

# Merev testek mozgásegyenletei

A KöMaL fizika pontversenyében kitűzött feladatok közül jelentős számú foglalkozik a merev testek mozgásával. Tekintettel arra, hogy a jelenlegi tananyagban erősen visszaszorult a mechanikának ezen érdekes és fontos része, az alábbiakban röviden összefoglaljuk a merev testek mozgására vonatkozó legfontosabb ismereteket. Írásunkkal elsősorban azoknak a diákoknak szeretnénk segíteni, akik az iskolában nem (vagy nem elég részletesen) tanulnak a merev testek forgómozgásáról. Azoknak, akik alaposabban szeretnének elmélyedni ebben a témakörben, a *Fizika* című kézikönyvet ajánljuk (Akadémiai Kiadó, 2009., főszerkesztő Holics László).

Merev testnek az olyan (idealizált) testet nevezzük, amelynek alakja (tetszőleges két pontja közötti távolság) a mozgás során nem (vagy csak elhanyagolhatóan kis mértékben) változik meg. Jól ismert, hogy egy tömegpont térbeli mozgásának leírására 3 koordináta elegendő. A merev testek pillanatnyi helyzete ennél bonyolultabban, 6 adattal írható le. Ez a 6 adat lehet például a tömegközéppont 3 koordinátája és a test térbeli irányultságát jellemző 3 szögkoordináta. Egyszerűbb a helyzet a merev testek síkmozgásánál, ahol a tömegközéppontot 2 adattal, a test elfordulását pedig egyetlen szöggel tudjuk jellemezni.<sup>1</sup> A továbbiakban csak ezzel az esettel fogunk foglalkozni, mert a merev testekre vonatkozó kitűzött feladatok döntő többsége is csak ilyen mozgások leírását igényli.

Ha a merev test tömegközéppontjának pillanatnyi helyét az  $\mathbf{r}(t)$  vektor adja meg, akkor a tömegközéppont pillanatnyi sebessége

$$(1) \quad \mathbf{v}(t) = \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t},$$

ahol  $\Delta t$  egy nagyon kicsi időtartam. (Precízebben fogalmazva: a sebességvektor a helyvektor idő szerinti deriváltja.) A tömegközéppont pillanatnyi gyorsulása:

$$(2) \quad \mathbf{a}(t) = \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t}.$$

Newton mozgástörvénye szerint

$$(3) \quad m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(t),$$

ahol  $m$  a merev test össztömege,  $\mathbf{F}(t)$  pedig a a testre ható *külső* erők eredője. (Nagyon lényeges, hogy a test belsejében ható, a test egyik darabkájának a másik részre kifejtett (és általában ismeretlen) erőket nem kell beleírunk a mozgásegyenletbe. Ez az egyenlet nagyon hasonló a tömegpontok mozgásegyenletéhez.)

A merev test térbeli helyzetét (síkmozgás esetén) minden pillanatban egyetlen  $\varphi(t)$  szöggel jellemezhetjük. (Ez a szög egy kerékpár kerekének mozgásánál lehet pl. a kerék tengelyét a szelepszapkával összekötő egyenesnek a függőlegessel bezárt szöge.) A radiánban mért szög változási sebességét (az ún. szögsebességet) az

$$(1') \quad \omega(t) = \frac{\Delta \varphi(t)}{\Delta t}$$

összefüggés adja meg, a szögsebesség változási sebességét (a szöggyorsulást) pedig így számíthatjuk ki:

$$(2') \quad \beta(t) = \frac{\Delta \omega(t)}{\Delta t}.$$

A Newton-féle mozgásegyenletekből levezethető, hogy a merev test szöggyorsulát a testre ható külső erők eredő forgatónyomatékával arányos:

$$(3') \quad \Theta \beta(t) = M(t),$$

ahol  $\Theta$  a merev testre jellemző állandó (az ún. tehetetlenségi nyomaték),  $M(t)$  pedig a külső erőktől származó (a tömegközéppontra vonatkoztatott) eredő forgatónyomaték.

*Megjegyzés.* A merev test tehetetlenségi nyomatéka a test tömege mellett függ még a test alakjától és a forgástengely irányától. A tehetetlenségi nyomaték véges sok tömegpont esetén így számítható ki:

$$\Theta = \sum_i m_i d_i^2,$$

ahol  $m_i$  a test egyes tömegpontok tömege,  $d_i$  pedig a tömegközépponttól mért távolságuk.

