A Fermat-elv egy alkalmazása

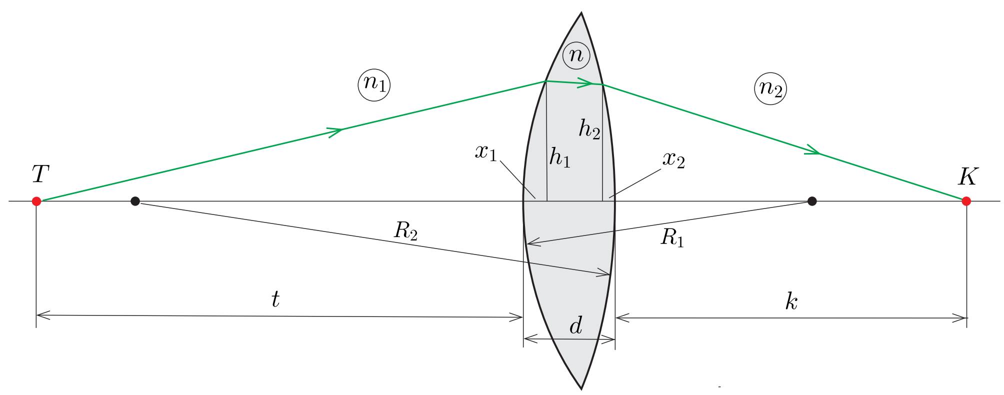
A vékony lencsék általánosított leképezési törvénye

A geometriai optikát a fény hullám természetével lényegében a Fermat-elv köti össze. Ez a legegyszerűbb (de pontatlan) megfogalmazásban azt mondja ki, hogy a „fénysugár” két pont között azon az úton halad, amely megtételéhez a legrövidebb idő szükséges. Ha egy út befutáshoz szükséges időnek a közeli pályák idejéhez képest lokális szélsőértéke (minimuma vagy maximuma) van, a pálya kis megváltoztatása lényegében (a módosítás mértékében első rendben) nem változtatja meg a szükséges időt. Az ilyen pályákat stacionáriusnak mondjuk, de a stacionaritás nem csak lokális szélsőérték esetében áll fenn, hanem másképp is megvalósulhat. A Fermat-elv pontosan megfogalmazva azt állítja, hogy egy fényút akkor lehetséges, ha stacionárius.

A Huygens-Fresnel-elv szerint minden olyan pont, ahová a hullám elért, elemi hullámok kiindulópontjának tekinthető, tehát azt gondolhatjuk, hogy a fény egy pontból egy másikba minden lehetséges úton eljut, de a stacionárius pályát kitünteti, hogy rajta és a hozzá közeli utakon érkező hullámok pozitívan interferálnak (hisz a közel azonos idő miatt közel azonos fázisban érkeznek), míg a más utakat befutók kioltják egymást. (Erről bővebben olvashatunk lapunk 2018/9 számában: *Solt György, Variációs elvek a klasszikus és kvantumfizikában.*)

A Fermat-elvből a geometriai optika minden törvénye (visszaverődés, törés) levezethető, de számos feladat esetében közvetlenül is alkalmazható ez az érdekes megfogalmazású elv. Erre láthattunk példát a **P. 4646.** és a **P. 4733.** feladatokban, de ilyen a lencsék képalkotása is.

A **P. 5478**. feladathoz kapcsolódóan tekintsünk egy R_1 és R_2 sugarú gömbsüvegekkel határolt, n törésmutatójú, d vastagságú vékony gyűjtőlencsét, amelynek a két oldalán $n_1 < n$ ill. $n_2 < n$ törésmutatójú közeg van, és nézzük meg, milyen feltétellel keletkezhet kép a tengelyen lévő T pontról a K pontban.



Az *ábrán* berajzoltunk egy lehetséges sugármenetet. Ennek a megtételéhez (a fény sebességét c-vel jelölve)

$$\tau = \frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{(t+x_1)^2+h_1^2} + n\sqrt{(d-(x_1+x_2))^2+(h_1-h_2)^2} + n_2\sqrt{(k+x_1)^2+h_2^2}\right)$$

idő kell. Ideális képalkotáskor a tárgypontból egy véges térszögben induló összes sugár újra egyesül. Mivel ezek a sugarak folytonosan egymásba deformálhatók, csak úgy lehet mindegyik stacionárius, ha mindegyikhez ugyanakkora idő tartozik. Az optikai tengely mentén (ez szimmetria okokból biztos stacionárius fényút)

$$\tau_0 = \frac{1}{c}\left(n_1 t + nd + n_2 k\right),$$

tehát

$$\tau - \tau_0 = n_1\left(\sqrt{(t+x_1)^2+h_1^2} - t\right) + n\left(\sqrt{(d-(x_1+x_2))^2+(h_1-h_2)^2} - d\right) + n_2\left(\sqrt{(k+x_1)^2+h_2^2} - k\right) = 0.$$

