

# Az asszociativitás geometriájáról

*Jenei Sándor*

*Pécsi Tudományegyetem*

*Matematikai és Informatikai Intézet*

---



## *Alapfogalmak*

Egy  $\bullet$  művelet az  $X$  halmazon egy olyan függvény, amely  $X$ -beli rendezett párokhoz rendel egy  $X$ -beli elemet.

## *Alapfogalmak*

Egy  $\bullet$  művelet az  $X$  halmazon egy olyan függvény, amely  $X$ -beli rendezett párokhoz rendel egy  $X$ -beli elemet.

A  $\bullet$  műveletre azt mondjuk, hogy **kommutatív**, ha minden  $x, y$   $X$ -beli elem esetén

$$x \bullet y = y \bullet x$$

# *Alapfogalmak*

Egy  $\bullet$  művelet az  $X$  halmazon egy olyan függvény, amely  $X$ -beli rendezett párokhoz rendel egy  $X$ -beli elemet.

A  $\bullet$  műveletre azt mondjuk, hogy **kommutatív**, ha minden  $x, y$   $X$ -beli elem esetén

$$x \bullet y = y \bullet x$$

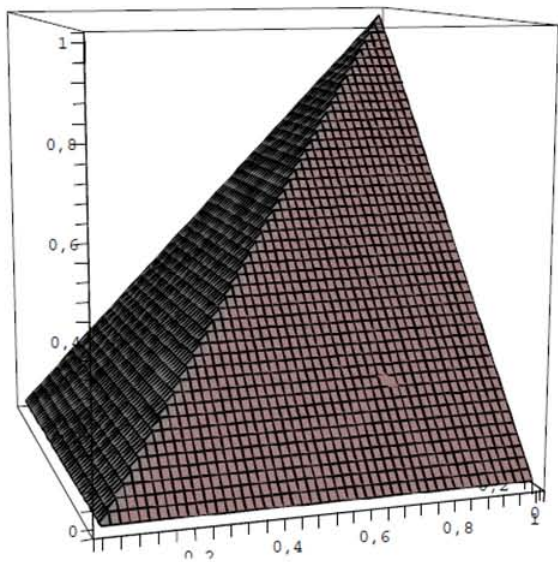
A  $\bullet$  műveletre azt mondjuk, hogy **asszociatív**, ha minden  $x, y, z$   $X$ -beli elem esetén

$$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$$

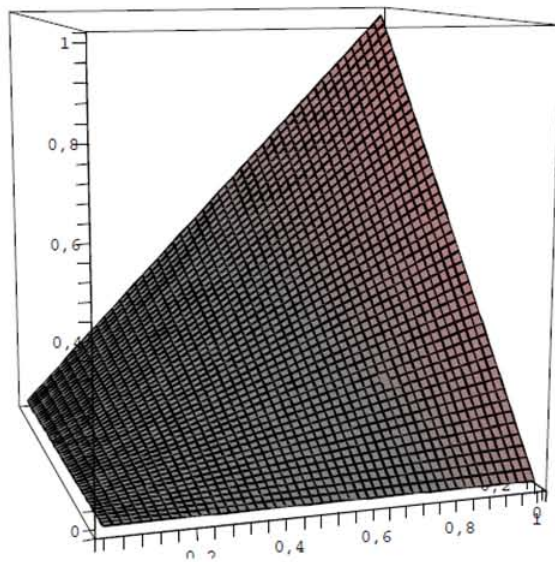
- [1] N. H. Abel, *Untersuchungen der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen  $x$  und  $y$  wie  $f(x, y)$ , welche die Eigenschaft haben, dass  $f(z, f(x, y))$  eine symmetrische Function von  $x, y$  und  $z$  ist*, J. Reine Angew. Math. 1 (1826), 11–15. Oeuvres Complètes de N.H. Abel, Vol. 1, Christiana, 1881, 61–65.

*A • művelet grafikonja:*

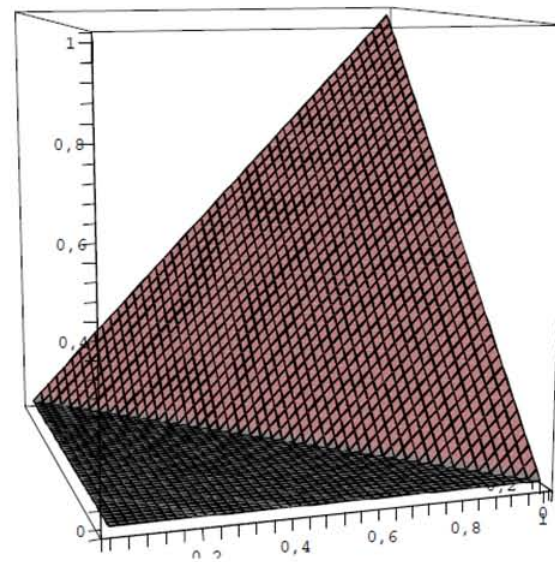
$$(x, y, x \bullet y)$$



$\min(x,y)$



$xy$



$\max(x+y-1,0)$

*A • művelet négydimenziós grafikonja:*

$$(x, y, z, (x \cdot y) \cdot z)$$



*Mit tehetünk három dimenzióban?*

Trükk:

Minden  $x, y, z$  esetén

$$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$$

## *Mit tehetünk három dimenzióban?*

Trükk:

Minden  $x, y, z$  esetén

$$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$$

Minden  $x, y, z, c$  esetén

$$(x \bullet y) \bullet z \leq c \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad x \bullet (y \bullet z) \leq c$$

# *Háromdimenziós jellemzés*

Trükk:

Minden  $x, y, z$  esetén

$$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$$

Minden  $x, y, z, c$  esetén

$$(x \bullet y) \bullet z \leq c \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad x \bullet (y \bullet z) \leq c$$

Minden  $x, y, z, c$  esetén

$$x \bullet y \leq c/z \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad y \bullet z \leq c/x$$

