Körmozgás

1. Egyenletes körmozgás

Kinematikai leírás

Ismétlõdõ, periodikus mozgás, amelyben egy pontszerû test körpályán mozog, egyenletesen. Az ilyen mozgások jellemzõje a periódusidõ (T), ami esetünkben egy teljes kör megtételéhez szükséges idõtartam. A periódusidõ reciproka a frekvencia (f), ami megmutatja, hogy egységnyi idõ alatt a test hány teljes kört tesz meg. A mozgást leírhatjuk az út, a sebesség és a gyorsulás segítségével.

Az út itt a kör kerületének egy darabja, vagyis az ívhossz (i). Ha a sebesség nagysága állandó, *egyenletes körmozgásról* beszélünk. Ennél a mozgásnál fontos megkülönböztetni, hogy a sebességvektort, vagy pedig a pályamenti sebességet (sebességnagyságot) vizsgáljuk, hiszen az út és idõ hányadosa mást eredményez, mint az elmozdulás nagyságának és az idõnek a hányadosa. Ez utóbbit különbözõ idõtartamokra vizsgálva különbözõ eredményt kapunk. Amikor sebességet mondunk, többnyire a pillanatnyi sebességre gondolunk, aminek nagysága egyenletes körmozgás esetén megegyezik a pályamenti sebességgel, iránya pedig érintõirányú. A pályamenti sebességet út és idõ hányadosaként egy r sugarú teljes körre felírva a következõ összefüggésre jutunk:

$$v = \frac{2r\pi}{T} = 2r\pi f.$$

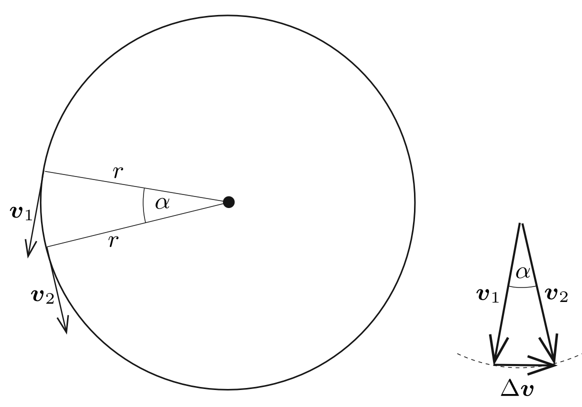
Ha két test koncentrikus körpályákon mozog azonos periódusidõvel, akkor a sebességük nagysága eltér, bizonyos értelemben mégis úgy tûnik, hogy „együtt mozognak”. Ami megegyezik, az az, hogy azonos idõ alatt ugyanakkora a szögelfordulásuk (α). A szögelfordulás gyorsaságát a szögsebesség (ω) mutatja, amit a szögelfordulás és az ahhoz szükséges idõ hányadosaként számolunk. Ha ezt egy teljes körre vizsgáljuk, a szögsebesség és a periódusidõ kapcsolatához jutunk. A szögelfordulást radiánban mérjük, ami *dimenziótlan* mennyiség.

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

A sebesség és a szögsebesség fenti két képletét összehasonlítva látható, hogy $v = r\omega$. A radiánban mért szöget a hozzá tartozó ívhossz és a sugár hányadosa adja, ez az út és a szögelfordulás kapcsolatához vezet:

$$\alpha = \frac{i}{r} = \frac{s}{r}, \qquad \text{vagyis} \qquad s = r\alpha.$$

A gyorsulást a sebességvektor megváltozása és az idõ hányadosaként számolva arra jutunk, hogy értéke (és iránya) attól függ, melyik idõtartamra számoljuk a hányadost. Vezessük be a pillanatnyi gyorsulás fogalmát, ami azt jelenti, ezt a hányadost nagyon rövid idõtartamra kell számolnunk.



1. ábra

Ha az eltelt idõ nagyon rövid, a szögelfordulás is kicsi, és emiatt a sebességvektor megváltozása gyakorlatilag merõleges a sebességvektorokra (*1. ábra*). A gyorsulás tehát sugárirányban befelé, a kör középpontja felé mutat (centripetális irányú). Ha az α szög kicsi, az 1. ábra jobb oldalán látható kis háromszög alapjának hossza elhanyagolható mértékben tér el a sebességvektorok metszéspontjából húzott, v sugarú körív sebességvektorok közé esõ szakaszának hosszától, vagyis

$$|\Delta \boldsymbol{v}| = v\alpha.$$

A sebesség irányának változásából adódó centripetális irányú gyorsulás nagysága az alábbi összefüggésekbõl számolható:

$$a_{\text{cp}} = v\omega = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}.$$

Megjegyzés. A sebességvektor megváltozásának nagyságát ($|\Delta\boldsymbol{v}|$) ne tévesszük össze a sebességvektor v nagyságának megváltozásával ($\Delta v = \Delta|\boldsymbol{v}|$).