Fontos, hogy az *elképzelhető* fényutakkal szemben a *megvalósuló* sugarak stacionáriusok. Esetünkben ez azt is jelenti, hogy a fenti kifejezésnek az összetartozó (az egyenletet kielégítő) h_1 és h_2 értékeknél lokális szélsőértéke van.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a lencse *vékony*, tehát a vastagsága jóval kisebb a többi paraméternél:

$$d \ll R_1, R_2, t, k.$$

A szokásos módon azt is feltesszük, hogy csak az optikai tengely közelében haladó sugarak vesznek részt a leképezésben, azaz

$$h_1 \ll (t + x_1), \qquad \text{illetve} \qquad h_2 \ll (k + x_2).$$

Nagyon szemléletes, hogy ilyenkor a sugár lencsében haladó szakasza is közel párhuzamos az optikai tengellyel, így

$$|h_1 - h_2| \ll (d - (x_1 + x_2)),$$

de ezt utólag, a megoldás ismeretében ellenőrizni is lehet. (Az ábra a részletek láttatása céljából a fenti feltételek szempontjából torzít.) Ezek alapján egyrészt a szögek értékét azonosíthatjuk a tangensük vagy a szinuszuk értékével, másrészt alkalmazhatjuk a $\sqrt{1+\xi} \approx (1+\xi/2)$ közelítést, ami az

$$n_1 \left(\frac{1}{2} \frac{h_1^2}{(t+x_1)} + x_1 \right) + n \left(\frac{1}{2} \frac{(h_1-h_2)^2}{(d-(x_1+x_2))} - (x_1+x_2) \right) + n_2 \left(\frac{1}{2} \frac{h_2^2}{(k+x_2)} + x_2 \right) = 0.$$

egyenletre vezet. Ez, az

$$x_1 \approx \frac{h_1^2}{2R_1} \qquad \text{és} \qquad x_2 \approx \frac{h_2^2}{2R_2}$$

összefüggésekkel tovább egyszerűsíthető. Könnyű belátnunk, hogy a nevezőkben x_1 a t, x_2 pedig a k mellett elhanyagolható. Nem triviális, de a $x_1 + x_2$-t is elhagyhatjuk a d mellett. Ez ugyanis akkor tehető meg, ha

$$\frac{h_1^2}{R_1} \ll d \qquad \text{és} \qquad \frac{h_2^2}{R_2} \ll d,$$

azaz

$$\left(\frac{h_1}{R_1} \right)^2 \ll \frac{d}{R_1} \qquad \text{illetve} \qquad \left(\frac{h_2}{R_2} \right)^2 \ll \frac{d}{R_2},$$

de ezek a feltételek az előzőek alapján teljesülnek, ha h_1 és h_2 legfeljebb néhányszor nagyobbak, mint d (úgy mondhatjuk, h_1 és h_2 azonos nagyságrendbe esik d-vel). Mindent egybevetve az

$$\left(\frac{n_1}{t} + \frac{n_1 - n}{R_1} + \frac{n}{d} \right) h_1^2 - 2\frac{n}{d} h_1 h_2 + \left(\frac{n_2}{k} + \frac{n_2 - n}{R_2} + \frac{n}{d} \right) h_2^2 = 0$$

egyenletre jutunk. A bal oldalon egy a h_1-ben és h_2-ben tisztán másodrendű kifejezés, egy úgynevezett *kvadratikus alak* áll. Az ilyen kifejezések számunkra érdekes tulajdonságait a *Függelékben* foglaljuk össze. Az ott elmondottak alapján az egyenletünk megoldása szempontjából a

$$D = \left(\frac{n_1}{t} + \frac{n_1 - n}{R_1} + \frac{n}{d} \right) \left(\frac{n_2}{k} + \frac{n_2 - n}{R_2} + \frac{n}{d} \right) - \left(\frac{n}{d} \right)^2$$

