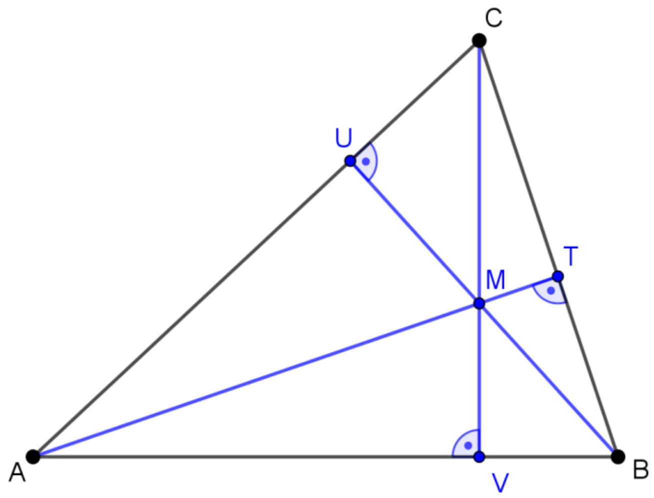
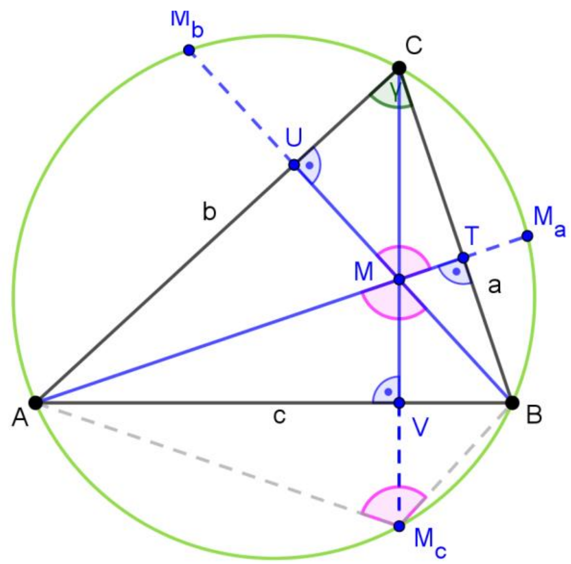
A síkbeli ortocentrikus pontnégyes



Ha tekintünk egy (az egyszerűség kedvéért: hegyesszögű) ABC háromszöget, megrajzoljuk magasságvonalait, metszéspontjukként megkapjuk az M magasságpontot, akkor észrevehetjük, hogy az $ABM\Delta$-nek C, a $BCM\Delta$-nek A és a $CAM\Delta$-nek B lesz a magasságpontja. (Ráadásul a magasságtalppontok (T, U, V) mind a négy háromszög esetén ugyanazok. Oldalak és magasságvonalak szerepet cserélnek.) Így megállapíthatjuk, hogy az A, B, C és M pontok egyenrangúak: közülük bármelyik három alkotta háromszögnek a kimaradó negyedik a magasságpontja. Ezért ezt a négy pontot *síkbeli ortocentrikus pontnégyes*nek nevezzük. (Kiindulhatunk tompaszögű háromszögből is, ugyanerre jutunk. Derékszögű háromszög esetén azonban a derékszögű csúcs egyúttal a háromszög magasságpontja is – hagyományos betűzés szerint $C \equiv M$ –, így egyrészt nem keletkezik négy pont, másrészt a másik három háromszög elfajuló, nem létezik. Így ezt az esetet kizárjuk a további tárgyalásból.)

