Geometriafeladatok megoldása szinusztétellel

Füredi Erik

2020. augusztus – 2021. augusztus

1 Bevezetés

Ma a középiskolai matematikaversenyek résztvevői közt a geometria igen megosztó témakör. Vannak olyan versenyzők, akiknek ez a kedvencük és ehhez értenek a legjobban, ugyanakkor vannak olyanok is, akiknek inkább elrontják a versenyeiket a geometriapéldák és idegenkednek tőlük. Geometriafeladat azonban általában minden verseny minden fordulójában van, például az IMO-n a hatból körülbelül kettő. Ezen mű alapvetően a legmagasabb szintű középiskolai matematikaversenyekre készülő diákoknak és tanáraiknak szól.
A geometriafeladatok megoldásában használt kedvenc módszeremről írok, mellyel szögek és hosszok ismeretében szögeket vagy hosszokat kaphatunk meg, a szinusztételt és esetleg addíciós képleteket felhasználva. Az ilyen számolással kapott megoldásokat tapasztalatom szerint a geometria kedvelői körében inkább undor fogadja, ugyanakkor ez egy hatékony és az alapok megismerését követően különösebb fáradalmak nélkül alkalmazható módszer, főleg könnyű geometriafeladatoknál (ami ezzel gyorsan kijön, azt a példát nem tartom nehéznek – utólag). El lehet vele kerülni a több szerencsét és munkát igénylő, geometriafeladatoknál gyakori, új pont(ok) felvételét igénylő megoldásokat (melyeket a geometria kedvelői szebbnek tartanak; a tapasztalatom az, hogy általában az adott pontokon átmenő, a megoldáshoz szükséges vonalakra sokkal könnyebb rájönni, mint új pontokra), persze a két módszer egymást ki is egészítheti.
Fontos tudnivaló, hogy egyes versenyeken (pl. az IMO-n és a hozzá igazodó olimpiai válogatón) a geometriafeladatok megoldását trigonometriai úton próbálni nagyobb kockázattal jár, mert (pl. a koordinátageometriai megoldásmenethez hasonlóan) lényegében csak a teljes megoldást honorálják (azt viszont maximális ponttal), így időigényesebb feladatok esetén nem feltétlen ez a célravezető módszer. Ugyanakkor egyszerűbb részeredmények eléréséhez ekkor is segíthet.

2 Elmélet

Ebben a műben a szokásos jelölésekkel az ABC háromszög oldal(hossz)ai a, b és c, rendre az adott csúccsal átellenben, míg belső szögei az A, B és C csúcsoknál rendre α, β és γ, ekkor természetesen $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Számolásnál egy szakasz hosszát (néha) két végpontjával jelöljük.

A geometriafeladatoknál a szinusztétel alkalmazását néhány szög elnevezése és szögszámolás előzi meg, melyhez azonban legtöbbször csak jól ismert dolgok (pl. egy háromszögben a belső szögek összege 180 fok, egyenlő szárú háromszögben alapon fekvő belső szögek egyenlők) szükségesek.
Ez a mű, mely a szinusztétel alkalmazását mutatja be (viszonylag) magas szintű (verseny)feladatokban, nem lenne teljes a (jól ismert) szinusztétel legtöbbet nyújtó alakjának kimondása nélkül. Lássuk, hogy mi ez:

Tétel 1. *Ha az ABC háromszög köréírt körének sugara R, akkor*

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

Vagyis, ahogyan a legtöbbet használjuk, egy háromszög oldalai egyenesen arányosak a velük átellenes belső szögek szinuszaival. A szinuszok ebben az írásban általában nem lehetnek 0-k, hiszen $0°$-nál nagyobb és $180°$-nál kisebb szög szinusza nem lehet 0.
Egy másik, szinuszokkal számolásnál hasznos állítás a trigonometrikus Ceva-tétel, amely a szinusztételnél jóval kevésbé használt vagy ismert, de egyes feladatok megoldásánál jól kombinálható vele:

Tétel 2. *Ha az ABC háromszög BC, CA, AB oldalán van rendre a D, E és F pont, az AD, BE és CF szakaszok akkor és csak akkor metszik egymást egy pontban, ha*

$$\frac{\sin BAD\angle}{\sin DAC\angle} \cdot \frac{\sin CBE\angle}{\sin EBA\angle} \cdot \frac{\sin ACF\angle}{\sin FCB\angle} = 1.$$

Ez a Ceva-tételből (és megfordításából) a szinusztétel felhasználásával látható be. (Ceva olasz matematikus tétele szerint, ha az ABC háromszög BC, CA, AB oldalán van rendre a D, E és F pont, az AD, BE és CF szakaszok akkor és csak akkor metszik egymást egy pontban, ha $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$.) A szinusztételre és a Ceva-tételre szép bizonyítások találhatóak Coxeter és Greitzer könyvében.
Végül még egy (ismert) képlet, amely szinuszokkal számolásnál alkalmazható egyes esetekben:

Tétel 3. *Egy háromszög területét megkapjuk bármely két oldala hosszának szorzatát megszorozva az általuk közrezárt belső szöge szinuszának felével.*

A szinusz és koszinusz függvényekre jellemző legalapvetőbb azonosságok, amelyek gyakran előkerülnek:

$\sin x = -\sin(-x)$,
$\cos x = \cos(-x)$,
$\sin x = \sin(180° - x)$,
$\cos x = -\cos(180° - x)$,
$\sin x = \cos(90° - x)$,
$\cos x = \sin(90° - x)$,
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

A szinusz és koszinusz függvényeket összekapcsoló addíciós képletek szintén jól használhatóak a szinusztételes bizonyításoknál:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Az előbbiekből levezethető az alábbi két azonosság, amelyekkel általában összegből szorzatot érdemes csinálni, de a fordítottja is megtehető:

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$,

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$.