kifejezés értéke a meghatározó. Ez a t és k értékétől függően akármilyen előjelű lehet. Ha D pozitív, egyedül a $h_1 = h_2 = 0$ triviális megoldás létezik (és ez a kvadratikus alak szélsőértékének felel meg), azaz egyedül az optikai tengelyen lehetséges stacionárius pálya a T és K pontok között. Ha D negatív, az egyenletnek vannak nem triviális megoldásai, de ezek nem jelentenek stacionárius pályát, mert a h_1 és h_2 megváltoztatásával a kvadratikus alak értéke azonos mértékben (lineárisan) változik. Egyedül a triviális megoldáshoz tartozó pálya stacionárius, amennyiben a h_1 és h_2 kis eltérése a nullától nem változtatja meg a fény útjához szükséges időt, így ilyenkor is csak az optikai tengelyen mehet a fény a T és K pontok között. Végül a $D = 0$ esetben az egyenletnek van egy olyan nem triviális megoldáshalmaza, amely a kvadratikus alak szélsőértékének felel meg, ez a stacionárius pályák egy egész családját adja meg. Annak feltétele tehát, hogy a K pont valóban a T *képe* legyen az, hogy $D = 0$, ami átrendezve

$$\frac{n_1}{t} + \frac{n_2}{k} + \frac{n_1 - n}{R_1} + \frac{n_2 - n}{R_2} = -\left(\frac{n_1}{t} + \frac{n_1 - n}{R_1} \right) \left(\frac{n_2}{k} + \frac{n_2 - n}{R_2} \right) \frac{d}{n}$$

alakú. Látni való, hogy egy adott t-hez tartozó k értékét a jobb oldalon álló kifejezés legfeljebb d nagyságrendben módosítja, ami viszont az eddigi feltevéseink szerint k mellett elhanyagolható. Így az egyenlet jobb oldalát nullának vehetjük, és előttünk áll a két közeg határán elhelyezett vékony gyűjtőlencse leképezési törvénye:

$$\frac{n_1}{t} + \frac{n_2}{k} = \left(\frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n}{R_2} \right).$$

(A *Függelékben* megadtuk a kvadratikus alak nem triviális megoldásainak a helyét. Ennek alapján az összetartozó h_1 és h_2 értékek különbsége megadható, és ellenőrizhető, hogy a fénysugarak lencsében futó szakaszának szögére alkalmazott közelítések (a használt feltételek mellett) megengedettek . Ezt az olvasóra bízzuk.)

Megjegyzések.

1) A lencse *vékony* volta megkönnyíti a feladatot, de nem elengedhetetlen feltétele a képalkotásnak. *Vastag* lencsék esetében a leképezési törvény korrekciót kap.

2) A sugármenetekre vonatkozó feltevés, nevezetesen hogy közel futnak az optikai tengelyhez, megkerülhetetlen. Szükségessége jelzi, hogy a leképezés nem tökéletes, a T-ből kiinduló sugarak nem egy pontban, hanem csak egy kicsi térrészben futnak össze. Ez annál kisebb, tehát a kép annál élesebb, minél szűkebb szögtartományban induló sugarak vesznek részt a képalkotásban.

3) A levezetés természetszerűen valódi kép keletkezését feltételezte, de a leképezési törvény egy összetettebb gondolatmenettel virtuális kép esetében is értelmezhető a Fermat-elv alapján.

4) Megfontolásaink (a sugármenetekre vonatkozó feltétel megtartása mellett) alkalmazhatók akkor is, amikor sem a tárgy, sem a kép nincs az optikai tengelyen, hanem attól fordított állásban $\mathcal{T}$ illetve $\mathcal{K}$ távolságra vannak. Ilyenkor az egyenletekben megjelenő új tagok eltűnésének (kitranszformálhatóságának) a feltétele adja a nagyítást:

$$N=\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{T}}=\frac{n_1}{n_2}\frac{k}{t}.$$

Ennek levezetését itt nem részletezzük.

Visszatérve a **P. 5478.** feladathoz, a fenti leképezési törvény speciális esetei választ adnak a kérdésekre. Ha t vagy k végtelen, a másik (k vagy t) távolság a megfelelő oldali fókusztávolságot adja. Ennek megfelelően (értelemszerű jelölésekkel)

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

függetlenül attól, hogy a lencse hogyan (melyik oldalával melyik közeg felé) áll.

