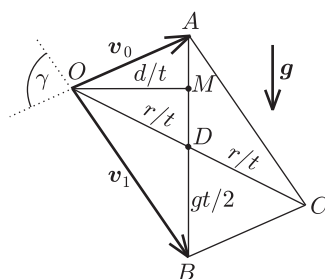
összhangban (9)-cel.

Ha a kezdősebesség vízszintessel bezárt szögét a korábbiaknak megfelelően  $\alpha$ -val jelöljük, akkor a sebesség vízszintes komponensének állandóságából, valamint a kezdő- és végsebesség merőlegességéből  $v_0 \cdot \cos \alpha = v_1 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = v_1 \cdot \sin \alpha$ , azaz

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

adódik, ami (8)-cal egyenértékű.

**IV. megoldás.** Kövessük a III. megoldás gondolatmenetének elejét, írjuk fel a (10) és (11) egyenleteket, majd tekintsük a kezdeti- és a végsebesség vektora által kifeszített  $OBCA$  paralelogrammát (3. ábra)!



3. ábra

Számítsuk ki a paralelogramma  $T$  területét kétféle módon. Egyrészt  $T = |\mathbf{v}_0| |\mathbf{v}_1| \sin \gamma$ , másrészt

$$T = AB \cdot OM = gt \cdot \frac{d}{t} = gd.$$

Kihasználtuk, hogy az  $AB$  szakasz függőleges és (10) szerint  $gt$  hosszúságú, valamint (11) alapján  $OD$  hossza  $r/t$ , tehát  $OD$  vízszintes ( $AB$ -re merőleges) vetülete  $OM = d/t$ . A kétféle számítás eredményét összehasonlítva kapjuk, hogy

$$d = \frac{1}{g} |\mathbf{v}_0| |\mathbf{v}_1| \sin \gamma \leq \frac{1}{g} v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh} = d_{\max}.$$

Látható az is, hogy az egyenlőség akkor teljesül, amikor a kezdeti- és a végsebesség merőleges egymásra, továbbá az elhajítás  $\alpha$  szögére ilyenkor (az  $OMA$  és  $BOA$  derékszögű háromszögek hasonlósága miatt) fennáll:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{AO}{OB} = \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

Valamennyi eredményünk érvényben marad akkor is, ha  $h < 0$  (de természetesen  $v_0^2 > 2g|h|$ ). Ilyenkor a feladat egyik lehetséges megfogalmazása így hangzik:

*Egy adott mélységű gödörből földet lapátolunk ki. Milyen irányban dobjuk el a kiásott földet, ha azt akarjuk elérni, hogy a lehető legmesszebb érje el a külső talajszintet, és mekkora ez a „legmesszebb”?*

Itt is és a súlylökő esetében is feltételezzük, hogy a föld eldobásának, illetve a súly ellökésének kezdősebessége független a dobás irányától. Ezen feltevések jogosságának igazolása vagy frappáns cáfolata azonban már a Könyv biofizika fejezetében keresendő!