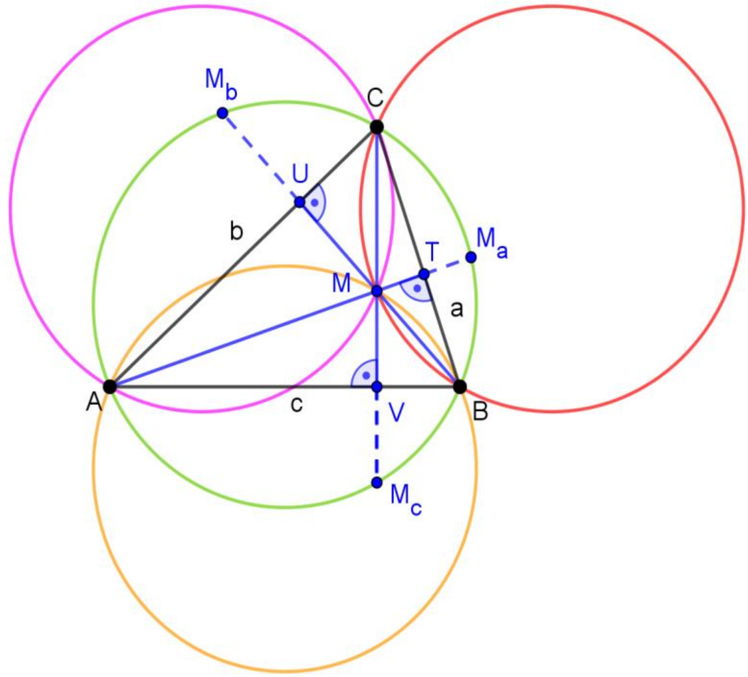
Sok érdekes tulajdonság és tétel állapítható meg, mondható ki ezen pontnégyes kapcsán, most ezekből szemezgetünk néhányat.

1. A magasságpont oldalakra való tengelyes tükörképei a háromszög körülírt körén vannak.



A bizonyítást a c oldal esetére írjuk fel, de analóg módon történik a másik kettő. A $CUMT$ négyszög húrnégyszög, mert két szemközti szöge (CUM és MTC) derékszög. Ezért $UMT\sphericalangle = 180°-\gamma$. Ekkor a vele csúcsszög $AMB\sphericalangle$ is ekkora. Ha M-et tükrözzük a c oldalra (vagy a V talppontra, ami ugyanazt eredményezi), akkor a szögtartás miatt a kapott $AM_cB\sphericalangle$ is $180°-\gamma$ lesz, így a CAM_cB négyszög két szemközti szöge kiegészítő, vagyis ez is húrnégyszög. Tehát M_c egy körön van az A, B, C pontokkal, vagyis az $ABC\Delta$ körülírt körén van.

2. Fordítva: ha az $ABC\Delta$ körülírt körét tengelyesen tükrözzük az oldalakra, a kapott tükörkép körök átmennek a háromszög M magasságpontján.



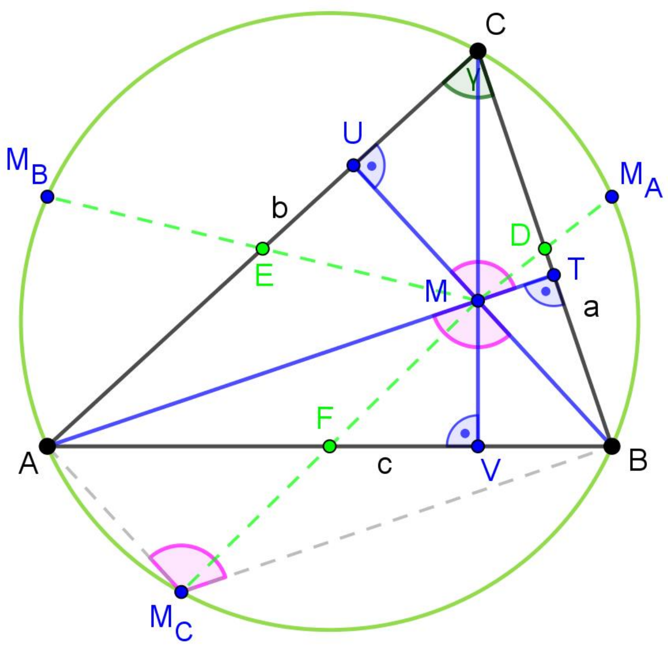
Ez az előző szakaszból azonnal következik: a körülírt körön lévő M_a, M_b, M_c pontokat a körrel együtt (vissza)tükrözve az oldalakra, e pontok képe az M pont, és az illeszkedéstartás miatt a kör tükörképei is átmennek ezen.

Ennek az állításnak inkább az a következménye igazán érdekes, hogy

3. az ortocentrikus pontnégyes négy különböző háromszögének körülírt köre mind azonos sugarú.

