A Menelaos[1]-féle tétel a Ceva-féle tételnek (l. K. M. L. II. évf. 94. lap) társtétele, mely a legtöbb esetben épp oly előnyösen alkalmazható három pontnak egy egyenesben való fekvésének kriteriumául, mint amaz akkor, ha azt akarjuk eldönteni valjon három egyenes egy pontban találkozik-e.

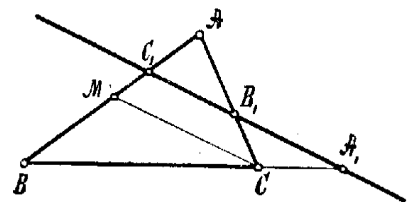
A tétel így szól: *egy háromszög oldalait egy tetszés szerinti egyenessel metszve, az egyes oldalakon keletkező szeletek arányainak szorzata a positív egység.* Ha az a, b, c oldalakon keletkező metszéspontokat rendre A_1 B_1 és C_1-gyel jelöljük, úgy:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1$$

a hol még megjegyzendő, hogy az egyes arányok előjele is tekintetbe veendő, a szerint a mint elemeik egyenlő vagy ellenkező irányúak.

A jelre való tekintet nélkül a tétel úgy is mondható ki, hogy három nem szomszédos szelet szorzata egyenlő a másik három nem szomszédos szelet szorzatával.

A tétel bizonyítása végett húzzunk az egyik, pl. a C csúcsból a metsző egyenessel párhuzamost, mely a szemben fekvő oldalt m pontban metszi.



Ekkor

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{C_1B}{C_1M}.$$

Másrészt

$$\frac{B_1C}{B_1A}=\frac{C_1M}{C_1A}.$$

E két egyenletet egymással szorozva:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}=\frac{C_1B}{C_1A}$$

a honnan a tétel:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1.$$

A szorzat jele azért positív, mert ha az egyes arányok közt negatívak is vannak, ezek száma mindig kettő. Valamely oldalon a szeletek aránya ugyanis akkor negatív, ha az egyenes a szorosabb értelemben vett oldalt, a két csúcs között levő részt metszi. Ha azonban a háromszög oldalait a csúcsok által határoltaknak tekintjük, úgy zárt idommal van dolgunk; zárt idomot pedig egyenes csakis páros számú pontokban metszhet. Az egyenes tehát a szorosabb értelemben vett oldalakat vagy egyáltalában nem metszi (mind a három arány positív) vagy két oldalt metsz és a harmadiknak megnyújtását (két arány negatív, egy positív).

Három pontban egy egyenesben való fekvése kriteriumául a tétel megfordítása szolgál, mely így fogalmazható: *Ha három* (A_1, B_1, C_1) *pont egy* ABC *háromszög oldalain úgy van elhelyezve, hogy a* 6 *szelet között*

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1$$

összefüggés áll fenn, akkor e három pont egy egyenesen fekszik.

Ha ugyanis az A_1 és B_1 pontokat összekötő egyenes a harmadik oldalt nem C_1-ben, hanem egy ettől különböző C_1' pontban metszi, úgy ezen egyenes metszéspontjaira is érvényes a tétel, tehát:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1'A}{C_1'B}=1$$

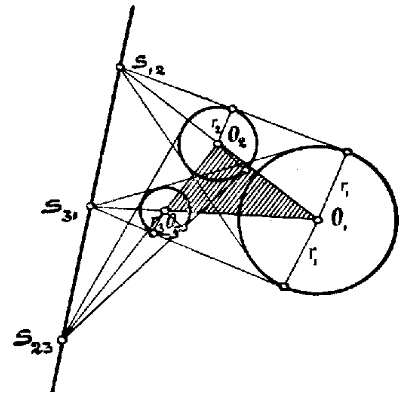
a kettőt összehasonlítva

$$\frac{C_1'A}{C_1'B}=\frac{C_1A}{C_1B}$$

s így látjuk, hogy a C_1 és C_1' azonosak.

Alkalmazás: 1. *Három kör három külső hasonlósági pontja, nemkülönben két belső és egy külső, egy egyenesbe esik.*

[1] *Menelaos,* a híres mathematikus, K. u. 98 körül élt Alexandriában; *Ceva,* olasz mathematikus, élt a XVII. században.



Legyenek a körök középpontjai rendre $O_1,\ O_2,\ O_3$; sugarai $r_1,\ r_2,\ r_3$; külső hasonlósági pontjai $S_{12},\ S_{23},\ S_{31}$. Mivel a hasonlósági pontok a megfelelő centrálisokon vannak, az $O_1O_2O_3$ háromszög az, melyre a tétel alkalmazható. Az egyes oldalakon keletkezett szeletek aránya, a mint az ismeretes:

$$\frac{S_{12}O_1}{S_{12}O_2} = \frac{r_1}{r_2}$$
$$\frac{S_{23}O_2}{S_{23}O_3} = \frac{r_2}{r_3}$$
$$\frac{S_{31}O_3}{S_{31}O_1} = \frac{r_3}{r_1}$$

Szorzatuk:

$$\frac{S_{12}O_1}{S_{12}O_2} \cdot \frac{S_{23}O_2}{S_{23}O_3} \cdot \frac{S_{31}O_3}{S_{31}O_1} = \frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2r_3} = 1.$$

A belső hasonlósági pontok legyenek $S'_{12},\ S'_{23},\ S'_{13}$.