## *Reziduált műveletek*

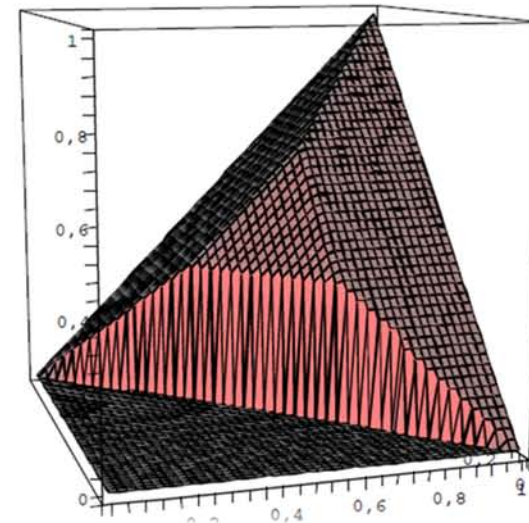
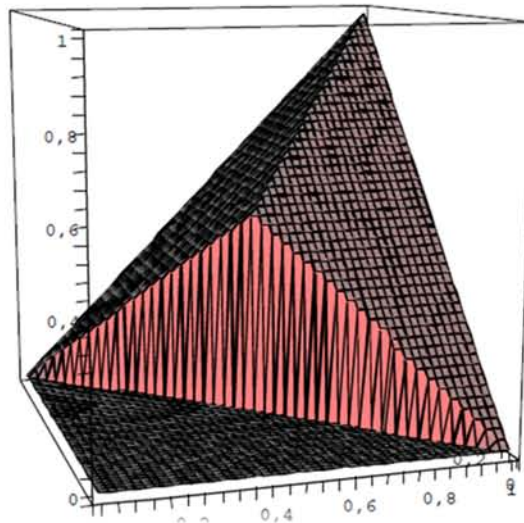
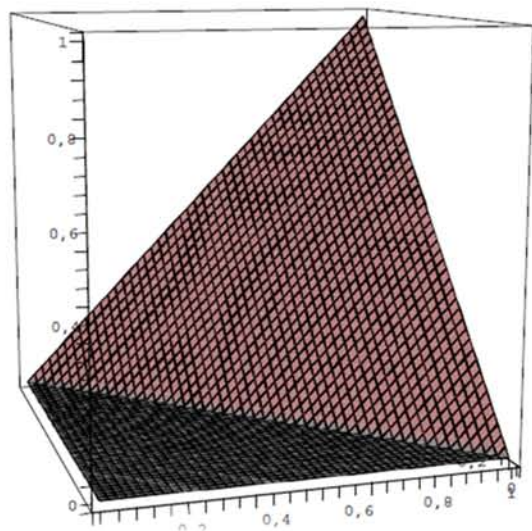
Tegyük fel, hogy minden  $x, y$  esetén a