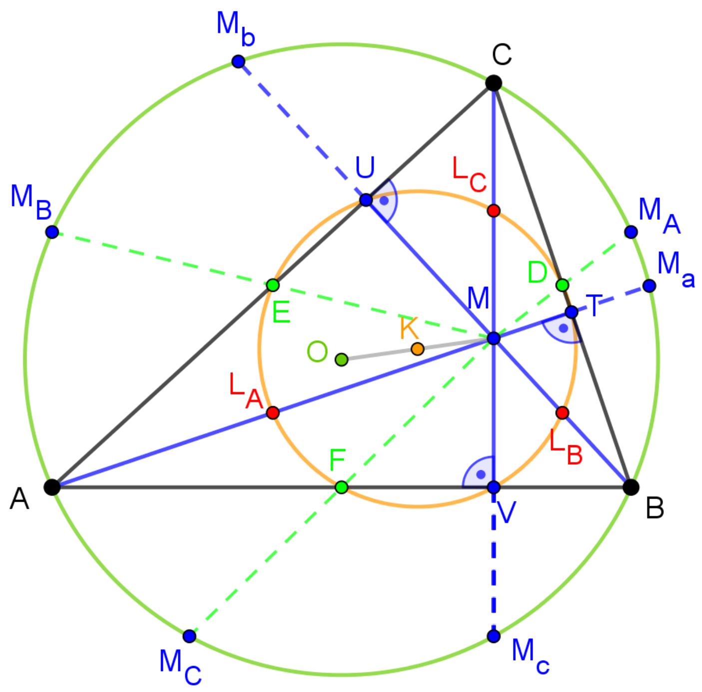
Mivel a „másik három” háromszög körülírt köre (az előző szakasz szerint) tengelyes tükrözéssel keletkezik az $ABC\Delta$ körülírt köréből, a távolságtartás miatt e sugarak egyenlők. (Persze a három tompaszögű háromszög körülírt körei közvetlenül is átvihetők egymásba, saját megfelelő oldalaikra – a hegyesszögű háromszög magasságvonalaira – való tengelyes tükrözéssel.)

4. A magasságpont oldalfelező pontokra való középpontos tükörképei is a háromszög körülírt körén vannak.



A bizonyítást megint a c oldal felezőpontjára (F) írjuk fel, de analóg módon történik a másik két eset. Az **1.** szakaszbeli bizonyítást onnan folytatjuk, hogy ha M-et tükrözzük az F pontra, akkor a szögtartás miatt a kapott $AM_CB\sphericalangle$ is $180°-\gamma$ lesz, így a CAM_CB négyszög két szemközti szöge kiegészítő, vagyis ez is húrnégyszög. Tehát M_C egy körön van az A, B, C pontokkal, vagyis az $ABC\Delta$ körülírt körén van.

5. Ha a háromszög körülírható körét a magasságpontjából 0,5 arányban lekicsinyítjük, akkor a kapott kör illeszkedni fog a három magasságtalppontra, a három oldalfelező pontra, és a csúcsok és magasságpont közti szakaszok felezőpontjaira.



Az **1.** szakasz szerint az M_a, M_b, M_c pontok (az M talppontokra való tükörképei) a körülírt körön vannak. Ezért ezek M centrumú, 0,5 arányú hasonlóság során épp a talppontokba (T, U, V) mennek át. Ugyanígy a **4.** szakasz szerint M_A, M_B, M_C pontok (az M oldalfelező pontokra való tükörképei) is a körülírt körön vannak. Ezért ezek M centrumú, 0,5 arányú hasonlóság során épp az oldalfelező pontokba (D, E, F) mennek át. Végül az A, B, C csúcsok természetesen a körülírt körön vannak – ezek M centrumú, 0,5 arányú hasonlóság során épp a csúcsok és a magasságpont közti szakaszok felezőpontjaiba (L_A, L_B, L_C) mennek át. Ekkor a körülírt kör, amely ezt a kilenc felsorolt eredeti pontot tartalmazta, a kicsinyítés során olyan körbe megy át, amely e pontok képeire illeszkedik.