Ezen azonosságok közül több felhasználásával természetesen ki lehet számolni más, ezekből következő azonosságokat is, amely segíthet a feladatmegoldásban, erre később látunk példát is.

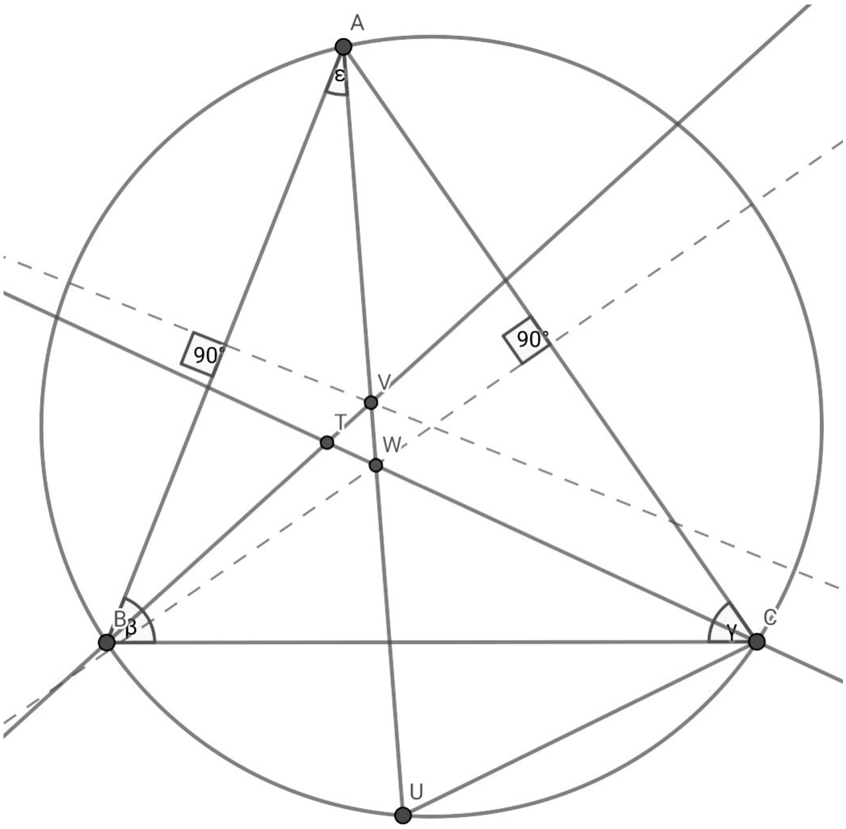
3 Geometriafeladatok szinusztételes megoldással

Kezdjük egy IMO-feladattal, mely maga is mutatja a módszer erejét.

1. feladat (IMO 1997/2.)
Az ABC háromszögben az A-nál lévő szög a legkisebb. A háromszög körülírt körét a B, C pontok két ívre bontják. Legyen U annak a B és C közötti ívnek a belső pontja, amelyik nem tartalmazza A-t.
AB és AC felezőmerőlegese az AU egyenest a V, illetve W pontban metszi. A BV és CW egyenesek metszéspontja T. Bizonyítsuk be, hogy $AU = TB + TC$.

Megoldás.
Első rész (szögszámolás). Az ABC háromszög belső szögeit a szokásos módon, a BAU szöget pedig ε-nal

jelöljük. Mivel U az A-val szemközti BC íven van, AU két részre osztja a BAC szöget, így $UAC\angle = \alpha - \varepsilon$. Mivel az ABV és ACW egyenlő szárú háromszögek AB és AC alapokkal, $ABV\angle = \varepsilon$ és $ACW\angle = \alpha - \varepsilon$. Mivel α az ABC háromszög legkisebb belső szöge, e szögek kisebbek β-nál és γ-nál, V és W az ABC háromszögben van. Így $CBV\angle = \beta - \varepsilon$ és $BCW\angle = \gamma - \alpha + \varepsilon$. Mivel T a BV és CW egyenesek metszéspontja B-től V-vel, illetve C-től W-vel egyazon irányban van, $CBT\angle = \beta - \varepsilon$ és $BCT\angle = \gamma - \alpha + \varepsilon$, ezért a BCT háromszög harmadik T-nél lévő belső szöge 2α. Végül mivel $ABUC$ húrnégyszög, $AUC\angle = ABC\angle = \beta$ és így az ACU háromszög két belső szögét ismerve a harmadikat tudjuk, $ACU\angle = \gamma + \varepsilon$.