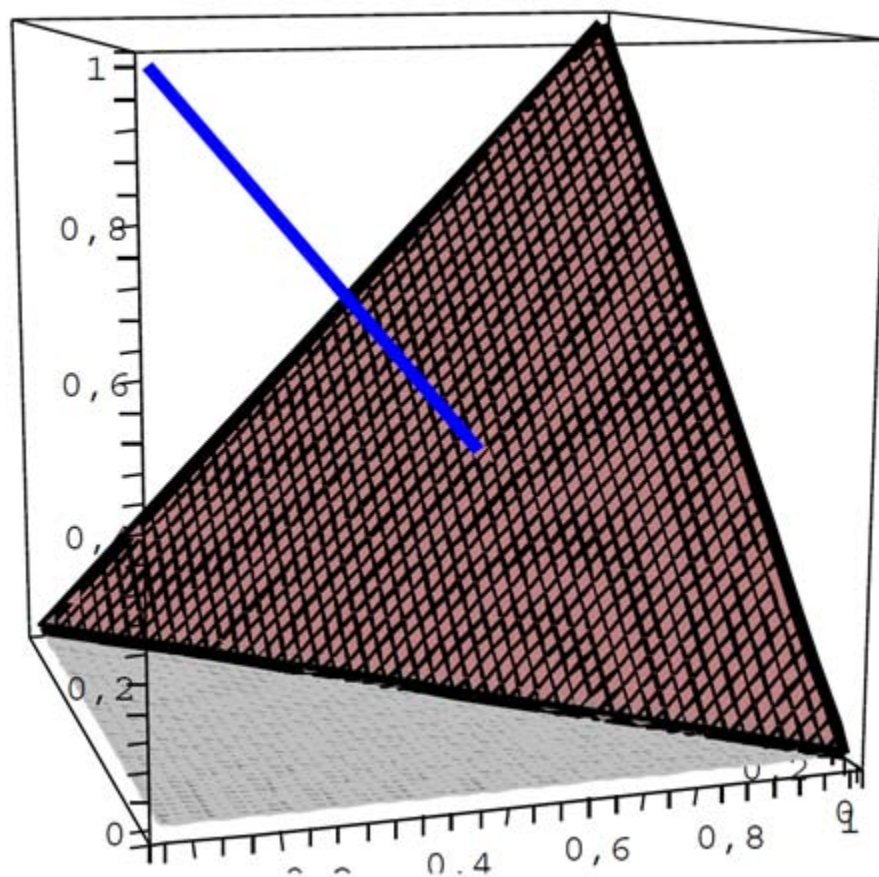
$$\{z \mid x \bullet z \leq y\}$$

halmaznak van legnagyobb eleme. Ekkor legyen

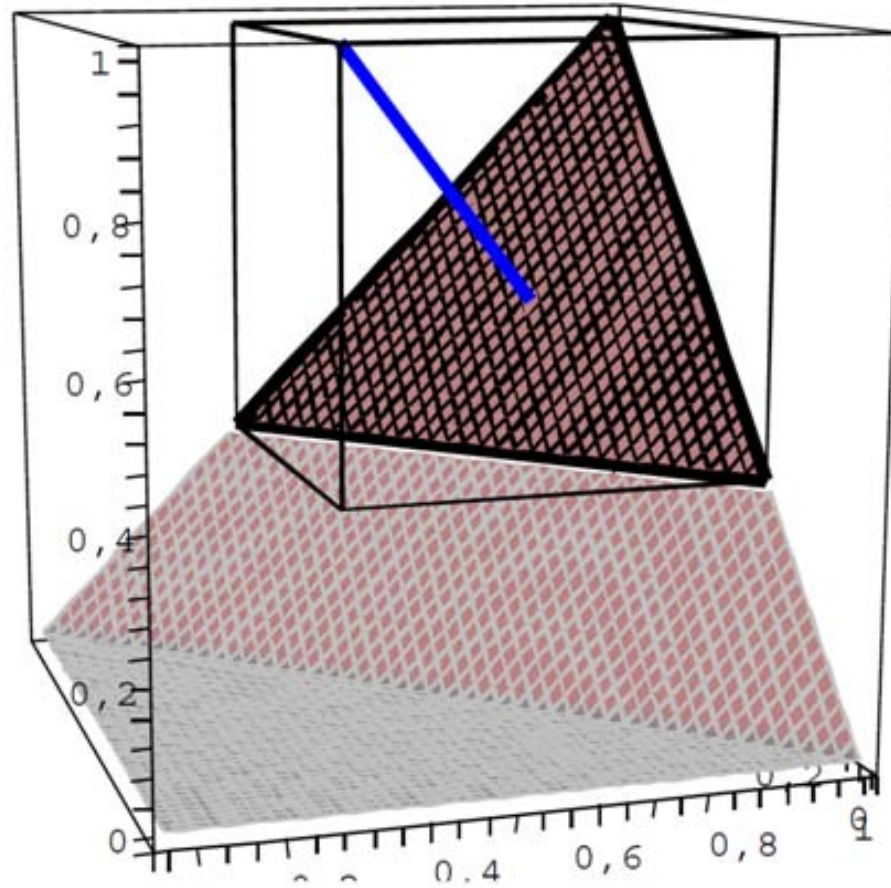
$y/x$  ez a legnagyobb elem.

*Az „egyenes vágás” esete:*





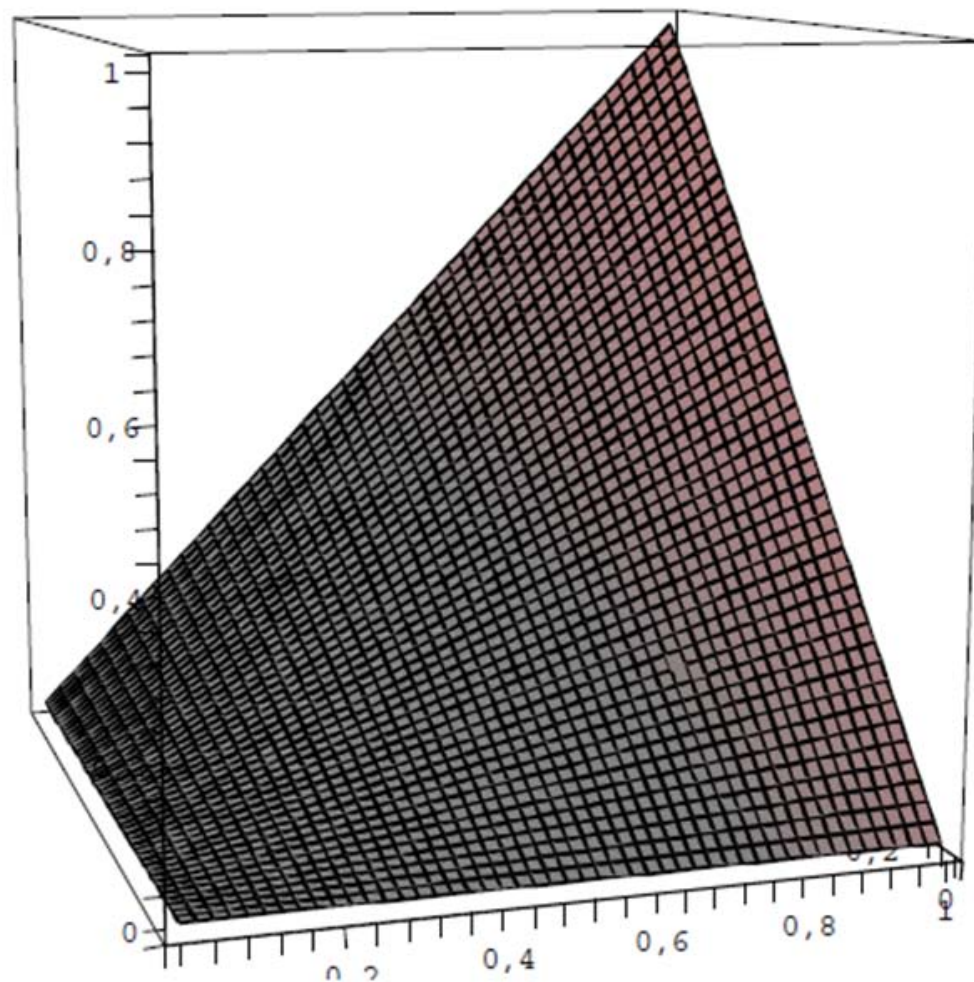
$x \bullet y \leq 0/z$  pontosan akkor, ha  $y \bullet z \leq 0/x$



$$x \cdot y \leq 0.33/z \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad y \cdot z \leq 0.33/x$$