Ezt a kört (mivel kilenc nevezetes pontot tartalmaz) nevezzük a háromszög *kilenc pont köré*nek. A származtatása miatt sugara fele a körülírható körének, középpontja (K) pedig az MO szakasz felezőpontja (ahol O a körülírt kör középpontja). (A kicsinyítés animációban is megtekinthető itt.)

A kilenc pont köréről önmagában igen sok érdekesség tudható, ezekből csak néhányról ejtünk itt szót. Például:

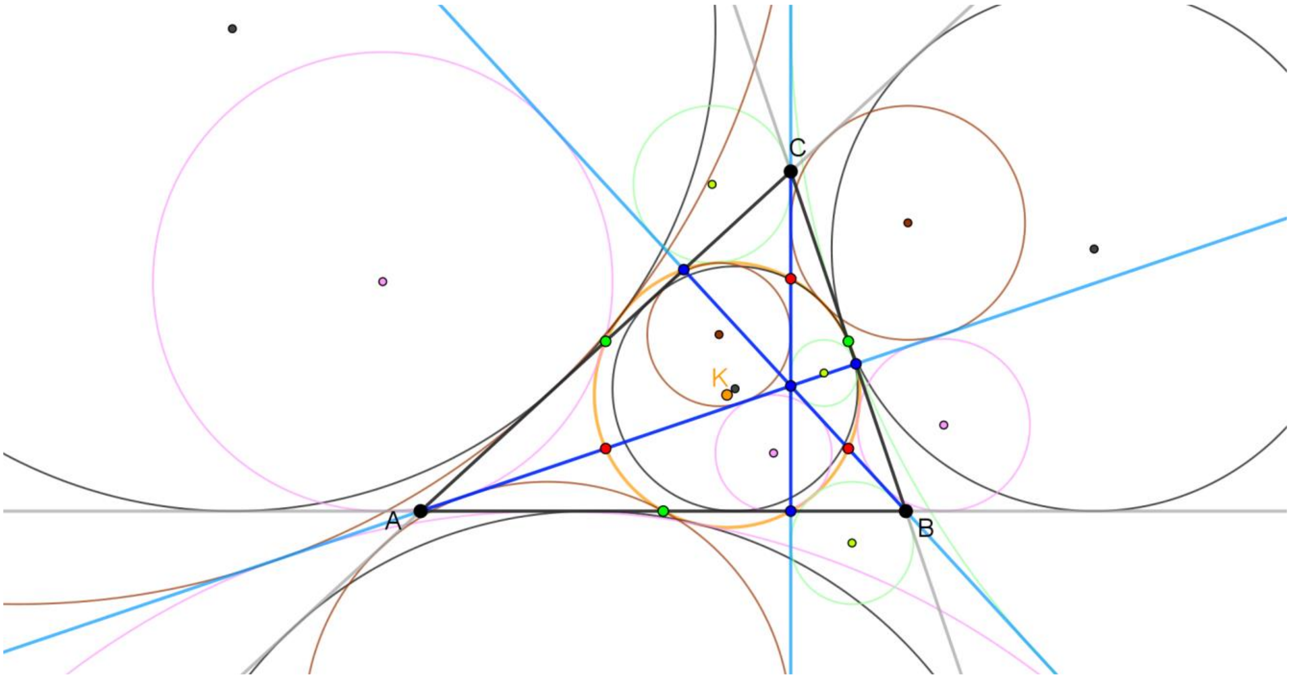
6. az ortocentrikus pontnégyes négy különböző háromszögének kilenc pont köre azonos, ugyanaz a kör.

Ez következik abból, hogy egy kört három pontja már meghatároz, és e négy háromszögben (mint a bevezetőben láttuk) a magasságtalppontok azonosak. Az „oldalfelező pont” és a „csúcs és magasságpont közti felezőpont” funkció a másik hat pont között cserélődik, ha a négy különböző háromszöget tekintjük.