Függelék

I. Az alábbiakban a

$$Q(x,y)=Ax^2+By^2-2Cxy$$

kvadratikus alak néhány tulajdonságát foglaljuk össze. Alapvető célunk a

$$Q(x,y)=0$$

egyenlet lehetséges megoldásainak vizsgálata. Ez a feladat, feltételezve hogy $y\neq 0$, a $\zeta=x/y$ jelöléssel a

$$\frac{Q(x,y)}{y^2}=Q(\zeta,1)=A\zeta^2-2C\zeta+B=0$$

egyenlet diszkussziójára redukálódik. Ennek gyökei

$$\zeta_{1,2}=\frac{C\pm\sqrt{C^2-AB}}{A}.$$

a) Ha $AB-C^2>0$, nincs valós gyök. ez azt jelenti, hogy a $z=Q(x,y)$ felület az (x,y,z) térnek vagy a $z>0$, vagy a $z<0$ felében helyezkedik el, a $z=0$ síkot pedig az origóban érinti. A $Q(x,y)$-nak itt lokális szélsőértéke van. A $z=Q(x,y)$ felület egy olyan idom, aminek minden a z tengelyt magába foglaló síkkal való metszete azonos irányba nyíló parabola.

b) Ha $AB-C^2<0$, két valós gyök van, tehát az $y=x/\zeta_{1,2}$ egyenesek mentén a $z=Q(x,y)$ felület metszi a $z=0$ síkot, és az (x,y) sík így kialakult négy szegmensében $Q(x,y)$ értéke felváltva pozitív és negatív. A felületnek az origóban nyeregpontja van, és a z tengelyt magába foglaló síkokkal való metszetei fölfelé vagy lefelé nyíló parabolák (attól függően, hogy a metsző sík melyik szegmensbe esik). Megjegyzendő, hogy a nyeregpontban ezeknek a metszeteknek szélsőértéke van, de a felületnek magának nincs. Ennek ellenére a nyeregpontra is igaz, hogy az x és y változók kis eltérése a nullától első rendben nem változtatja meg a $Q(x,y)$ értékét.

c) $AB-C^2=0$ esetén egy gyök van csak:

$$\zeta_0=\frac{C}{A}=(\pm)\sqrt{\frac{B}{A}},$$

ahol a négyzetgyök előtti előjelet úgy kell megválasztani, hogy megegyezzen a C/A előjelével. Ilyenkor a $z=Q(x,y)$ felület egy parabola keresztmetszetű „vályú” (vagy annak a tükörképe), ami az $y=x/\zeta_0$ egyenes mentén érinti az (x,y) síkot.

II. A cikkben közvetlenül nem használjuk, de az érdeklődő olvasónak fontos lehet, hogyan kezelhető, ha a kvadratikus alak mellett x-ben és y-ban lineáris tagok is szerepelnek, mint pl. a

$$ax+by+Ax^2+By^2-2Cxy$$

kifejezésben. Ilyenkor bizonyos esetek kivételével új változók bevezetésével a lineáris tagok kitranszformálhatók. Legyen

$$x = \xi + x_0 \qquad \text{és} \qquad y = \eta + y_0.$$

Ezt behelyettesítve világos, hogy ha

$$\begin{aligned} Ax_0 - Cy_0 &= a/2, \\ -Cx_0 + By_0 &= b/2, \end{aligned}$$

akkor az eredményként adódó kifejezés

$$A\xi^2 + B\eta^2 - 2C\xi\eta + \text{konstans}$$

alakú lesz. Az egyenletek megoldása

$$x_0 = \frac{aB + bC}{2\,(AB - C^2)} \qquad \text{és} \qquad y_0 = \frac{aC + bA}{2\,(AB - C^2)},$$

ha $\left(AB - C^2\right) \neq 0$, de ha $\left(AB - C^2\right) = 0$, nem mindig van megoldás. Ilyenkor a második egyenlet hasonló az elsőhöz:

$$-Cx_0 + By_0 = -\frac{C}{A}\,(Ax_0 - Cy_0) = b/2.$$

Nyilván, a kettő ellentmond egymásnak, kivéve ha

$$b = -\frac{C}{A}a.$$

Ekkor azonban a két egyenlet, lévén ugyanaz, nem határozza meg x_0-t és y_0-t külön-külön, csak a kettő viszonyát:

$$y_0 = \frac{A}{C}x_0 - \frac{a}{2C}.$$

Ez egy egyenes, amely párhuzamos azzal, amelyben a $z = Q(x, y)$ felület a $z = 0$ síkot érinti, és minden pontja alkalmas arra, hogy a fent leírt módon a lineáris tagokat kiküszöböljük.

Woynarovich Ferenc
Budapest