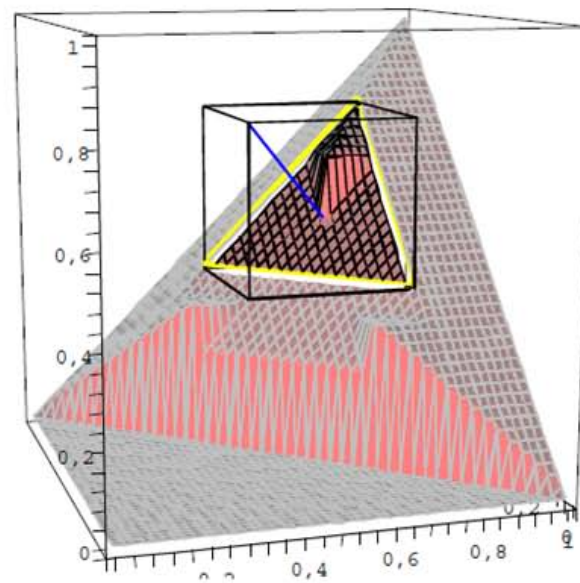
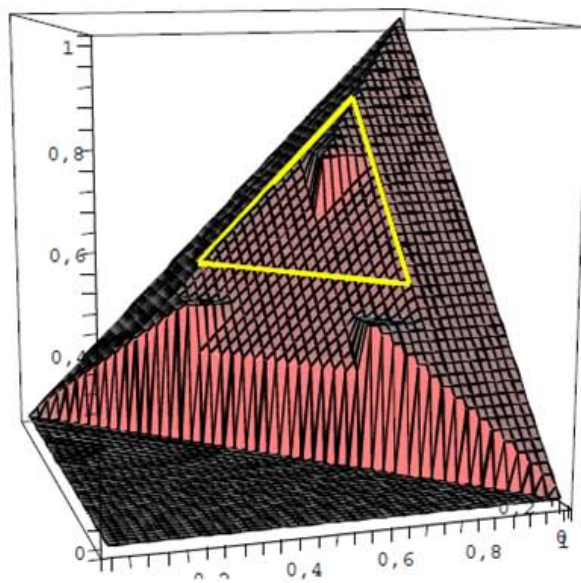
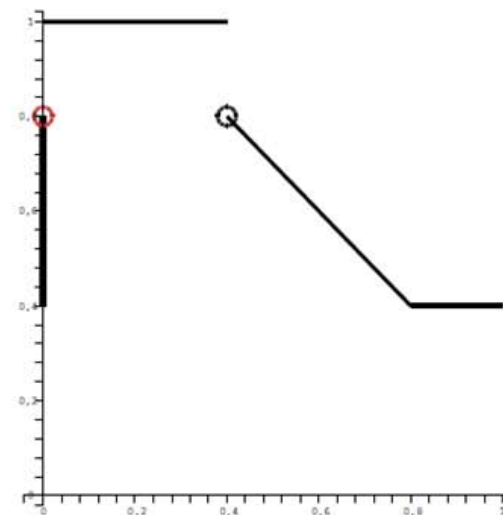
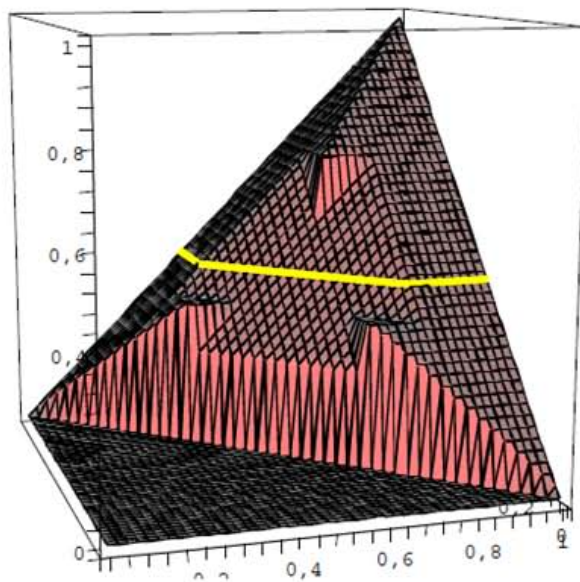
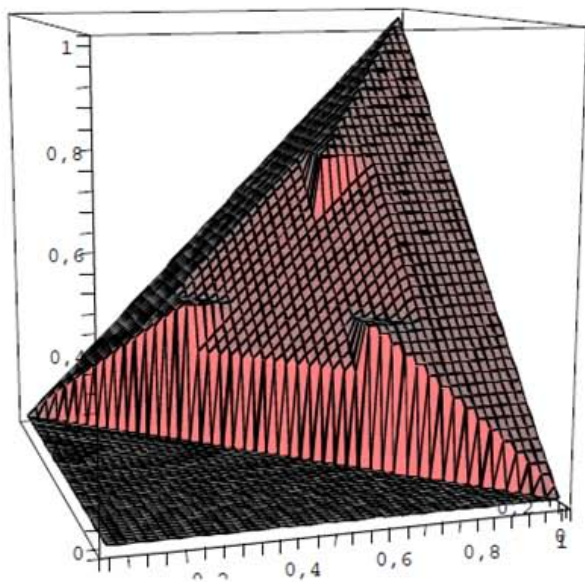