A kilenc pont körét szokás Feuerbach-körnek is nevezni, az alábbi (Karl Feuerbach XIX. századi német matematikus által bebizonyított) tétel miatt:

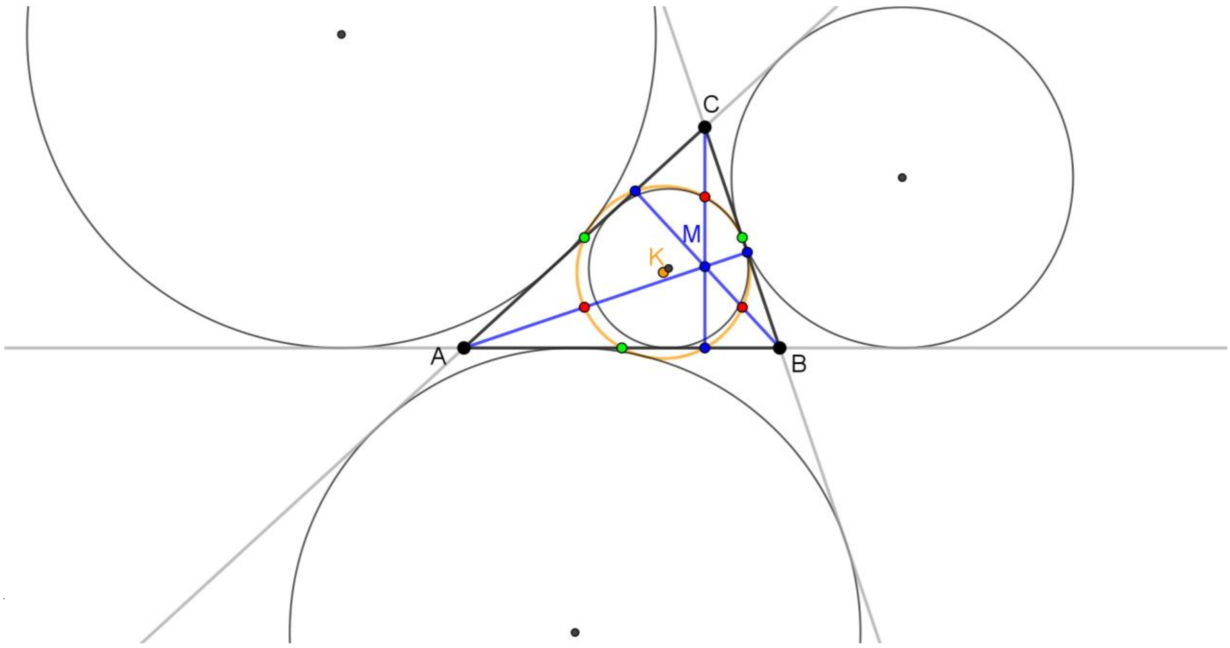
7. A háromszög kilenc pont köre érinti a háromszög beírható körét és három hozzáírható körét.

A tétel bizonyítása meghaladja ezen cikk kereteit, így ezzel itt nem foglalkozunk. A tétel azon következményét emeljük ki, hogy mivel az ortocentrikus pontnégyes mind a négy háromszögének azonos a kilenc pont köre (**6.** szakasz), az állítás mind a négy háromszögre teljesül. Viszont e háromszögek beírt körei és hozzáírt körei mind különbözők, így ez a közös kilenc pont köre 16 (!) nevezetes kört érint egyazon ábrában!

