Bíró Bálint

Középponti szögek, kerületi szögek, látószögkörív

1. Bevezetés

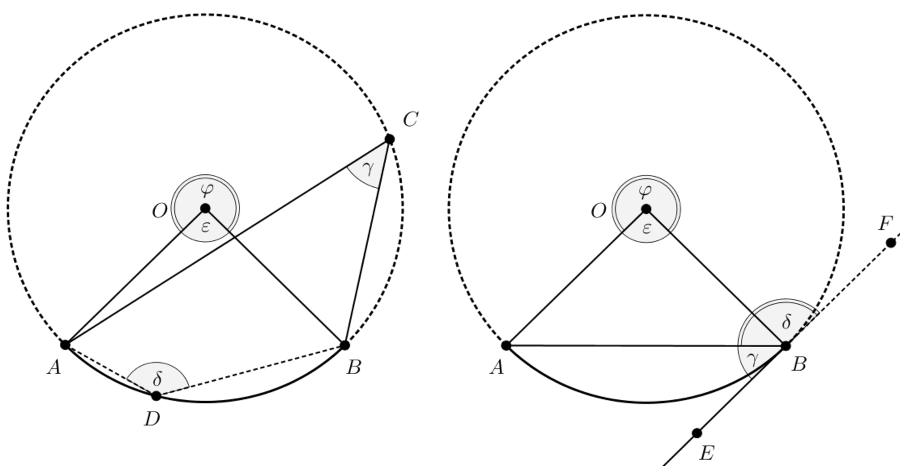
Ebben az írásban összefoglaljuk a középponti és kerületi szögekkel, a szakasz látószögével, a látószögkörívvel mint mértani hellyel, a mértani hely pontjainak megszerkesztésével kapcsolatos legfontosabb fogalmakat és tételeket. Az írás alapját *Hajós György: Bevezetés a geometriába* című egyetemi tankönyve adja. A leírt tételek bizonyítása megtalálható a könyvben, de több internetes oldal is tartalmazza azokat.

2. Középponti és kerületi és szögek

A körben *középponti szögnek* mondunk egy szögtartományt, ha a szög csúcsa a kör középpontja. Minden középponti szög a körnek egy ívét tartalmazza, és minden körívhez tartozik pontosan egy középponti szög.

A kör két közös végpontú húrja, vagy egy húr és a húr egyik végpontjába rajzolt érintője által alkotott konvex szöget *kerületi szögnek* nevezzük.

Az *1. ábrán* a kétféle kerületi szöget ábrázoljuk.



1. ábra

Mindkét körben az A és B pontok a körvonalat két ívre bontják. A két körív (az A és B pontok kivételével) teljes körré *egészíti ki* egymást. A két ívhez tartozik egy-egy középponti szög, ezek az első és a második körben is az ε-nal illetve φ-vel jelölt szögek.

Az első körben az AC és BC húrok által alkotott $ACB\sphericalangle = \gamma$ szög kerületi szög, erről azt mondjuk, hogy a szögtartományban levő, azaz a C pontot nem tartalmazó *AB köríven nyugszik.* Az első kör DA és DB húrjainak $BDA\sphericalangle = \delta$ szöge is kerületi szög, ez a D pontot nem tartalmazó, szaggatott vonallal rajzolt AB köríven nyugszik.

A másik fajta kerületi szöget, az ún. *érintőszárú kerületi szöget* az 1. ábra második köre szemlélteti. Itt a kerületi szög egyik szára a AB húr egyenese, a másik szára a B pontban a körhöz húzott érintő egyenese. Itt is az AB íven nyugvó kerületi szögekről beszélhetünk, az egyik az $ABE\sphericalangle = \gamma$ szög, amely a vastagon rajzolt ívhez, a másik az $FBA\sphericalangle = \delta$ szög, amely a szaggatottan rajzolt ívhez tartozik. Az ilyen típusú kerületi szögeket

érintőszárú kerületi szögeknek

nevezzük.

Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy a két körívhez tartozó középponti szögekre

$$\varepsilon + \varphi = 360^\circ. \tag{1}$$

Az ábra második körében megjelölt érintőszárú kerületi szögekre pedig

$$\gamma + \delta = 180^\circ \tag{2}$$

teljesül.

Könnyen belátható, hogy az (1) összefüggés bármely két olyan körívhez tartozó középponti szögre igaz, amelyek teljes körré egészítik ki egymást.

A következő pontban látni fogjuk, hogy a (2) összefüggés is bármely, egy körben megrajzolt $\widehat{AB}$ ívhez, és az őt teljes körré kiegészítő ívhez tartozó kerületi szögekre is érvényes, nem csak érintőszárú kerületi szögekre.