1. ábra

Második rész (szinusztétel alkalmazása). A BTC háromszögre kétféleképp és az ABC, illetve AUC háromszögekre alkalmazva a szinusztételt megkapjuk, hogy:

$$BT = \frac{BC}{\sin 2\alpha} \cdot \sin(\gamma - \alpha + \varepsilon),$$

$$TC = \frac{BC}{\sin 2\alpha} \cdot \sin(\beta - \varepsilon),$$

$$AC = \frac{BC}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta,$$

$$AU = \frac{AC}{\sin \beta} \cdot \sin(\gamma + \varepsilon).$$

Utóbbi kettőből

$$AU = \frac{BC}{\sin \alpha} \cdot \sin(\gamma + \varepsilon).$$

Így $TB + TC = \frac{BC}{\sin 2\alpha} \cdot (\sin(\gamma - \alpha + \varepsilon) + \sin(\beta - \varepsilon))$, $AU = \frac{BC}{\sin \alpha} \cdot \sin(\gamma + \varepsilon)$.
Így elég belátni a feladat megoldásához, hogy

$$\frac{\sin(\gamma - \alpha + \varepsilon) + \sin(\beta - \varepsilon)}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin(\gamma + \varepsilon)}{\sin \alpha},$$

vagy ami ezzel ekvivalens, $\sin\alpha\,(\sin(\gamma-\alpha+\varepsilon)+\sin(\beta-\varepsilon)) = \sin 2\alpha \sin(\gamma+\varepsilon)$, ebből rendezéssel és BC-vel szorzással kijön az állítás. Ez pedig a két szinusz összegére vonatkozó azonosságból könnyen belátható:

$$\sin(\beta-\varepsilon)+\sin(\gamma-\alpha+\varepsilon) = 2\sin(90^\circ-\alpha)\cos(90^\circ-\gamma-\varepsilon) = 2\cos\alpha\sin(\gamma+\varepsilon)$$

(hiszen $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$), így

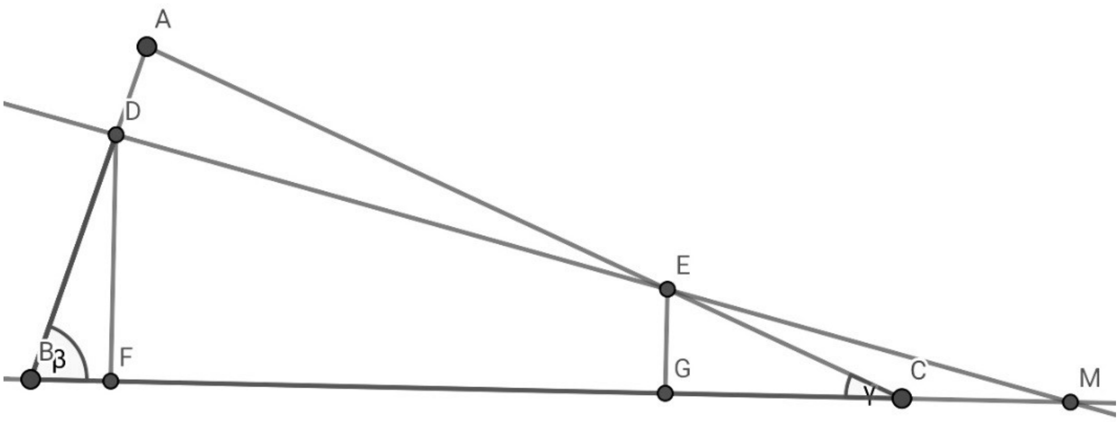
$$\sin\alpha(\sin(\gamma-\alpha+\varepsilon)+\sin(\beta-\varepsilon)) = 2\sin\alpha\cos\alpha\sin(\gamma+\varepsilon) = \sin 2\alpha\sin(\gamma+\varepsilon).$$

Ebből már következik a feladat állítása, melyet így beláttunk. ■

2. feladat (10.-es fazekasos geometriadolgozat feladata)
Az ABC háromszögben $AB < AC$. Az AB és AC oldalakon B-ből és C-ből az A csúcs felé felvesszük a BD és CE egyenlő szakaszokat. A BC és DE egyenesek metszéspontja M. Bizonyítsuk be, hogy $AB \cdot MD = AC \cdot ME$.

Megoldás.
Ez egy olyan feladat, ahol a megoldásban az új pont(ok) felvétele és a szinusztétel használata jól kombinálható. Legyen D, illetve E merőleges vetülete a BC egyenesen rendre F, illetve G. A DBF, illetve CEG háromszögek F-nél, illetve G-nél derékszögűek. $AB < AC$ miatt $\beta > \gamma$, így $\gamma < 90^\circ$, ezért $ECG\angle = ACB\angle = \gamma$, a CEG háromszögben $EG = EC \cdot \sin\gamma$. Ha β tompaszög, $DBF\angle = 180^\circ - \beta$, egyébként $DBF\angle = \beta$, mindkét esetben $\sin DBF\angle = \sin\beta$, így $DF = DB \cdot \sin\beta$. Ezekből

$$\frac{DF}{EG} = \frac{DB\cdot\sin\beta}{EC\cdot\sin\gamma} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$



2. ábra

Mivel az MGE és MFD háromszögek egymáshoz hasonlóak, $\frac{DF}{EG} = \frac{MD}{ME}$, így $\frac{MD}{ME} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$. Végül az ABC háromszögre alkalmazva a szinusztételt $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$. Összevetve $\frac{MD}{ME} = \frac{AC}{AB}$.