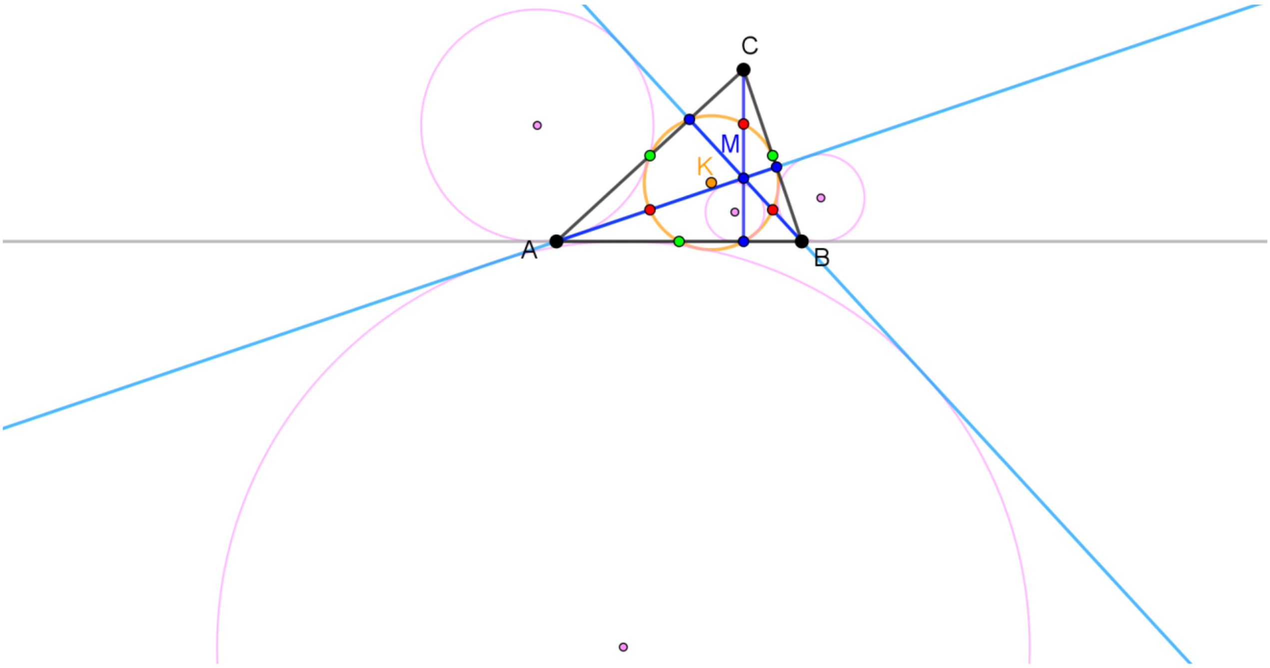


Ez így természetesen elég áttekinthetetlen, nézzük meg a négy háromszög köreit külön-külön.

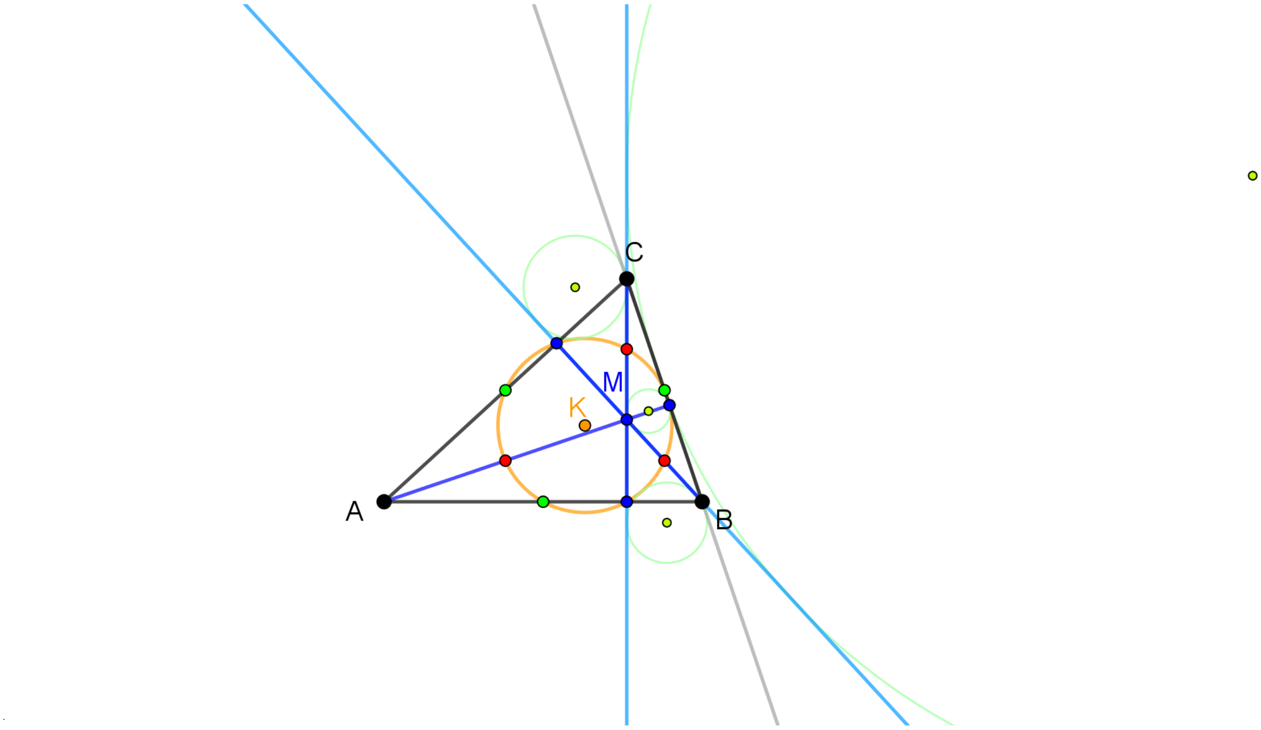
Az *ABC*Δ:



