Két párhuzamosan kapcsolt ideális tekercs eredő induktivitása

Szász Krisztián
PhD hallgató
MTA Szilárdestfizikai és Optikai Kutatóintézet

Ismeretes, hogy két párhuzamosan kapcsolt, L_1 illetve L_2 induktivitású tekercs eredő induktivitása

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

Ez az összefüggés azonban csak akkor érvényes, ha a tekercsek közötti kölcsönös indukció elhanyagolható. Vajon mekkora lesz az eredő induktivitás, ha a kölcsönös indukció is lényeges szerepet játszik? Ez a cikk erre keresi a választ. Először bevezetésként összefoglaljuk a kölcsönös indukcióra és az önindukcióra vonatkozó tudnivalókat.

A kölcsönös indukció és az önindukció

Tekintsünk két tekercset, amelyek közül az egyiket váltóáramú áramforásra kapcsoljuk, a másikat pedig egy voltmérőhöz kötjük. Az áramforrásra kapcsolt körben időben változik az áram erőssége, emiatt változik a tekercs Φ_1 fluxusa. Ezt a fluxusváltozást a másik tekercs „érzi", ezért ebben a tekercsben feszültség indukálódik a Faraday-féle indukciós törvénynek megfelelően. Ezt a jelenséget nevezzük *kölcsönös indukció*nak. Ha az első körben az áram változási üteme $\frac{\Delta i_1}{\Delta t}$, akkor a másik körben indukálódó feszültség

$$U_2 = -M_{21}\frac{\Delta i_1}{\Delta t}, \tag{1}$$

ahol M_{21} a második tekercsnek az elsőre vonatkoztatott *kölcsönös* indukciós együtthatója. Ez a mennyiség megmutatja, hogy az első körben történt $\Delta\Phi_1$ fluxusváltozás milyen erős hatást gyakorol a másik körben, azaz az első kör indukcióvonalai közül mennyi jut el a másik áramkörhöz.

A kölcsönös indukciós együttható konkrét alakját a legtöbb esetben nehéz meghatározni, de nekünk erre most nincs is szükségünk. Annyit érdemes tudni, hogy ez a mennyiség függ a tekercsek méreteitől (hossz, menetszám, keresztmetszet), a tekercsekben levő közeg anyagi minőségétől és a tekercsek egymástól való távolságától. Távolabb elhelyezkedő tekercsek esetén kevesebb számú indukcióvonal éri el a másik áramkört, kisebb lesz a benne indukált feszültség, kisebb lesz a kölcsönös indukciós együttható. Ekkor azt mondjuk, hogy a két tekercs közötti mágneses (induktív) csatolás *gyenge*. Ha nagyon közel vannak egymáshoz a tekercsek, viszonylag sok indukcióvonal megy át a másik tekercs keresztmetszetén, ilyenkor a csatolás *erős*, M_{21} értéke nagy.

Ha ezek után fordított szereposztást adunk, azaz a két áramkörben felcseréljük az áramforrást és a voltmérőt, akkor az első körben mért indukált feszültség az előzőek alapján

$$U_1 = -M_{12}\frac{\Delta i_2}{\Delta t} \tag{2}$$

lesz. Ebben a kifejezésben $\frac{\Delta i_2}{\Delta t}$ a második áramkör áramának változási üteme, M_{12} pedig az első tekercs másodikra vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója. Mi a kapcsolat a két együttható között? Itt nem részletezett energetikai megfontolással megmutatható (lásd [1] vagy [2]), hogy a két együttható megegyezik:

$$M_{12} = M_{21} = M. \tag{3}$$

Ha csak egy tekercset vizsgálunk, a saját körében is feszültség indukálódik a fluxusváltozás miatt. Ezt nevezzük *önindukció*nak. Az indukált feszültség így számítható:

$$U = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}, \tag{4}$$

ahol L a tekercs önindukciós együtthatója (más néven induktivitása).

Az (1), (3), (4) összefüggésekben szereplő negatív előjel a Lenz-törvényre utal, azaz az indukált áram (feszültség) iránya olyan, hogy mágneses hatásával akadályozza az őt létrehozó változást (a fluxusváltozást).

Ha mindkét áramkört áramforrásra kapcsoljuk, a rendszerben egyidejűleg fellép az önindukció és a kölcsönös indukció. Belátható, hogy ha az 1-es tekercsben I_1, a 2-es tekercsben pedig I_2 áram folyik, akkor az egész rendszer mágneses energiája:

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2. \tag{5}$$

Megjegyzés. Gondoljuk el, hogy az 1-es tekercs áramát valamekkora i_1 értékről egy kicsiny Δt idő alatt $i_1+\Delta i_1$-re, a 2-es tekercsét i_2-ről $i_2+\Delta i_2$-re változtatjuk. Eközben a tekercsekben feszültség indukálódik (ennek nagysága ideális, ohmos ellenállás nélküli esetben a tekercsekre kapcsolt pillanatnyi feszültséggel egyezik meg), tehát a $P = Ui$ összefüggésnek megfelelően $\Delta W = \sum P\Delta t$ nagyságú munkát kell végeznünk. Ez a munka, ami az egész rendszer mágneses energiáját növeli, az önindukciós és kölcsönös indukciós együtthatók segítségével így számítható:

$$\Delta W = i_1\left(L_1\frac{\Delta i_1}{\Delta t} + M\frac{\Delta i_2}{\Delta t}\right)\Delta t + i_2\left(L_2\frac{\Delta i_2}{\Delta t} + M\frac{\Delta i_1}{\Delta t}\right)\Delta t =$$

$$= L_1\cdot i_1\Delta i_1 + L_2\cdot i_2\Delta i_2 + M\cdot(i_1\Delta i_2 + i_2\Delta i_1) = \Delta\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right).$$