Felszorozva

$$AB \cdot MD = AC \cdot ME.$$

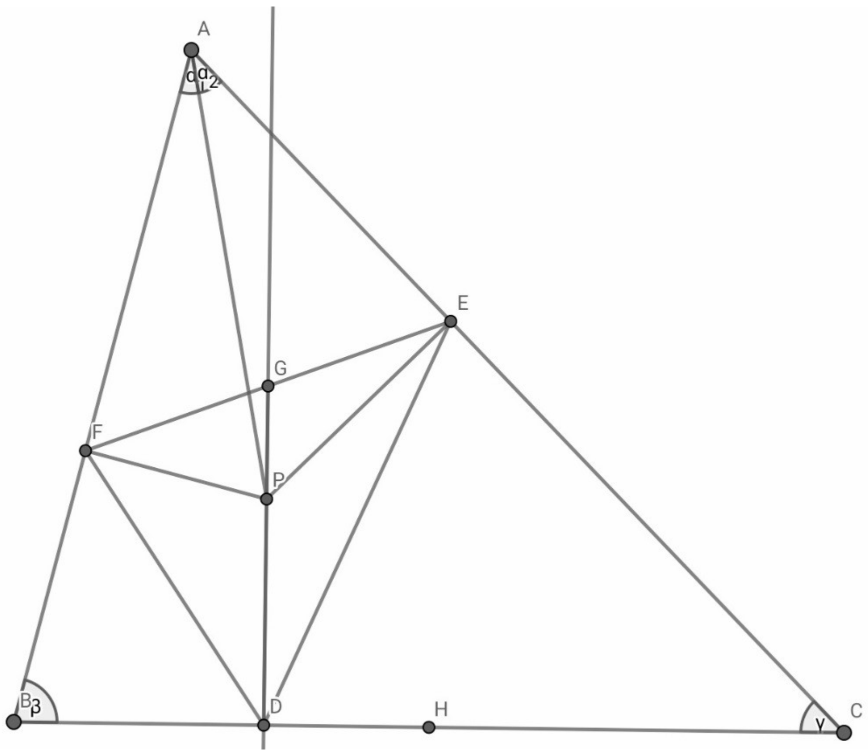
A feladat állítását bebizonyítottuk. ($AB < AC$ miatt M létezik és a BM szakasz belső pontja C.) ■

3. feladat (Kürschák 1999/2.)
Legyen adott a síkon egy háromszög. Szerkesszük meg a háromszög belsejében azt a P pontot, amelyikre igaz, hogy azt a háromszög oldalegyeneseire vetítve a vetületi pontok alkotta háromszög súlypontja éppen P.

Megoldás.
Ez a feladat megmutatja, hogy egyes szerkesztéses, illetve súlyvonalakról szóló feladatoknál is jól használható a szinusztétel.

A háromszög csúcsai legyenek A, B és C, az ott lévő belső szögek pedig rendre α, β és γ. Keressünk trigonometriai feltételeket a megfelelő P pontra. Legyen P merőleges vetülete rendre a BC, AC és AB oldalakra D, E és F. Legyen $BAP\angle = \alpha_1$ és $CAP\angle = \alpha_2$, az EF szakasz felezőpontja pedig G. Mivel az $AEPF$ négyszög húrnégyszög (két átellenes derékszöggel), $PFE\angle = PAE\angle = PAC\angle = \alpha_2$ és $PEF\angle = PAF\angle = PAB\angle = \alpha_1$. Mivel P súlypont a DEF háromszögben, P rajta van a DG súlyvonalon. $BDPF$ és $CDPE$ is húrnégyszögek, így $FPG\angle = \beta$ és $EPG\angle = \gamma$. Ekkor a két-két megismert belső szöggel rendelkező PFG és PEG háromszögekre alkalmazva a szinusztételt $\frac{PG}{FG} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta}$ és $\frac{PG}{EG} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma}$. Ebből $EG = FG$ és $\frac{PG}{FG} = \frac{PG}{EG}$ miatt $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma}$,

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$



3. ábra

Hasonlítsuk össze ezt azzal, hogy milyen trigonometriai feltétel van az ABC háromszög A-ból induló súlyvonalára. Legyen a BC szakasz felezőpontja H és $BAH\angle = \alpha_x$, $CAH\angle = \alpha_y$. Ekkor ismét a szinusztételt alkalmazva ezúttal a BAH és CAH háromszögekre, $\frac{AH}{BH} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha_x}$ és $\frac{AH}{CH} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_y}$, $\frac{AH}{BH} = \frac{AH}{CH}$ miatt $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha_x} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_y}$ és $\frac{\sin\alpha_x}{\sin\alpha_y} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

Láthatjuk, hogy a BAC szöget az AP egyenessel, illetve AH súlyvonallal felosztva a kapott szögeket ugyanazon sorrendben véve a szinuszok aránya egymás reciproka:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha_x}{\sin\alpha_y}}.$$

Ebből tudható, hogy ha P az AH súlyvonal BAC szög belső szögfelezőjére vett tükörképén, az A-ból induló szimmediánon van, akkor a szinuszok aránya megfelelő lesz, $\alpha_1 = \alpha_y$ és $\alpha_2 = \alpha_x$, amiből mellesleg visszafelé hasonlóan következik, hogy P rajta van a vele képzett DEF háromszög D-ből induló súlyvonalán (a DP egyenes felezi az EF szakaszt).
Hasonlóan belátható, hogy az EP, illetve FP egyenesek a P-ből képzett DF, illetve DE egyeneseket is akkor felezik, ha az ABC háromszög B-ből, illetve C-ből induló BP, illetve CP egyenesei a csúcsoknál lévő belső