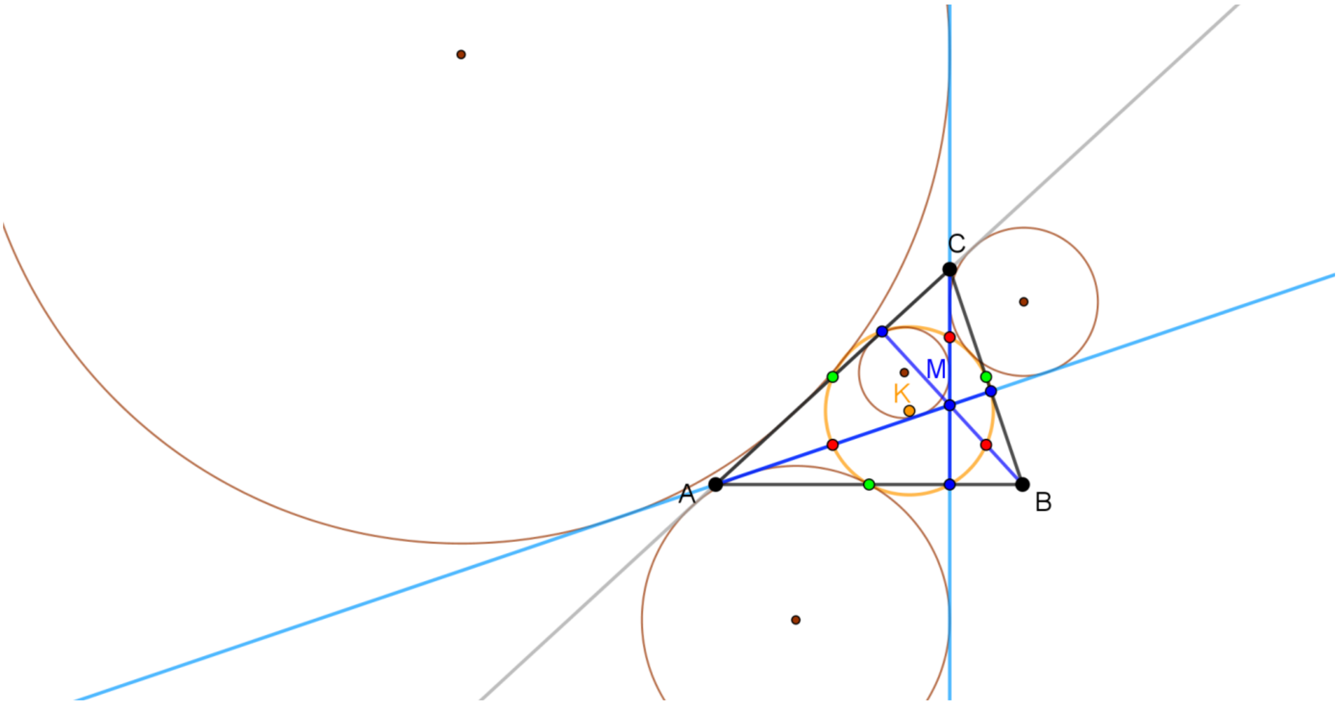
Az $ABM\Delta$:



A $BCM\Delta$:



A $CAM\Delta$:



Siposs András
(ELTE Apáczai Csere János Gimnázium)