A kicsiny munkavégzéseket összeadvan – mikozben az áramok 0-ról I_1-re, illetve I_2-re nőnek – megkapjuk az áramjárta tekercsek teljes mágneses energiájának (5) képletét.

A mágneses energia nyilván pozitív mennyiség, hiszen (a Lenz-törvény értelmében) $W > 0$ munka szükséges a létrehozásához. Innen az $I_2 = 0$ speciális esetet választva $L_1 > 0$, a fordított szereposztású esetből pedig $L_2 > 0$ következik. Csatolásmentes esetben (tehát amikor a tekercsek egymástól messze vannak, és emiatt $M = 0$) a két tekercs energiája $\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2$.

A csatolásmentes áramkör energiájához képest a csatolással rendelkező kör energiája lehet nagyobb vagy kisebb. A csatolást leíró MI_1I_2 tag ugyanis lehet pozitív, ha a két áramkör mágneses mezői erősítik egymást (ellentétes irányú az egymás melletti tekercsek tekercselés), de lehet negatív is, ha a két kör mágneses mezői gyengítik egymást (egyirányú tekercselés). Ezek szerint M lehet pozitív és negatív is attól függően, hogy milyen irányban vannak csévélve a tekercsek. A továbbiakban különválasztjuk a két esetet; M-et mindig pozitívnak fogjuk tekinteni, és a tekercselés irányát megfelelő előjelek kiírásával vesszük figyelembe.

Az áramkör teljes energiáját kis átalakítással így is felírhatjuk:

$$W = \frac{1}{2}L_1\left(I_1 + \frac{M}{L_1}I_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)I_2^2 \geq 0.$$

Ennek a kifejezésnek pozitívnak kell lennie akkor is, ha

$$I_1 + \frac{M}{L_1}I_2 = 0.$$

Ekkor a második tagnak pozitívnak kell lenni, azaz fenn kell állnia az

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

egyenlőtlenségnek. Eszerint a két tekercs közötti kölcsönös indukciós együttható nem lehet akármekkora, csak a $0 \leq M \leq \sqrt{L_1L_2}$ határok közé eshet. Emiatt szokás ezt az együtthatót az $M = k\sqrt{L_1L_2}$ alakban felírni; így a csatolás erősségét egy dimenziótlan $0 \leq k \leq 1$ számmal adhatjuk meg.

A párhuzamos kapcsolás

Térjünk most rá arra a kérdésre, hogy mekkora eredő induktivitást kaphatunk, ha párhuzamosan kapcsolunk két olyan tekercset, amelyek kölcsönös indukciója is számottevő. Tekintsünk egy konkrét példát:

1. feladat. Egy $L_1 = 45\,\mathrm{mH}$ és egy $L_2 = 90\,\mathrm{mH}$ induktivitású tekercset párhuzamosan kapcsolunk. Lehet-e az eredő induktivitás

a) $10\,\mathrm{mH}$;

b) $30\,\mathrm{mH}$;

c) $50\,\mathrm{mH}$?

Megoldás. Csatolásmentes ($k = 0$) esetben az eredő $30\,\mathrm{mH}$, a *b*) válasz tehát lehetséges. Vajon a többi eset is megvalósulhat?

Legyen a tekercsek kölcsönös induktivitása M! Az önindukcióból származó indukált feszültségek, ha az egyes ágakban i_1 és i_2 pillanatnyi erősségű áramok folynak:

$$U_1^{\text{önind.}} = -L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t},$$
$$U_2^{\text{önind.}} = -L_1 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}.$$

Ha a tekercsek csévélése egymáshoz képest egyező, akkor a fenti indukált feszültségeket a kölcsönös indukció csökkenti (+), ha pedig ellentétes, akkor növeli (−). A tekercsekben indukált *teljes* feszültség – a párhuzamos kapcsolás miatt – ugyanakkora kell legyen:

$$U = -L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} \pm M \frac{\Delta i_2}{\Delta t}, \tag{6}$$
$$U = -L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} \pm M \frac{\Delta i_1}{\Delta t}. \tag{7}$$

Az indukált feszültséget az L eredő induktivitással felírva kapjuk, hogy

$$U = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -L \frac{\Delta (i_1 + i_2)}{\Delta t} = -L \left(\frac{\Delta i_1}{\Delta t} + \frac{\Delta i_2}{\Delta t} \right). \tag{8}$$

A (6) és (7) egyenletek felhasználásával kifejezhetjük a változási sebességeket, amelyeket (8)-ba behelyettesítve adódik az eredő induktivitás:

$$L_{\uparrow\uparrow,\uparrow\downarrow} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M}. \tag{9}$$

A $\uparrow\uparrow$ szimbólum az egyirányú tekercselést jelöli, ekkor a kifejezésben a pozitív (+), a $\uparrow\downarrow$ pedig az ellentétes irányú tekercselést jelenti, és ekkor a negatív (−) előjel írandó. Tudjuk, hogy M értéke két határ között változhat:

$$0 \le M \le \sqrt{4050}\,\mathrm{mH} \approx 64\,\mathrm{mH}. \tag{10}$$

Ábrázoljuk a (9) függvényeket, azaz az eredő L-et az M függvényében!