*A „folytonos görbe” vágás esete:*

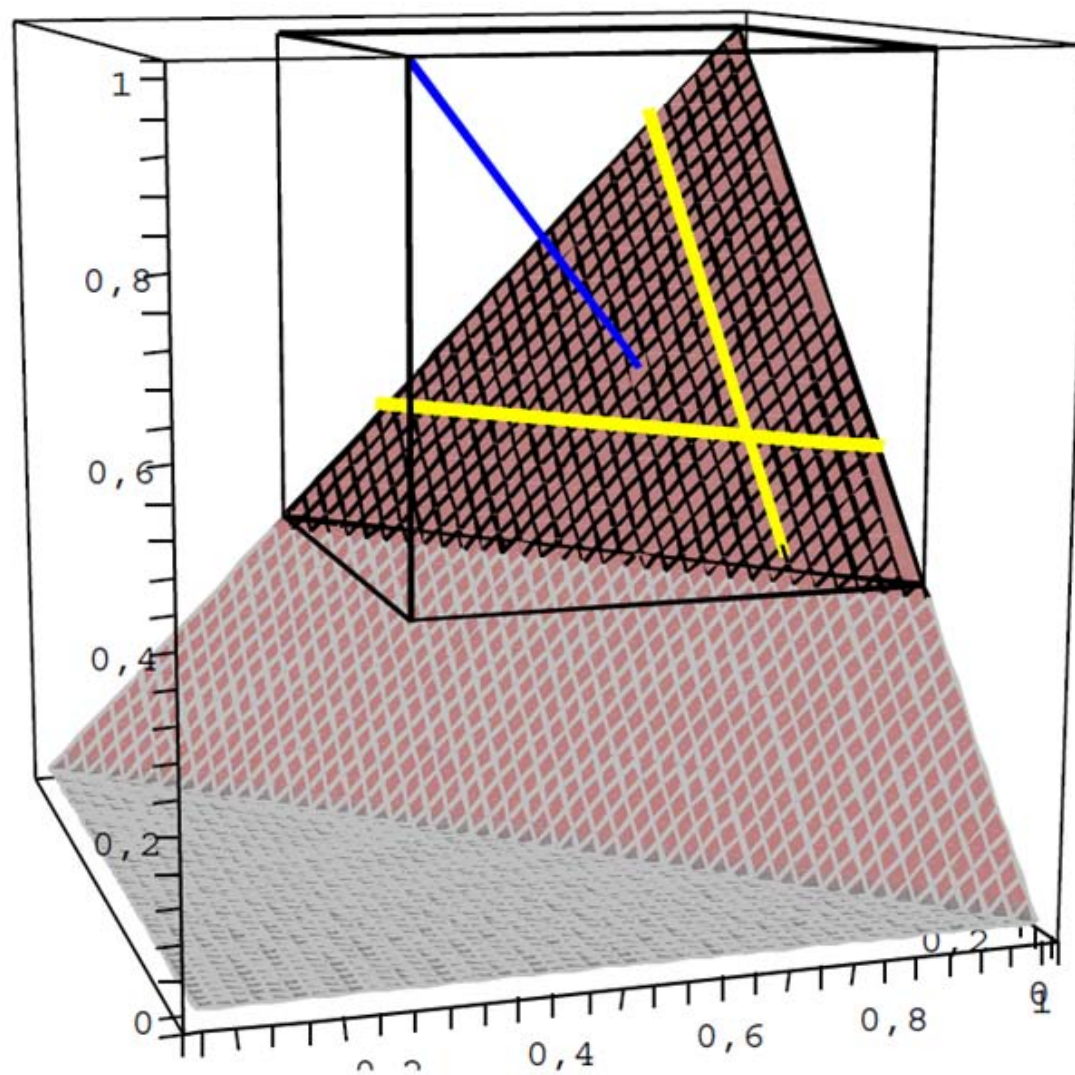




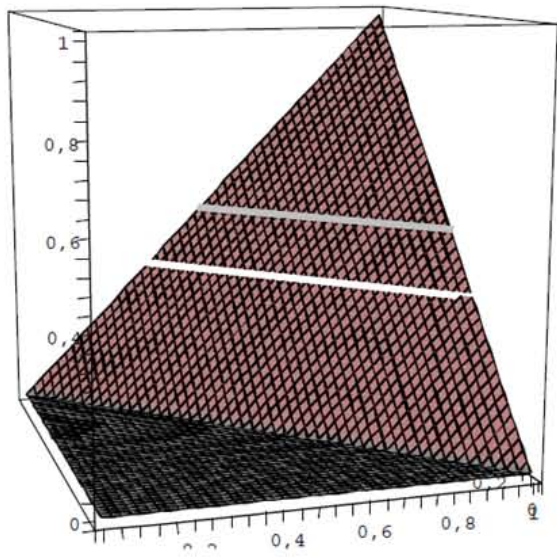
*A „szaggatott görbe” vágás esete:*



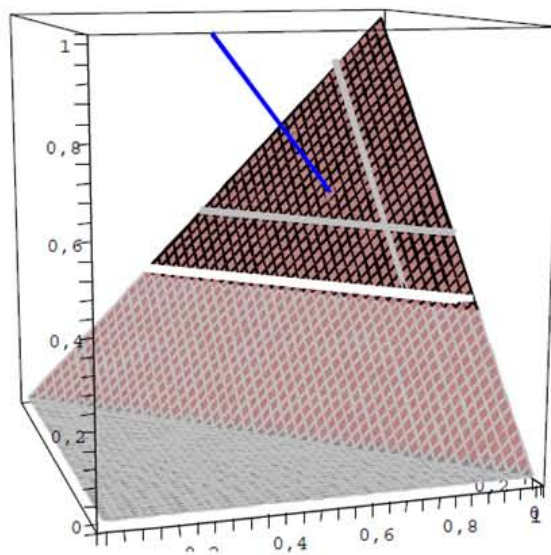
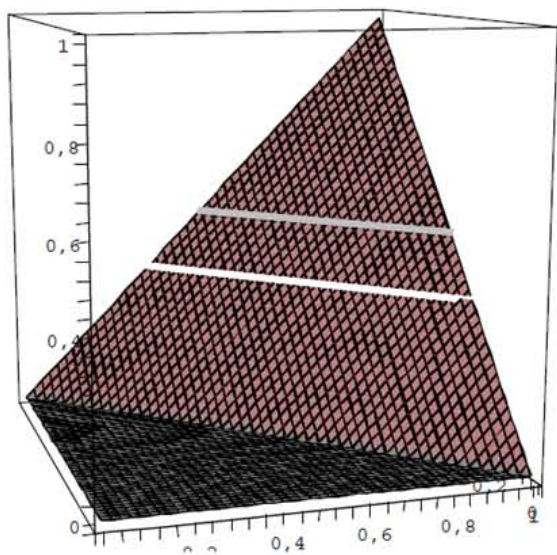
# *Alkalmazások az algebrában*



