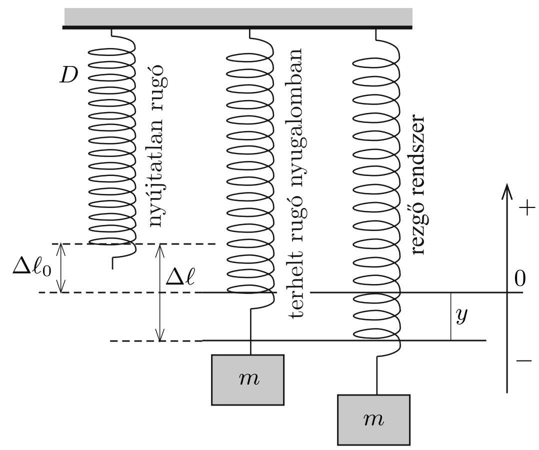
A függőleges rezgőmozgás energetikai vizsgálata

Ha egy rugóra akasztott test rezgését energetikailag vizsgáljuk, nem feledkezhetünk meg arról, hogy a rendszernek nemcsak rugalmas (E_r) és mozgási (E_m) energiája van, hanem a nehézségi erőből fakadóan helyzeti energiája (E_h) is. A mechanikai energiamegmaradás szerint itt mind a három energiát figyelembe kell vennünk:

$$E_\mathrm{r} + E_\mathrm{m} + E_\mathrm{h} = \text{állandó}.$$



Most a rugó nyújtatlan állapota és a rezgés egyensúlyi helyzete nem azonos. Az egyensúlyi helyzetben a testre ható $D\,\Delta\ell_0$ rugóerő és az mg nehézségi erő kiegyenlíti egymást, vagyis a rugó megnyúlása $\Delta\ell_0 = mg/D$. A rugó energiája az egyensúlyi helyzetben:

$$E_{\mathrm{r}0} = \frac{1}{2} D \left(\frac{mg}{D}\right)^2 = \frac{m^2 g^2}{2D}.$$

Helyezzük az egyensúlyi helyzethez a nehézségi erőből származó helyzeti energia nulla szintjét! Jelöljük a test kitérését az egyensúlyi helyzetétől y-nal. Ha test felfelé mozdul el, y pozitív, ha lefelé, negatív előjelű. Írjuk fel a rendszer különböző energiáit! A gravitációs helyzeti energia: $E_\mathrm{h} = mgy$. A rugó megnyúlása

$$\Delta\ell = \Delta\ell_0 - y,$$

így a rugalmas energia:

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2} D \left(\Delta\ell_0 - y\right)^2.$$

A négyzetre emelést és a $\Delta\ell_0 = mg/D$ behelyettesítést elvégezve a következő kifejezést kapjuk:

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2} D y^2 - mgy + \frac{m^2 g^2}{2D}.$$

A mozgási energia a megszokott módon: $E_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2} m v^2$. Az összenergia:

$$E_\text{összes} = E_\mathrm{h} + E_\mathrm{r} + E_\mathrm{m} = mgy + \left(\frac{1}{2} D y^2 - mgy + \frac{m^2 g^2}{2D}\right) + \frac{1}{2} m v^2.$$

Egyszerűsítve, és figyelembe véve, hogy a mechanikai energiák összege állandó:

$$E_\text{összes} = \frac{1}{2} D y^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{m^2 g^2}{2D} = \text{állandó}.$$

Láthatjuk, hogy a kifejezésben a harmadik tag a mozgás során állandó mennyiségekből áll, vagyis maga is állandó. Emiatt mondhatjuk, hogy a függőlegesen rezgő test esetén is igaz a vízszintes rezgéseknél sokat használt kifejezés:

$$\frac{1}{2} D y^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \text{állandó}.$$

Megjegyzés Az $\frac{1}{2} D y^2$ tagot nem nevezhetjük a rugó rugalmas energiájának, hiszen a rugó megnyúlása nem y, hanem $\Delta\ell_0 - y$. De helyes azt mondanunk, hogy ez a potenciális energiák (helyzeti és rugalmas energiák) összege, ami egy konstans erejéig szabadon változtatható annak megfelelően, hogy hol vesszük föl a helyzeti energia nulla szintjét. Ha a fenti számolást úgy végeznénk el, hogy a nehézségi erőből származó helyzeti energia nullszintjét a rugó nyújtatlan állapota és az egyensúlyi helyzet között pont *félúton* vesszük föl, a helyzeti és a rugalmas energia összege éppen $\frac{1}{2} D y^2$-nak adódna.

Baranyai Klára
Veresegyház