Általános esetben a tehetetlenségi nyomaték mérésel határozható meg, hasonlóan a test egyéb adataihoz (tömege, térfogata stb.) Szabályos alakú, homogén tömegeloszlású merev testek tehetetlenségi nyomatéka táblázatokban megtalálható adat. Egy  $\ell$  hosszúságú rúdnál pl.  $\Theta = \frac{1}{12} m \ell^2$ ,  $R$  sugarú korongra (vagy hengerre)  $\frac{1}{2} m R^2$ , vékony abroncsra  $m R^2$ , gömbre pedig  $\frac{2}{5} m R^2$ . A kitűzött feladatokban általában ilyen merev testek fordulnak elő.

<sup>1</sup>Síkmozgást végez a merev test, ha pontjai egy adott koordináta-rendszerben egy adott síkkal párhuzamosan mozognak.

Szembeötlő az (1), (2) és (3) egyenletek, valamint az (1'), (2') és (3') egyenletek alaki hasonlósága. Ha a

tömegközéppont helye	$\Leftrightarrow$	elfordulás szöge,
tömegközéppont sebessége	$\Leftrightarrow$	szögsebesség,
tömegközéppont gyorsulása	$\Leftrightarrow$	szöggyorsulás,
merev test össztömege	$\Leftrightarrow$	tehetetlenségi nyomaték,
eredő (külső) erő	$\Leftrightarrow$	eredő (külső) forgatónyomaték

megfeleltetést nézzük, a két egyenletrendszer teljes analógiát mutat.

*Megjegyzés.* A hasonlóságot kicsit sérti, hogy míg a tömegközéppont jellemzői (síkbeli) vektorok, addig a szögelfordulás, a szögsebesség, a szöggyorsulás és a forgatónyomaték skalár mennyiségek. Ez azonban csak a síkmozgásnál van így, az általánosabb (térbeli) forgómozgásnál a „szögekre vonatkozó” fizikai mennyiségek is vektorokkal adhatók meg.)

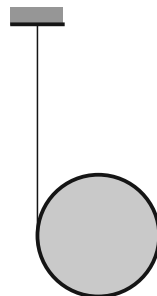
A merev testek síkmozgásának legegyszerűbb esete a rögzített tengely körüli forgómozgás. Ilyenkor a test helyzete egyetlen szögadattal adható meg, és a tömegközéppont mozgásegyenletével külön nem kell foglalkoznunk. (Ha a tömegközéppont a forgástengelyre esik, akkor mindvégig nyugalomban marad, ha pedig a forgástengelyen kívül van, akkor a gyorsulása kifejezhető a test szögsebességével és szöggyorsulásával.)

Rögzített tengely körüli forgást célszerű a forgástengelyhez képest leírni, és ez a tengely esetleg nem halad át a tömegközépponton. Ekkor szükségünk lehet a tömegközépponttól  $d$  távolságban lévő tengelyre vonatkoztatott  $\Theta'$  tehetetlenségi nyomatékra. Ezt a *Steiner-tétel* segítségével számíthatjuk ki:

$$\Theta' = \Theta_{\text{TKP}} + md^2,$$

ahol  $\Theta_{\text{TKP}}$  a tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték,  $m$  pedig a test össztömege.

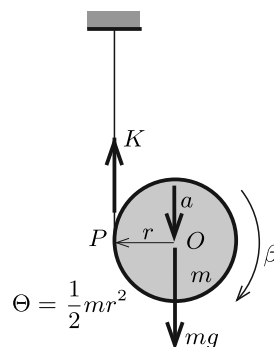
A fentebb leírtakat egy konkrét feladaton, a jójő példáján keresztül mutatjuk be. Az *1. ábrán* látható (homogén anyageloszlású,  $r$  sugarú) henger a rátekerít vékony, hajlékony, nyújthatatlan fonál mentén egyre gyorsabban süllyed lefelé, miközben a forgása is egyre gyorsabbá válik. (A fonál kezdetben függőleges és a test nyugalomban van. A test tengelyének „elbillenését” két fonál alkalmazásával akadályozhatjuk meg, de az egyszerűség kedvéért a továbbiakban egyetlen fonálról fogunk beszélni.)