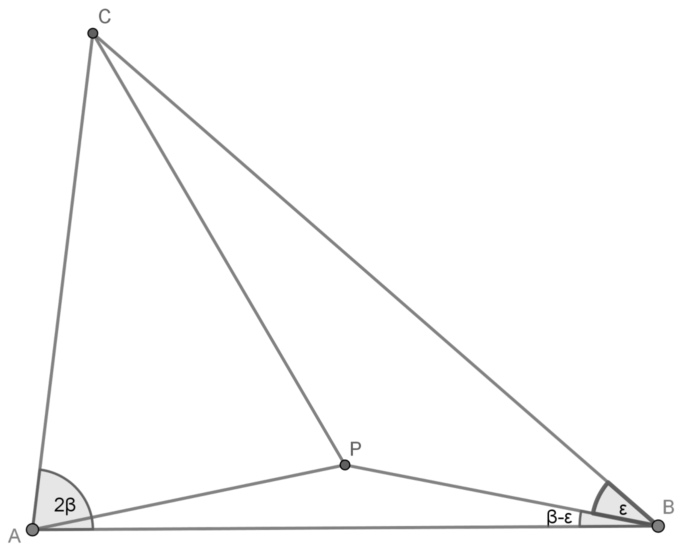
szögeket úgy osztják, hogy a keletkező szögek szinuszainak aránya ugyanaz, mint az e csúcsokból induló szimmediánokra.

Viszont az ABC háromszögnek legalább két belső szöge kisebb 90 foknál, ezekre az őt osztó egyenesek közül bármely kettőnek különböző a csúcsnál kapott két kisebb szög szinuszainak aránya, hiszen a metsző egyenest elforgatva az egyik szög nő, a másik csökken, és mivel e szögek, melyekre az egyenes a 90 foknál kisebb belső szöget osztja, legalább 0 fokosak és 90 foknál kisebbek, a növő szög szinusza is nő, a másiké csökken. Így van két olyan csúcs, amelyen átmenő egyenesek közül csak a szimmediánokén lehet rajta P. A 3 szimmedián viszont egy pontban metszi egymást, ez a Lemoine-Grebe pont, a súlypont izogonális konjugáltja (például trigonometrikus Ceva-tételből).

Ez alapján a szerkesztés egyszerű, bármely két szimmedián metszéspontjaként megkaphatjuk P-t, a Lemoine-Grebe pontot. Tehát megszerkesztjük a háromszögben két oldal felezőpontját, abból az azokon átmenő súlyvonalakat, melyeket a megfelelő csúcsok szögfelezőire tükrözve kapjuk a két szimmediánt, és metszéspontjukként P-t.

4. feladat (EGMO/IMO/MEMO 1. válogatóverseny 2019/3.)
Legyen az ABC háromszögben $CAB\angle = 2 \cdot ABC\angle$. Tegyük fel, hogy létezik egy P pont a háromszög belsejében, amelyre $AP = BP$ és $CP = AC$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $PBC\angle = 30°$.

Megoldás.
Jelöljük a B-nél lévő belső szöget β-val és a PBC szöget, melyről az állítás szól, ε-nal.



4. ábra

Számoljunk ki belőlük néhány másik szöget. Mivel P belső pont, $PBA\angle = ABC\angle - PBC\angle = \beta - \varepsilon$. Mivel az ABP háromszög egyenlő szárú, a $PAB\angle$ is $\beta - \varepsilon$. Emellett $CAB\angle = 2\beta$ és $CAP\angle = \beta + \varepsilon$, az egyenlő szárú APC háromszögben az $APC\angle$ is $\beta + \varepsilon$. Ezért az APC háromszög harmadik belső szöge $ACP\angle = 180° - 2\beta - 2\varepsilon$. Mivel az ABC háromszögben a B-nél, illetve A-nál lévő belső szögek β, illetve 2β, $ACB\angle = 180° - 3\beta$ és ebből $BCP\angle = ACB\angle - ACP\angle = 180° - 3\beta - (180° - 2\beta - 2\varepsilon) = 2\varepsilon - \beta$. $\beta > \varepsilon$ és $180° - 3\beta > 0$, így $60° > \varepsilon (> 0°)$.

Most, hogy kiszámoltuk a belső szögeket, jöhet a szinusztétel alkalmazása. A PBC háromszögre $\frac{PB}{PC} = \frac{\sin(2\varepsilon - \beta)}{\sin\varepsilon}$, a PAC háromszögre pedig $\frac{PA}{PC} = \frac{\sin(180° - 2\beta - 2\varepsilon)}{\sin(\beta + \varepsilon)}$. Mivel $AP = BP$, $\frac{PB}{PC} = \frac{PA}{PC}$, így

$$\frac{\sin(2\varepsilon - \beta)}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin(180° - 2\beta - 2\varepsilon)}{\sin(\beta + \varepsilon)}.$$

Mivel $\sin(180° - 2\beta - 2\varepsilon) = \sin(2\beta + 2\varepsilon) = 2\cos(\beta + \varepsilon)\sin(\beta + \varepsilon)$, ezért $\frac{\sin(180° - 2\beta - 2\varepsilon)}{\sin(\beta + \varepsilon)} = 2\cos(\beta + \varepsilon)$

