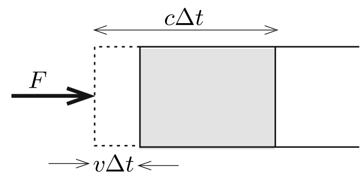
Hullámok terjedési sebessége

1. Longitudinális hullám terjedési sebessége (hangsebesség) szilárd testekben[1]

Ha egy fémrúd végére ráütünk egy kalapáccsal, akkor a rúdban hanghullám indul el. A rúdban végighaladó c sebességû lökéshullám hatására a rúd részecskéi v sebességgel kezdenek mozogni. (A v és a c sebesség különbözik: a jelenség olyan, mintha egy c sebességgel haladó parancs buzdítaná a részecskéket arra, hogy kezdjenek el v sebességgel mozogni.)



1. ábra

Egy rúdra a zárólapjára merõlegesen hasson F erõ Δt ideig. Ezalatt a jel $c\Delta t$ távolságra jut. A rúdnak az a része, amelyre a jel kiterjedt, $v\Delta t$-vel megrövidült, hiszen a bal oldali keresztmetszete már a kezdettõl fogva v sebességgel mozog, a jobb oldali keresztmetszetéhez pedig még csak most ért el a jel.

A rudat ért erõlökés megegyezik a rúdban mozgásba jött Δm tömegû, v sebességgel mozgó rész lendületével. A rúd keresztmetszete A, a sûrûsége ϱ.

$$F\Delta t = \Delta m v = c\Delta t A \varrho v.$$

A rúd összenyomódott $\Delta\ell = v\Delta t$-vel, a mozgásban lévõ, $\ell = c\Delta t$ hosszúságú részben feszültség ébred. Erre felírhatjuk a Hooke-törvényt:

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta\ell}{\ell} = E\frac{v\Delta t}{c\Delta t},$$

ahol E az anyag Young-modulusa. A két egyenletbõl F-et kifejezve, majd egyenlõvé téve:

$$cA\varrho v = E\frac{v}{c}A,$$

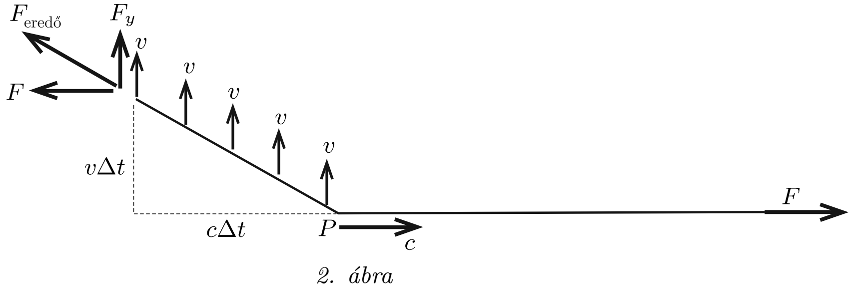
ahonnan

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}.$$

2. Transzverzális hullám terjedési sebessége rugalmas kötélen (húron).

Most vizsgáljuk meg, hogy milyen gyorsan terjed egy rugalmas kötélen a kötélre merõleges deformáció. Ez adja a transzverzális hullám sebességét.

Tekintsünk egy rugalmas kötelet, amelyet F erõvel feszítünk (*2. ábra*). A kötél hosszegységre esõ tömegét jelölje μ.



2. ábra

[1] Forrás: Párkányi-Tasnádi: Fizika példatár középiskolásoknak, Mechanika IV (Szakköri füzet) Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