1. ábra

*Kérdések.* Mekkora (és milyen irányú) gyorsulással fog mozogni a henger tömegközéppontja? Mekkora a henger szöggyorsulása? Mekkora erő feszíti a fonalat?

*Megoldás.* Vegyük fel – a szokásos jelöléseket alkalmazva – az ismert és keresett mennyiségeket a *2. ábrán* látható módon.



2. ábra

Az  $O$  tömegközéppont mozgásegyenlete:

$$(4) \quad mg - K = ma.$$

A gyorsulás irányát a függőleges irányú nehézségi erő és az ugyancsak függőleges irányú fonálerő eredője határozza meg. Eszerint a tömegközéppont gyorsulása mindvégig függőleges, és a fonál sem „térül el” a függőleges iránytól.

A tömegközéppont körüli forgás egyenlete:

$$(5) \quad Kr = \Theta\beta = \frac{1}{2}mr^2\beta,$$

és végül a szöggyorsulás és a lineáris gyorsulás közötti (kinematikai) kapcsolat:

$$(6) \quad a - r\beta = 0.$$

Az utolsó egyenlet azt fejezi ki, hogy a  $P$  pont (ami az  $a$  gyorsulással lefelé mozgó  $O$  tömegközépponthez képest  $r\beta$  nagyságú, felfelé irányuló érintőleges gyorsulással rendelkezik) eredő gyorsulása *nulla*, hiszen az ugyancsak gyorsulásmentes fonállal érintkezik.

A (4)-(6) egyenletrendszer megoldása:

$$a = \frac{2}{3}g, \quad K = \frac{1}{3}mg \quad \text{és} \quad \beta = \frac{2g}{3r}.$$

*Megjegyzés.* Ugyanezt az eredményt látszólag egyszerűbben is megkaphatjuk, ha a  $P$  pontra írjuk fel a forgómozgás alapegyenletét. Mivel (a Steiner-tétel szerint)  $\Theta_P = \Theta_{\text{TKP}} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$ , a szöggyorsulás pedig nem függ a vonatkoztatási pont megválasztásától, a mozgásegyenlet:

$$mgR = \frac{3}{2}mR^2 \frac{a}{R}, \quad \text{vagyis} \quad a = \frac{2}{3}g.$$

A tömegközéppont mozgásegyenlete adja meg a fonalat feszítő erőt:

$$ma = mg - K, \quad \text{azaz} \quad K = \frac{1}{3}mg.$$

Vajon jogosan alkalmazhatjuk a forgómozgás alapegyenletét – változatlan formában – a merev test tetszőleges pontjára? A válasz: *nem!* Javasoljuk az Olvasónak, hogy írja fel a mozgásegyenleteket az  $OP$  egyenes tetszőleges pontjára, és oldja is meg azokat. Látni fogja, hogy általában *hibás* eredményt kap, két eset, az  $O$  és a  $P$  pont kivételével. Vajon mi tünteti ki ezt a két pontot a többivel szemben. Az  $O$  pont a tömegközéppont, arra – a cikkben leírtak szerint – érvényes a mozgásegyenlet. De a  $P$  pontnak miért van kitüntetett szerepe?

Általánosan elterjedt nézet szerint azért kapunk helyes eredményt, mert a  $P$  pontjának pillanatnyi sebessége nulla, tehát ez a merev test pillanatnyi forgási középpontja (ún. momentán centruma). Ez azonban egy *hibás* nézet! (A pillanatnyi sebesség nulla vagy nem nulla volta függ attól, hogy melyik koordináta-rendszerben írjuk le a mozgást. A fizika törvényei azonban mindegyik inerciarendszerben ugyanolyan alakban érvényesek, tehát a momentán centrumra való hivatkozás nem lehet a helyes magyarázat.) A helyes válasz kicsit bonyolultabb: a forgómozgás egyenlete csak olyan pontra érvényes, amelynek gyorsulása átmegy a tömegközépponton. Ilyen pont maga a tömegközéppont, illetve statikában (amikor a test minden szempontból nyugalomban van) a merev test *tetszőleges* pontja. Általános esetben azonban óvatosan kell eljárunk, a naivan felírt egyenletek hibás eredményre vezethetnek. A jójónál a  $P$  pont pillanatnyi (centripetális) gyorsulása vízszintes irányú, tehát átmegy a henger tömegközéppontján, ez magyarázza, hogy miért kapunk helyes eredményt.

Gnädig Péter  
Vácduka