(háromszög belső szögeként $\sin(\beta+\varepsilon) \neq 0$ és $\sin\varepsilon \neq 0)$. Felhasználva ezt $\frac{\sin(2\varepsilon-\beta)}{\sin\varepsilon} = 2\cos(\beta+\varepsilon)$ és $2\cos(\beta+\varepsilon)\sin\varepsilon = \sin(2\varepsilon-\beta)$. Addíciós tételekből

$$2\cos(\beta+\varepsilon)\sin\varepsilon = 2(\cos\beta\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon)\sin\varepsilon = 2\cos\beta\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2\sin\beta\sin^2\varepsilon,$$

míg

$$\sin(2\varepsilon-\beta) = \sin 2\varepsilon\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos 2\varepsilon = \sin 2\varepsilon\cos\beta - \sin\beta\cos 2\varepsilon =$$

$$= 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\beta - \left(\sin\beta\cos^2\varepsilon - \sin\beta\sin^2\varepsilon\right) = 2\cos\beta\sin\varepsilon\cos\varepsilon - \sin\beta\cos^2\varepsilon + \sin\beta\sin^2\varepsilon.$$

Ezek egyenlőségéből $2\cos\beta\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2\sin\beta\sin^2\varepsilon = 2\cos\beta\sin\varepsilon\cos\varepsilon - \sin\beta\cos^2\varepsilon + \sin\beta\sin^2\varepsilon$, így rendezve

$$\sin\beta\cos^2\varepsilon = 3\sin\beta\sin^2\varepsilon,$$

$\sin\beta \neq 0$-val leosztva $\cos^2\varepsilon = 3\sin^2\varepsilon$. Mivel $\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon = 1$, ezért ebből $\cos^2\varepsilon = \frac{3}{4}$, mivel $60° > \varepsilon > 0°$, ezért $\cos\varepsilon > 0$. Így $\cos\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és ebből ezen az intervallumon csak $\varepsilon = 30°$ lehet. Tehát $PBC\angle = 30°$, a feladat állítását beláttuk. ■

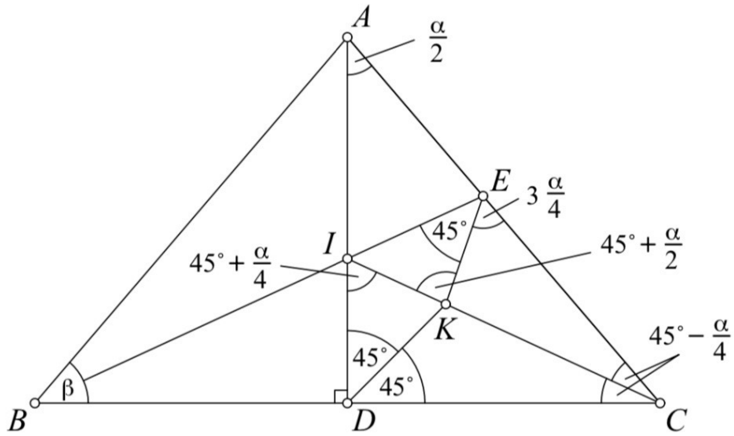
Végül nézzünk egy olyan feladatot, amely sok nehézséget okozott a 2009-es brémai Nemzetközi Matematikai Olimpia magyar csapatának, 21 pontot szereztek az elérhető 42-ből. (Azóta a 2010-es években nem volt ilyen nehéz „napi első” feladat a magyar csapatok teljesítménye – 2021-ben sajnos volt a magyar csapat által rosszabbul teljesített feladat –, illetve a világ olimpikonjainak átlagpontszáma alapján, utóbbi nem ment 3 alá a 2010-es évektől „napi első” feladatra.)

5. feladat (IMO 2009/4.)
Legyen az ABC háromszögben $AB = AC$. A $CAB\angle$ illetve $ABC\angle$ szögek szögfelezői a BC illetve CA oldalakat rendre a D illetve E pontokban metszik. Legyen K az ADC háromszög beírt körének a középpontja. Tegyük fel, hogy $BEK\angle = 45°$. Határozzuk meg a $CAB\angle$ összes lehetséges értékeit.

Megoldás (a Shortlist 2. megoldása alapján az ábráját felhasználva).
Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja, az AD és BE szakaszok metszéspontja, így $IEK\angle = BEK\angle = 45°$.
(A megoldás kulcsát az jelenti, hogy a feltételek alapján szögeket számolva a K pont $DCEI$ négyszögön belüli helyzete igen kötött, sok szöget kifejezünk egyből, a BAC szögből.)

A BAC szöget szokásosan α-val jelölve az ABC egyenlő szárú háromszög másik két belső szögének nagysága $90° - \frac{\alpha}{2}$. Az egyenlő szárú háromszögben AD magasság is, $BDA\angle = 90°$. Mivel K az ADC háromszög beírt körének középpontja, rajta van az ADC szög, illetve a DCA szög belső szögfelezőjén, utóbbi a CI egyenes.

Egyszerű szögszámolással elérhető az 5. ábra, illetve a K-nál lévő másik három szög nagysága is kiszámolható.