# *Alkalmazások az algebrában*

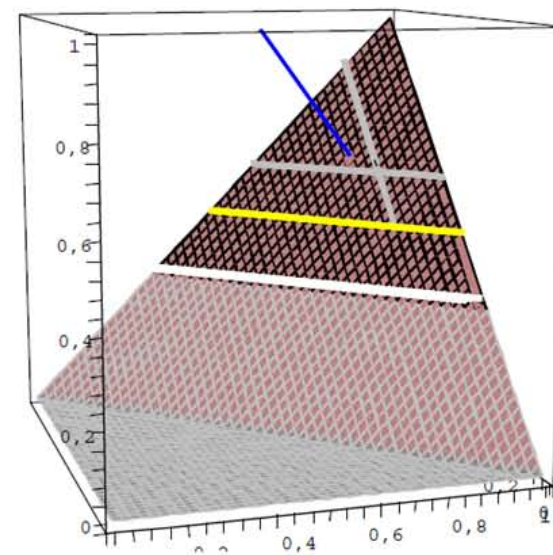
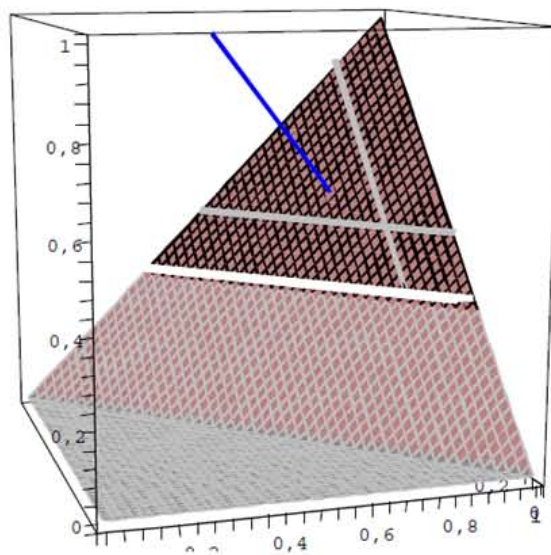
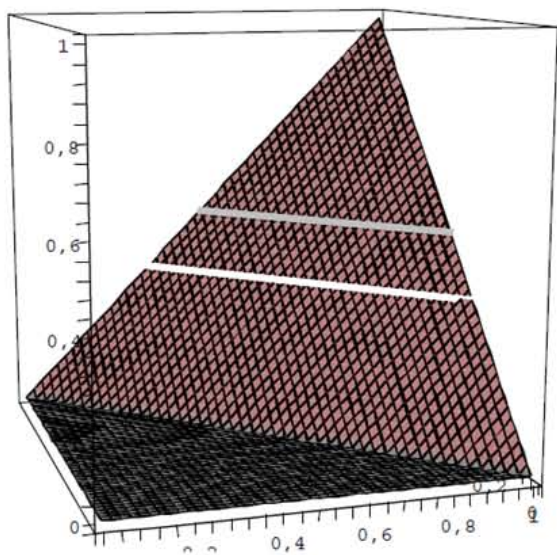


# *Alkalmazások az algebrában*

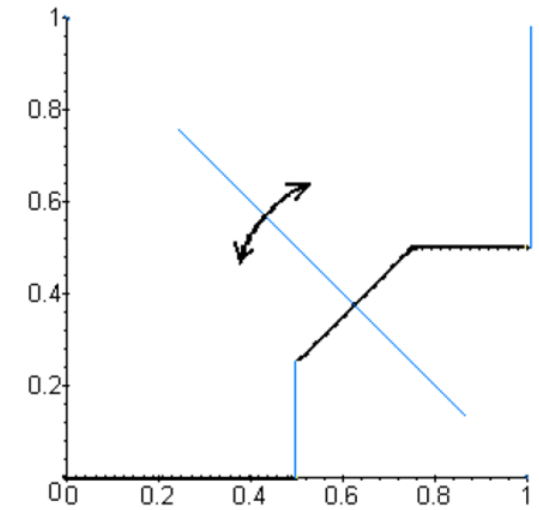
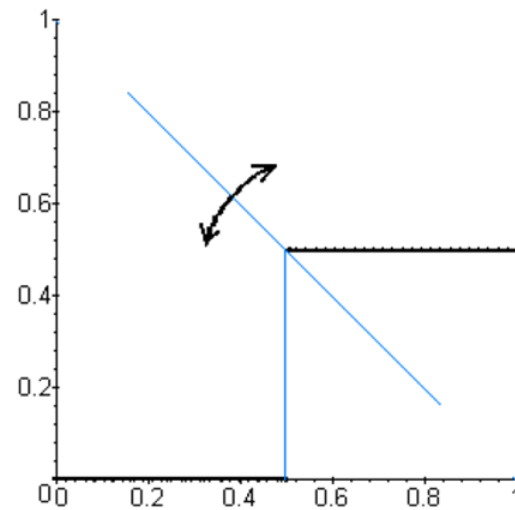
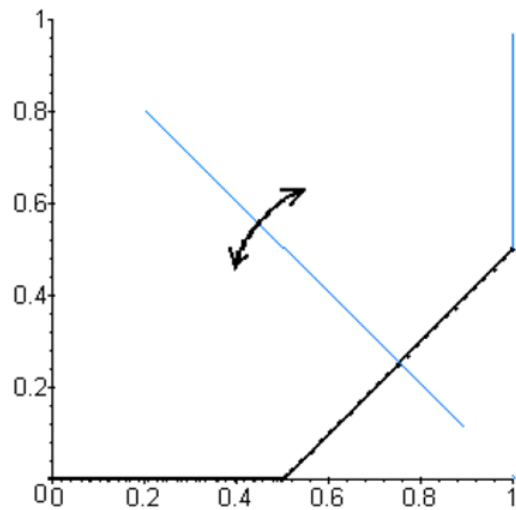
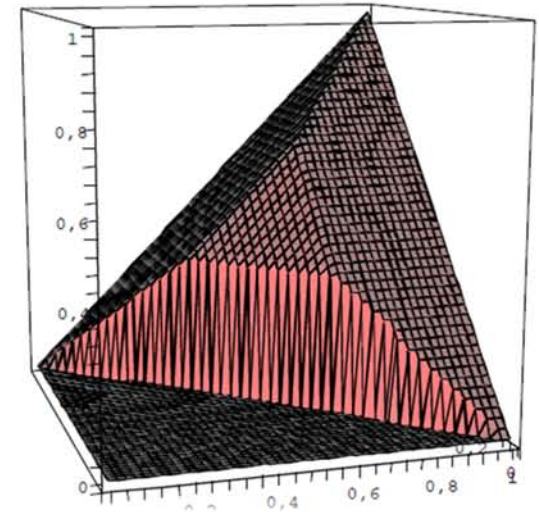
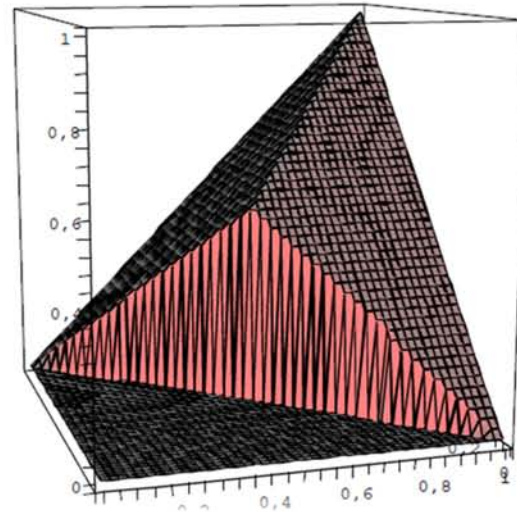
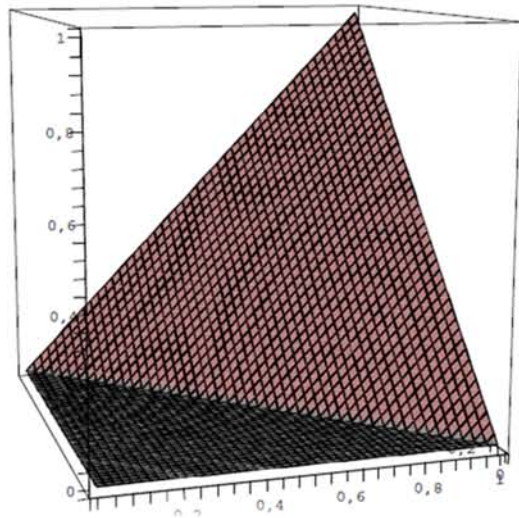