A kötél egyik (bal oldali) végét F_y erõt kifejtve v sebességgel felhúzzuk. Ez azt eredményezi, hogy a kötél további részei is mozgásba jönnek, egyre hosszabb kötélszakasz emelkedik v sebességgel. Az *ábrán* a már mozgásba lendült és a még nyugalomban lévõ kötéldarabot elválasztó P pont jobbra tolódik. Ennek a pontnak a sebessége jelenti a jel c terjedési sebességét. Δt idõ alatt a kötélnek $c\Delta t$ hosszúságú darabja jött mozgásba (közben valahogyan megnyúlt egy kicsit), a kötél vége pedig $v\Delta t$ magasságig emelkedett. A Δt idõ alatt kifejtett erõlökés megegyezik a mozgásba lendült kötéldarab impulzusával:

$$F_y\Delta t = \Delta mv = c\Delta t\mu v.$$

A kötelet vízszintesen F erõ feszíti. Ez a vízszintes irányú feszítõerõ nem változik a kötél mentén, hiszen a kötél kis darabjai csak függõlegesen mozdulnak el, tehát vízszintes gyorsulásuk nincsen. A kötél végére kifejtett eredõ erõ kötélirányú lesz, emiatt az ábrán látható derékszögû háromszögek hasonlóak:

$$\frac{F_y}{F} = \frac{v\Delta t}{c\Delta t}, \qquad \text{ahonnan} \qquad F_y = \frac{v}{c}F.$$

A két egyenletbõl F_y-t kifejezve és a két kifejezést egyenlõvé téve kapjuk, hogy $\frac{v}{c}F = c\mu v$. Ebbõl adódik a keresett c sebesség:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

3. Hanghullám terjedési sebessége gázokban.[2]

Szilárd anyagban terjedõ longitudinális hullámok terjedési sebessége – mint láttuk – $c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$. A tört számlálójában az anyag Young-modulusa szerepel, ami az összenyomáskor fellépõ feszültséget írja le.

A levegõben terjedõ hang is longitudinális hullám, melynek sebességét a szilárd anyagban terjedõ hullámok sebességéhez hasonló kifejezés adja meg. Gázok esetében a Young-modulusa szerepét az úgynevezett *kompressziómodulus* veszi át. Ez az arányossági tényezõ azt mutatja meg, hogy ha a nyomást Δp értékkel megnöveljük, akkor a gáz milyen $\frac{\Delta V}{V}$ mértékben nyomódik össze.

Megmutatjuk, hogy a gáz relatív összenyomódása Δp-vel arányos:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{B}.$$

A B állandó értéke folyamatfüggõ. A hang terjedése annyira gyors, hogy nincs idõ a lokálisan összenyomott gáz és a környezete közötti hõcserére, vagyis a folyamat adiabatikusnak tekinthetõ. Az adiabatikus folyamatokban a gázzal közölt hõ nulla, így a termodinamika elsõ fõtétele szerint: $\Delta E = W$. A belsõ energia és a munkavégzés ismert kifejezéseit használva: $C_V n\Delta T = -p\Delta V$.

Az ideális gázok állapotegyenletébõl következik, hogy ha $pV = nRT$, akkor

$$nR\Delta T = \Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p.$$

Innen

$$\Delta T = \frac{p\Delta V + V\Delta p}{nR},$$

amit a fenti egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$C_V n\frac{p\Delta V + V\Delta p}{nR} = -p\Delta V, \qquad \text{vagyis} \qquad C_V(p\Delta V + V\Delta p) = -Rp\Delta V,$$

ahonnan

$$(C_V + R)p\Delta V = -C_V V\Delta p.$$

A Robert Mayer-egyenlet szerint $C_V + R = C_p$, vagyis $C_p p\Delta V = -C_V V\Delta p$. Eszerint az ideális gáz kompressziómodulusa adiabatikus folyamatokban:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = \frac{C_p}{C_V}p = \kappa p,$$

ahol κ a gáz állandó nyomásán és állandó térfogatán vett fajhõjének (mólhõjének) hányadosa. Ezek után a hang sebességét a gázban a következõképpen határozhatjuk meg:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\varrho}}.$$

[2] Forrás: Sears and Zemansky's: University Physics with modern Physics, 13th edition

Kifejezhetjük a gáz sûrûségét az állapotegyenletbõl: $pV = \frac{m}{M}RT$, vagyis

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Ezt a fenti képletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}.$$

A hang sebessége a gázokban tehát az abszolút hõmérséklet négyzetgyökével arányos.

Baranyai Klára
Veresegyház