3. **A kerületi szögek és középponti szögek összefüggése, a kerületi szögek tétele**

A kör egy adott ívéhez tartozó kerületi szög kétszerese az ugyanazon íven nyugvó középponti szöggel egyenlő.

Ez az 1. ábra jelöléseivel mindkét körben azt jelenti, hogy

$$2\gamma = \varepsilon; \quad 2\delta = \varphi. \tag{3}$$

A (3) egyenlőségeket legkönnyebben az érintőszárú kerületi szögekre, és a nekik megfelelő középponti szögekre igazolhatjuk.[1]

A tételből következik, hogy a *húrnégyszögekben* a szemközti szögek összege 180°. A tétel következménye az is, hogy a (2) egyenlőség nem csak érintőszárú kerületi szögekre igaz, hiszen (1) minden megfelelő $\varepsilon; \varphi$ középponti szögpárra igaz, és így (3) miatt

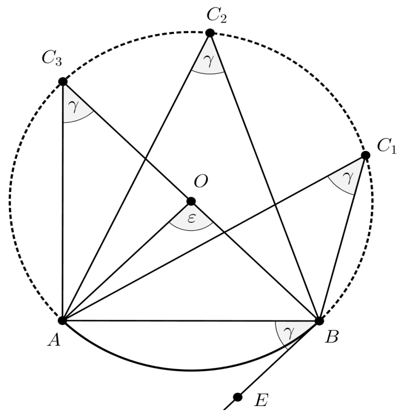
$$2\gamma + 2\delta = 360^\circ$$

is teljesül, amelyből (1) azonnal következik.

Az azonos íven nyugvó kerületi és középponti szögek fenti összefüggéséből adódik a kerületi szögek tétele:

egy kör azonos ívén nyugvó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.

[1] Aki a bizonyításra is kíváncsi, megtalálja Hajós György: Bevezetés a geometriába c. könyvében itt: ...



2. ábra

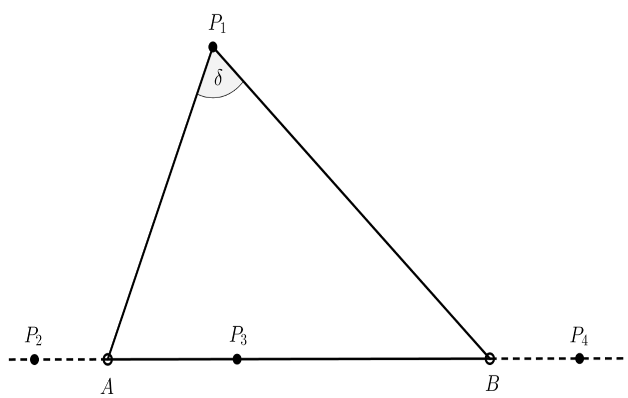
A *2. ábra* a vastagon megjelölt $\widehat{AB}$ íven nyugvó, különböző helyzetű szárakkal rendelkező kerületi szögeket mutat, de a kerületi szögek tétele a szaggatott íven nyugvó kerületi szögekre is fennáll.

Például, ha az $\widehat{AB}$ ívhez tartozó középponti szög nagysága 72°, akkor az ezen az íven nyugvó minden kerületi szög 36°-os, vagy ha a középponti szög 135°-os, akkor az ennek megfelelő kerületi szögek mindegyike $67,5°$-os.

Megjegyzendő, hogy a kerületi szögek tétele nem csak egy kör egy kiválasztott ívére igaz, hanem ugyanabban a körben bármely két egybevágó, tehát egyenlő hosszúságú ívre is.

4. **Szakasz látószöge**

Ha a P pont az AB szakasznak nem végpontja, akkor a konvex $APB\sphericalangle$ szögről azt mondjuk, hogy az AB szakasz a P pontból ekkora szögben látszik. Ezt az AB szakasz P pontból mért *látószögének* nevezzük. A szakaszt meghosszabbító két félegyenes belső pontjaiból a szakasz látószöge 0°-os, a szakasz belső pontjaiból pedig 180°-os (*3. ábra*).