Most jöhet a szinusztétel alkalmazása, felírva az ICE, IEK, IDK, illetve IDC háromszögekre:

$$\frac{IC}{IE}=\frac{\sin\left(45^\circ+\frac{3}{4}\alpha\right)}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)},$$

$$\frac{IE}{IK}=\frac{\sin(45^\circ+\frac{\alpha}{2})}{\sin 45^\circ},$$

$$\frac{IK}{ID}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin(90^\circ-\frac{\alpha}{4})},$$

illetve

$$\frac{ID}{IC}=\frac{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin 90^\circ}.$$

Összeszorozva ezeket

$$1=\frac{\sin(45^\circ+\frac{3}{4}\alpha)\sin(45^\circ+\frac{\alpha}{2})}{\sin(90^\circ-\frac{\alpha}{4})}$$

($\sin 90^\circ=1$ miatt), így

$$\sin\left(45^\circ+\frac{3}{4}\alpha\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)=\cos\frac{\alpha}{4}=\cos\Big(\left(45^\circ+\frac{3}{4}\alpha\right)-\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\Big)=$$

$$=\cos\left(45^\circ+\frac{3}{4}\alpha\right)\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(45^\circ+\frac{3}{4}\alpha\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right),$$

tehát $\cos\left(45^\circ+\frac{3}{4}\alpha\right)\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)=0$. Ebből $\cos\left(45^\circ+\frac{3}{4}\alpha\right)=0$ vagy $\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)=0$, mindkét esetben $0^\circ<\alpha<180^\circ$ miatt csak 90° lehet a zárójelben, vagyis $45^\circ+\frac{3}{4}\alpha=90^\circ$ vagy $45^\circ+\frac{\alpha}{2}=90^\circ$, így $\alpha=60^\circ$ vagy $\alpha=90^\circ$. Jól láthatóan az ábrát megnézve ezekre mindkét esetben a $BEK\angle$ valóban 45 fokos, ezért a $CAB\angle$ összes lehetséges értékei 60° és 90°.

4 Feladatok gyakorlásra

Az itt következő feladatok jórészt nehezebbek az eddigieknél, de a szinusztétel megoldásukra jól alkalmazható. Természetesen más módszerekkel is megoldhatóak. (A 13. feladatnál az a) rész a szinusztétel segítségével bizonyítható, míg a b) rész, amelyből az a) rész készült, az a) rész segítségével már viszonylag könnyen (szinusztétel nélkül) belátható.)

1. feladat (szuper szakkörről)
Legyen P egy tetszőleges pont az adott ABC szabályos háromszög köréírt körén. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $PA^4+PB^4+PC^4$ értéke állandó.

2. feladat (OKTV 2004/05 III. kategória 1. forduló/1.)
Bizonyítsuk be, hogy egy $ABCD$ húrnégyszögben

$$\frac{AC}{BD}=\frac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA}.$$

3. feladat (Kürschák 1990/2.)
Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen K, a hozzáírt körök középpontjai A_0, B_0, C_0. Jelölje A_1 a BC oldal és a BKC szög felezőjének, B_1 az AC oldal és az AKC szög felezőjének, C_1 pedig az AB oldal és az AKB szög felezőjének a metszéspontját. Igazoljuk, hogy az A_0A_1, B_0B_1 és C_0C_1 egyenesek egy ponton mennek át.

4. feladat (OKTV 2020/21 III. kategória döntő/1.)
Az ABC háromszög beírt köre érintse a BC, CA, AB oldalt rendre az A_1, B_1, C_1 pontban. Az $A_1B_1C_1$ háromszög A_1-ből, B_1-ből, C_1-ből induló magasságának talppontja a szemközti oldalegyenesen legyen rendre A_2, B_2, C_2. Bizonyítsuk be, hogy az AA_2, BB_2, CC_2 egyenesek egy ponton haladnak át.

5. feladat (IMO 2003/4. általánosítása)
Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög. A D pontból a BC, CA és AB egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre P, Q, R. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor teljesül $PQ = QR$, ha az $ABC\angle$ és $ADC\angle$ szögek szögfelezőinek metszéspontja az AC egyenesen van.

6. feladat (Kvant)
Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen L, az AL, BL illetve CL szögfelezők A-n, B-n illetve C-n kívüli második metszéspontja az ABC háromszög körülírt körével rendre A_1, B_1 és C_1. Az ABC háromszög beírt körének sugara r, körülírt körének sugara R. Tetszőleges XYZ háromszög területét T_{XYZ}-vel jelöljük. Bizonyítsuk be, hogy

$$a)\frac{LA_1 \cdot LC_1}{LB} = R,$$

$$b)\frac{LA \cdot LC}{LB_1} = 2r,$$

$$c)\frac{T_{A_1B_1C_1}}{T_{ABC}} = \frac{2r}{R}.$$

7. feladat (Euler képlete)
Jelölje r egy tetszőleges háromszög beírt körének sugarát és R a körülírt körének sugarát. Bizonyítsuk be, hogy a két kör középpontjának távolsága $d = \sqrt{R^2 - 2rR}$.

8. feladat (IMO 2007 Shortlist G3)
Az $ABCD$ trapéz átlói a P pontban metszik egymást. A Q pont a BC és AD párhuzamos oldalegyenesek között úgy helyezkedik el, hogy $AQD\angle = CQB\angle$ és a CD egyenes elválasztja egymástól a P és Q pontokat. Bizonyítsuk be, hogy $BQP\angle = DAQ\angle$.