Látható, hogy egyirányú tekercselésnél a kölcsönös indukció hatására a csatolásmentes esethez képest kisebb induktivitást kapunk. Ha a csatolás maximális ($k = 1$), akkor az eredő induktivitás eltűnik. Tehát ebben az esetben az eredő induktivitás 0 és $30\,\mathrm{mH}$ között változhat, és az *a*) válasznak megfelelő $10\,\mathrm{mH}$-s értéket is felveheti.

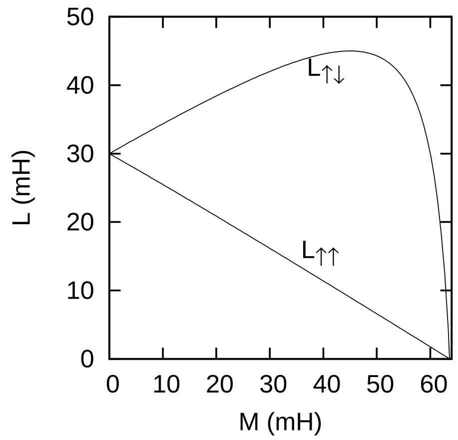
Ellentétes irányú tekercselés esetén megmutatható, hogy az elérhető legnagyobb eredő induktivitás $45\,\mathrm{mH}$. Vagyis ekkor az induktivitás 0 és $45\,\mathrm{mH}$ közötti érték lehet. Ezek szerint a *c*) válasz *nem* lehetséges.

Megjegyzés: A (9) összefüggés algebrai átalakításával beláthatjuk, hogy $L_{\uparrow\downarrow}$ egyik tekercs önindukciós együtthatójánál sem lehet nagyobb

$$L_{\uparrow\downarrow} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = L_1 - \frac{(M - L_1)^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

A kölcsönös indukcióra vonatkozó egyenlőtlenség és a számtani- és mértani közepek egyenlőtlensége miatt a fenti képlet utolsó tagjának nevezője nemnegatív, vagyis $L_{\uparrow\downarrow} \le L_1$. Hasonlóan, a tekercsek felcserélésével kapjuk, hogy $L_{\uparrow\downarrow} \le L_2$.

Észrevehetjük, hogy az ellentétes irányú csévélésnél van olyan eredő L, amelyhez két M tartozik. Vegyük pl. a $40\,\mathrm{mH}$ értéket. (9)-ből könnyen kiszámolhatjuk, hogy a két megoldás M-re $24\,\mathrm{mH}$ és $54\,\mathrm{mH}$. A nagyobb induktivitást akkor kapjuk, ha a tekercseket közel helyezzük egymáshoz (erős a csatolás). Ha eltávolítjuk őket, akkor csökken M értéke, de a (9) összefüggés szerint újra ugyanakkora lehet az eredő



1. ábra. Két párhuzamosan kapcsolt tekercs eredő induktivitása a kölcsönös indukció mértékétől függően. ↑↑ az egyirányú, ↑↓ az ellentétes irányú tekercselést jelenti.

induktivitás.

Megjegyzés: A (9) kifejezés nevezője eltűnik az ellentétes irányú tekercselés esetében, ha $M_0 = \frac{L_1+L_2}{2}$. Mivel $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ és $\sqrt{L_1 L_2} \leq \frac{L_1+L_2}{2}$, azért $M \leq M_0$. Az $L_1 = L_2 = L$ eseten kívül M sohasem éri el M_0 értékét. Abban a határesetben, amikor $M = \sqrt{L_1 L_2}$ és $L_1 = L_2 = L$, akkor az eredő induktivitás L lesz, mert

$$\lim_{M \to L} \frac{L^2 - M^2}{2(L-M)} = \lim_{M \to L} \frac{(L-M)(L+M)}{2(L-M)} = \lim_{M \to L} \frac{L+M}{2} = L.$$

A fentiek ismeretében arra biztatjuk Olvasóinkat, hogy oldják meg a következő feladatot:

2. feladat. Egy $L_1 = 45\,\mathrm{mH}$ és egy $L_2 = 90\,\mathrm{mH}$ induktivitású tekercset sorosan kapcsolunk. Milyen határok közé eshet az eredő induktivitásuk, ha a kölcsönös indukció is számottevő?

Hivatkozások

[1] Litz J.: Elektromosságtan és mágnességtan, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1998)

[2] Gnädig P.: A kölcsönös indukció, KöMaL 2001/2, 110-116