Egy egyenesben fekszenek ekkor egyrészt

$$S'_{12},\ S'_{23},\ S_{31}$$

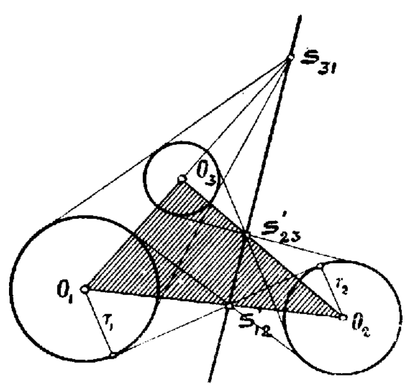
másrészt

$$S'_{23},\ S'_{31},\ S_{12}$$

és

$$S'_{31},\ S'_{12},\ S_{23}$$

Mutassuk meg a bizonyítást az első esetre.



A pontok ismét az $O_1O_2O_3$ háromszög kerületén vannak elhelyezve, és a szeletek aránya

$$\frac{S'_{12}O_1}{S'_{12}O_2} = -\frac{r_1}{r_2}$$

$$\frac{S'_{23}O_2}{S'_{23}O_3} = -\frac{r_2}{r_3}$$

$$\frac{S'_{31}O_3}{S'_{31}O_1} = \frac{r_3}{r_1}$$

Szorzatuk:

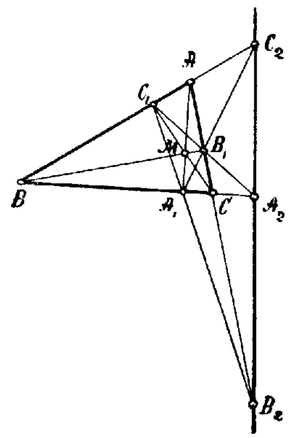
$$\frac{S'_{12}O_1}{S'_{12}O_2} \cdot \frac{S'_{23}O_2}{S'_{23}O_3} \cdot \frac{S_{31}O_3}{S_{31}O_1} = \frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2r_3} = 1.$$

2. *Két-két magasság talppontjait összekötő egyenesek a háromszög harmadik oldalát oly pontokban metszik, melyek egy egyenesbe esnek.*

Az A_2, B_2, C_2 pontokat czélszerű lesz a talpponti háromszög oldalaihoz viszonyítani, bár az eredetiéihez is lehetne.

A bizonyításnál két esetet kell megkülönböztetnünk, a szerint a mint a háromszög hegyes-, vagy tompaszögű.

Ha a háromszög hegyesszögű, akkor az eredeti háromszög oldalai a talpponti háromszög külső szögfelezői, melyek a szemben fekvő oldalakat úgy metszik, hogy a szeletek egyenlő irányúak és arányuk egyenlő a mellettük fekvő oldalak arányával.



Tehát ha a talpponti háromszög oldalai a_1, b_1, c_1, úgy:

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{c_1}{b_1}$$

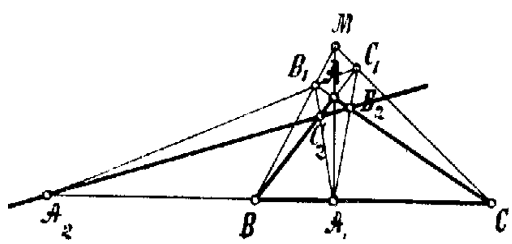
$$\frac{B_2C_1}{B_2A_1} = \frac{a_1}{c_1}$$

$$\frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{b_1}{a_1}$$

Szorzatuk:

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{B_2C_1}{B_2A_1} \cdot \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{a_1b_1c_1}{a_1b_1c_1} = 1.$$

Ha ellenben a háromszög pl. A-nál tompaszögű, akkor az a oldal külső szögfelezője az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszögnek, de b és c már belső szögfelezők; az utóbbiak által képezett szeletek tehát már ellenkező irányúak, és arányuk egyenlő a mellettük fekvő oldalak arányával, de negatív előjellel.



Tehát

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{c_1}{b_1}$$

$$\frac{B_2C_1}{B_2A_1} = -\frac{a_1}{c_1}$$

$$\frac{C_2A_1}{C_2B_1} = -\frac{b_1}{a_1}$$

és így

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{B_2C_1}{B_2A_1} \cdot \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{a_1b_1c_1}{a_1b_1c_1} = 1.$$

Budapest.

Visnya Aladár.