9. feladat (IMO 2019 Shortlist G2 – Surányi János emlékverseny 2020/1.)
Legyen ABC hegyesszögű háromszög, az A, B és C-ből induló magasságok talppontjai legyenek rendre D, E, F. Legyen k_b és k_c a BDF és CDE háromszögek beírt köre, ezek érintsék a DF és DE szakaszokat rendre az M és N pontokban. Az MN egyenesnek a k_b és k_c körökkel vett másik metszéspontja rendre P és Q. Igazoljuk, hogy $MP = NQ$.

10. feladat (IMO 2017 Shortlist G3 – Surányi János emlékverseny 2018/2.)
Az ABC hegyesszögű háromszög nem egyenlő szárú, a köré írt kör középpontja O, a magasságpont M. Az OA egyenes a BM és CM egyeneseket rendre a P és Q pontokban metszi. Igazoljuk, hogy a PQM háromszög köré írt kör középpontja rajta van az ABC háromszög A csúcsából induló súlyvonalán.

11. feladat (1. olimpiai válogatóverseny 2008/3.)
Legyen az ABC háromszög beírt körének BC-n lévő érintési pontja D. Igazoljuk, hogy az AD-re D-ben állított merőlegesnek a B, illetve C csúcsnál lévő belső szögfelező közti szakaszát D felezi.

12. feladat (IMO 2014/4.)
P és Q az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalszakaszán úgy helyezkednek el, hogy $PAB\angle = BCA\angle$ és $CAQ\angle = ABC\angle$. Az M illetve N pontok az AP illetve AQ egyenesen úgy helyezkednek el, hogy P az AM szakasz felezőpontja és Q az AN szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy a BM és CN egyenesek az ABC háromszög körülírt körén metszik egymást.

13. feladat
a) Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja, Γ pedig a háromszög körülírt köre. Az AI egyenes másik metszéspontja a Γ körrel legyen D. Legyenek E és K a BDC körív egy-egy pontja, F pedig a BC szakasz egy pontja, amelyekre teljesül, hogy $BAF\angle = BAK\angle = CAE\angle < \frac{1}{2}BAC\angle$. Legyen továbbá T az EI egyenes és a Γ kör E-től különböző második metszéspontja, H illetve X pedig a DT egyenes metszéspontja az AK, illetve AB egyenessel. Bizonyítsuk be, hogy az $IHFX$ négyszög paralelogramma.

b) (IMO 2010/2.) Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja, Γ pedig a háromszög körülírt köre. Az AI egyenes másik metszéspontja a Γ körrel legyen D. Legyen E a BDC körív egy pontja, F pedig a BC szakasz egy pontja, amelyekre teljesül $BAF\angle = CAE\angle < \frac{1}{2}BAC\angle$. Legyen továbbá G az IF szakasz felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy a DG és EI egyenesek a Γ körön metszik egymást.

14. feladat (IOM 2020/6.)
Tekintsünk egy $ABCDE$ konvex ötszöget. Legyen A_1, B_1, C_1, D_1, illetve E_1 rendre a BD és CE, CE és DA, DA és EB, EB és AC, illetve AC és BD átlók metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogyha az AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E és EA_1E_1A négyszögek közül négy húrnégyszög, akkor az ötödik is.

15. feladat (IMO 2001/5.)
Az ABC háromszögben legyen AP a $BAC\angle$ felezője, ahol P a BC oldalon van, BQ pedig az $ABC\angle$ felezője, ahol Q a CA oldalon van. Tudjuk, hogy $BAC\angle = 60°$ és hogy $AB + BP = AQ + QB$. Mik az ABC háromszög szögeinek lehetséges értékei?

16. feladat (IMO 2018/6.)
Az $ABCD$ konvex négyszögre teljesül $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Az X pont az $ABCD$ olyan belső pontja, amelyre teljesül $XAB\angle = XCD\angle$ és $XBC\angle = XDA\angle$. Bizonyítsuk be, hogy $BXA\angle + DXC\angle = 180°$.

5 Források

Az 59. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása, 2. rész, KöMaL, 2018. november.
Evan Chen: Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, MAA press, 2016.
1999. Jelentés a Kürschák József matematikai tanulóversenyről, KöMaL, 2000. február.
H. S. M. Coxeter-S. L. Greitzer: Az újra felfedezett geometria, Gondolat kiadó, Budapest, 1977.
Heinrich Dörrie: A diadalmas matematika, Gondolat kiadó, Budapest, 1965.
https://www.imo-official.org/problems.aspx.
https://www.imo-official.org/problems/IMO2007SL.pdf.
https://www.imo-official.org/problems/IMO2009SL.pdf.
https://www.imo-official.org/problems/IMO2014SL.pdf.
https://www.imo-official.org/problems/IMO2017SL.pdf.
https://www.imo-official.org/problems/IMO2019SL.pdf.
https://www.imo-official.org/results.aspx.
Kiss Márton: A Ceva-tétel trigonometrikus alakja és néhány alkalmazása, KöMaL, 2005. december.
http://megapolis.educom.ru/assets/media/iom-2020-math-solutions-day2-en.pdf.
A 2004-2005.évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny feladatai, KöMaL, 2005. november.
Reiman István-Dobos Sándor: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-2003, Typotex kiadó, Budapest, 2003.
Surányi János: 1990. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása, KöMaL, 1991. február.
Surányi László: A háromszög kevésbé ismert nevezetes pontjairól II. rész, KöMaL, 1984. november.