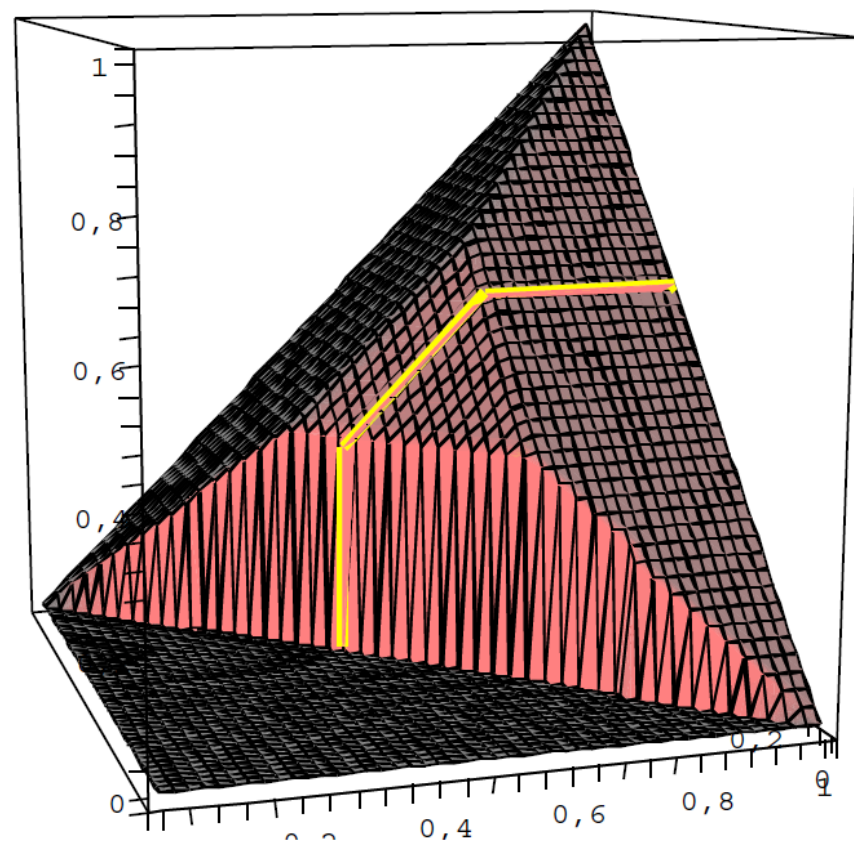
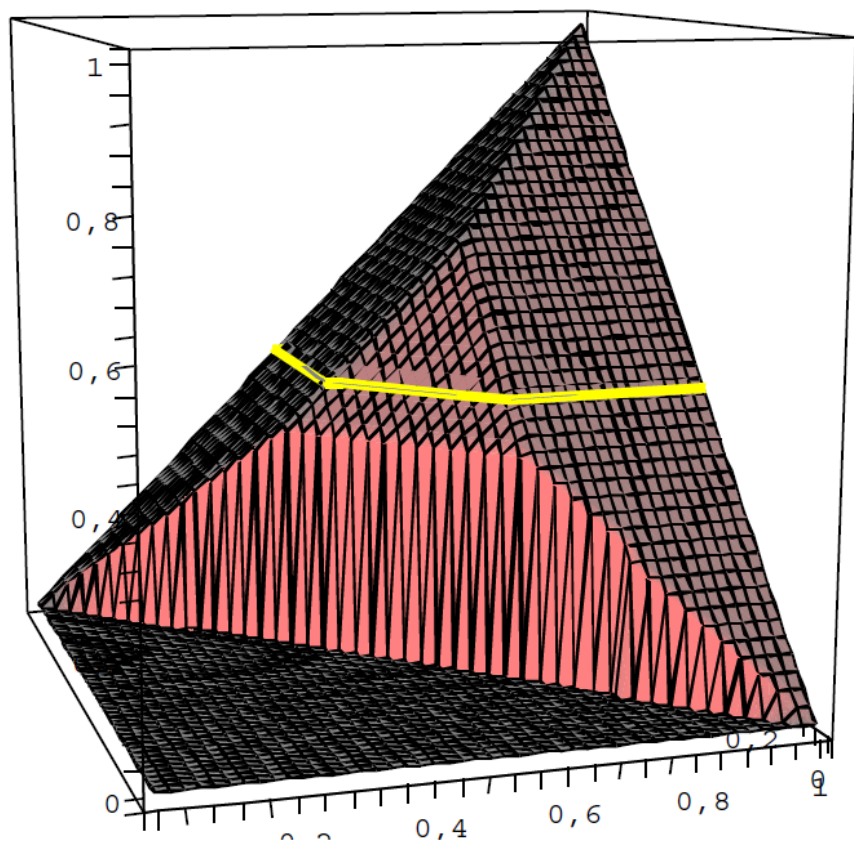