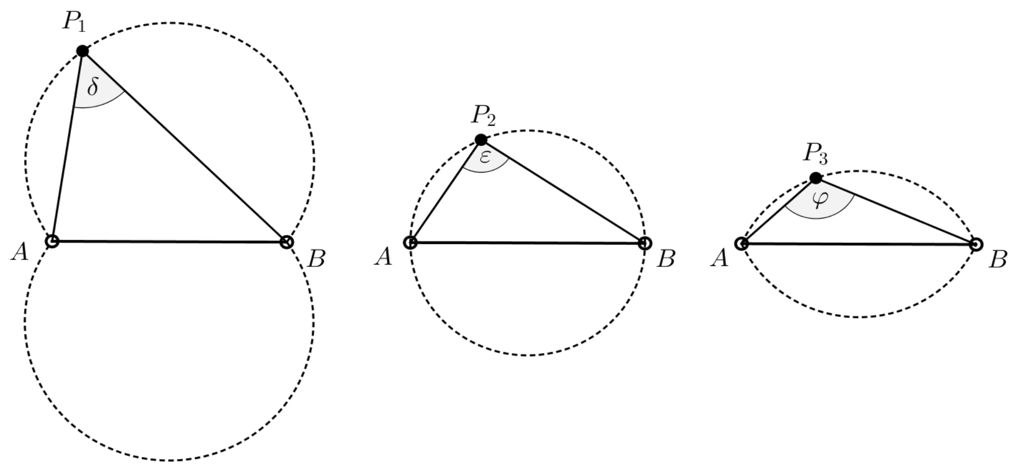


3. ábra

Eszerint $AP_1B\sphericalangle = \delta$, $AP_2B\sphericalangle = AP_4B\sphericalangle = 0°$ és $AP_3B\sphericalangle = 180°$.

5. **A látószögkörív, mint mértani hely**

A sík azon pontjainak mértani helye, amelyekből az AB szakasz megadott, 0° és 180° közötti szögben látszik, a szakasz végpontjait összekötő, a szakasz egyenesére szimmetrikus két körív. A mértani helyhez a körívek belső pontjai tartoznak, a szakasz végpontjai nem (*4. ábra*).



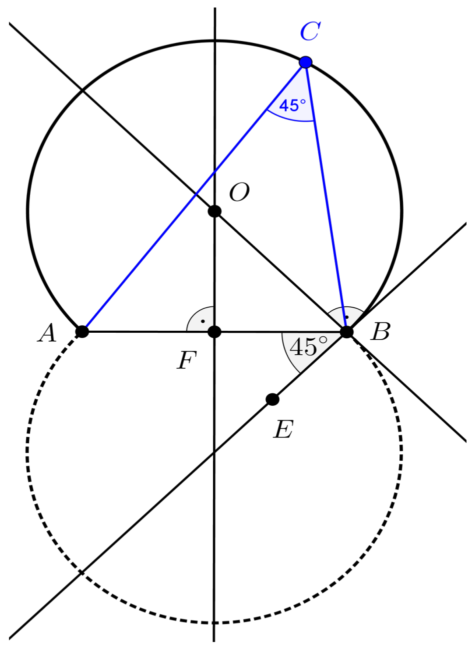
4. ábra

Az ábrán $AP_1B\sphericalangle = \delta$ hegyesszög, $AP_2B\sphericalangle = \varepsilon$ derékszög, ekkor AB közös átmérője a köríveknek, végül $AP_3B\sphericalangle = \varphi$ tompaszög.

Bizonyítható, hogy a körívek által határolt zárt síktartomány belső pontjaiból az AB szakasz a δ, ε, illetve φ szögeknél nagyobb szögben, a síktartományon kívüli pontokból pedig ezeknél kisebb szögben látszik.

6. **A látószögkörív szerkesztése**

Az előző pontban megismert látószögköríveket meg is szerkeszthetjük. Ha például azt keressük, hogy a síkon hol vannak azok a pontok, amelyekből az AB szakasz $45°$-os szögben látszik, akkor az *5. ábra* alapján járhatunk el.



5. ábra

Először megszerkesztjük az AB szakaszt $45°$-ban metsző BE egyenest. Erre a B pontban merőlegest állítunk, majd megszerkesztjük az AB szakasz felezőmerőlegesét. A két egyenes annak a körnek az O középpontjában metszi egymást, amelynek egyik húrja éppen AB. Az O középpontú, $OA = OB$ sugarú körnek az ábrán jelzett C pontjából az AB szakasz $45°$-os szögben látszik, hiszen BE a kör érintője, és így $ABE\sphericalangle = 45°$ érintőszárú kerületi szög.

Ebből pedig a kerületi szögek tétele alapján következik, hogy az ábra vastag vonallal rajzolt AB ívének minden pontjából (az A és B pontok kivételével) az AB szakasz $45°$-os szögben látszik. A körívnek az AB egyenesére való tükrözésével a mértani hely minden pontját előállítottuk.