Dinamikai leírás

Dinamikai vizsgálat során a mozgás okát, dinamikai feltételét a rá ható erõkben keressük. A vizsgálódás alapja mindig a dinamika alapegyenlete:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}.$$

Mivel egyenletes körmozgás esetén a test gyorsulásvektora a kör középpontja felé mutat, a testre ható erõk *eredõjének* szintén a kör középpontja felé kell mutatnia, vagyis centripetális irányú. A nagysága a fentiek alapján:

$$F_\mathrm{e} = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 = mv\omega.$$

2. Egyenletesen változó körmozgás

A körmozgás egyenletesen változó, ha a szögsebesség változása az idõben egyenletes, vagyis az $\omega(t)$ függvény lineáris. A változás gyorsaságát szöggyorsulásnak hívjuk, jele β:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Az összefüggésbõl látható, hogy a szöggyorsulás mértékegysége $1/s^2$. Az egyenletesen változó körmozgás kinematikai leírása az egyenes vonalú mozgásoknál tanultakhoz hasonló. A megfelelõ mennyiségek „cseréjével” az ott megismert összefüggésekhez jutunk. Mivel változó körmozgás esetén a sebesség iránya mellett nagysága is változik, a centripetális irányú gyorsulás (a_cp) mellett egy érintõirányú (más néven: egy tangenciális irányú) összetevõ (a_t) is megjelenik:

$$a_\mathrm{t} = \frac{\Delta|\boldsymbol{v}|}{\Delta t} = r\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r\beta.$$

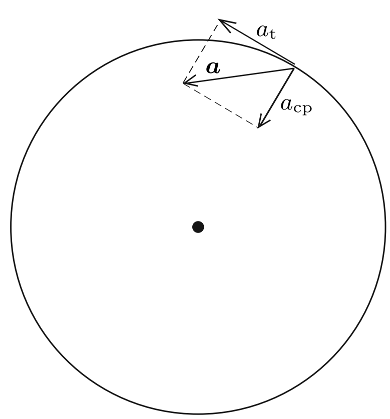
Ez az összetevõ csak a sebesség nagyságának idõbeli változását írja le. A teljes a gyorsulás ennek a két összetevõnek az eredõje (*2. ábra*), vagyis a Pitagorasz-tétel szerint

$$a^2 = a_\mathrm{cp}^2 + a_\mathrm{t}^2.$$

Az egyenletesen gyorsuló körmozgás kinematikai leírása a kerületi mennyiségekre felírt összefüggésekbõl r-rel való osztással (egyszerûsítéssel) adódik:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2}t^2, \qquad r\alpha = r\omega_0 t + r\frac{r\beta}{2}t^2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = r\omega_0 t + \frac{r\beta}{2}t^2,$$

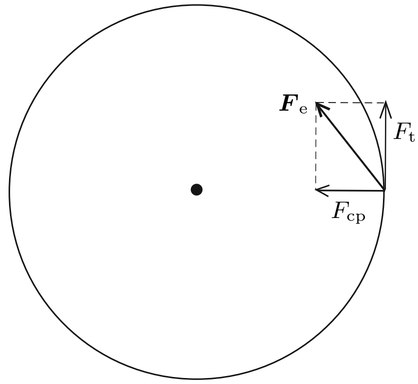
$$v = v_0 + at, \qquad r\omega = r\omega_0 + r\beta t \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \omega_0 + \beta t.$$



2. ábra

A dinamikai leírás a dinamika alapegyenletének segítségével adható meg. Az eredõ erõ a gyorsulással megegyezõ irányú, és ahhoz hasonlóan érintõirányú (tangenciális) és sugárirányú (centripetális) komponensekre bontható. A kör középpontja felé mutató összetevõ a sebesség irányát változtatja, míg az érintõirányú erõkomponens a sebesség nagyságát. Az eredõ erõre és komponenseire szintén felírható a Pitagorasz-tétel (*3. ábra*):

$$F_\mathrm{e}^2 = F_\mathrm{cp}^2 + F_\mathrm{t}^2.$$



3. ábra

Felírható a dinamika alapegyenlete: $\boldsymbol{F}_\mathrm{e} = m\boldsymbol{a}$, illetve a komponensekre külön is érvényes Newton II. törvénye:

$$F_\mathrm{t} = ma_\mathrm{t} \qquad \text{és} \qquad F_\mathrm{cp} = ma_\mathrm{cp}.$$

Schramek Anikó
Fót