# *Alkalmazások az algebrában*



# *Kétdimenziós jellemzés!*







Minden  $x, y, c$  esetén

$$(c/y)/x = c/(x \bullet y)$$

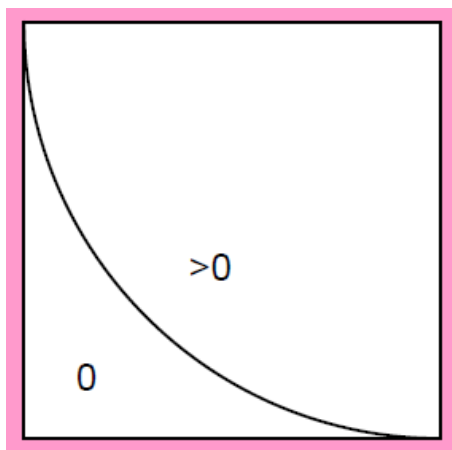
A  $\bullet$  művelet pontosan akkor **asszociatív**, ha minden  $c$  és  $x$  esetén az

$$f(y) = c/(x \bullet y)$$

függvény grafikonja „**szimmetrikus**”.

# *Alkalmazások az algebrában (hf)* jenei@ttk.pte.hu

Legyen • egy **kommutatív** művelet a  $[0,1]$  intervallumon a következő tulajdonságokkal: 1.  $(x \bullet y) \bullet z = 0$  pontosan akkor, ha



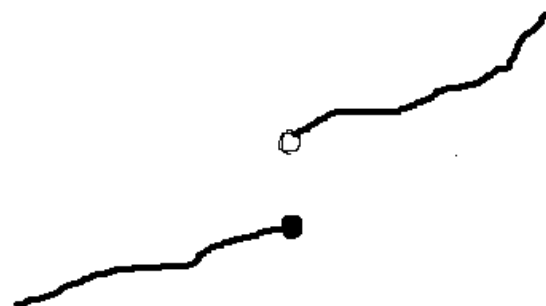
$$x \bullet (y \bullet z) = 0$$

Ekkor:

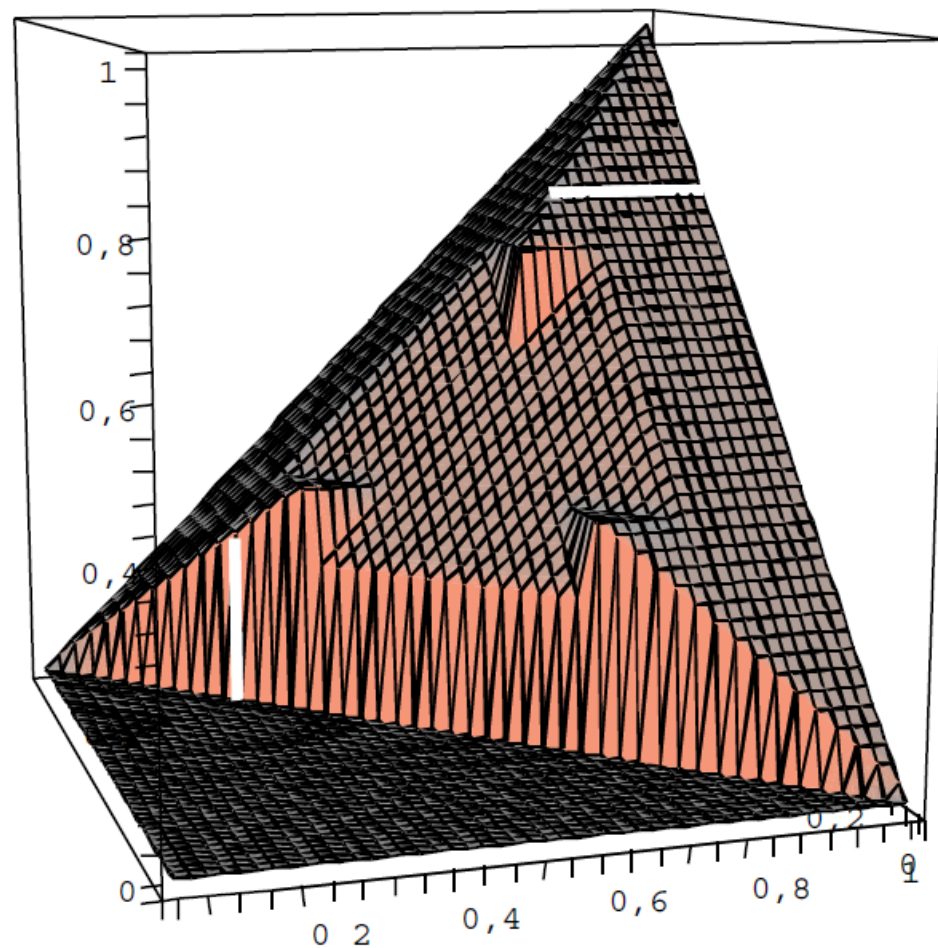
a) • szükségképpen növekvő függvény, azaz tetszőleges  $x, y \leq z$  esetén  $x \bullet y \leq x \bullet z$

b) az 1 egységelem, azaz tetsz.  $x$  esetén  $x \bullet 1 = x$

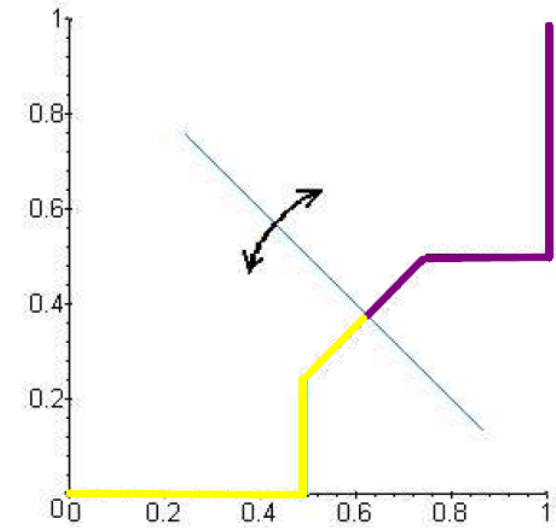
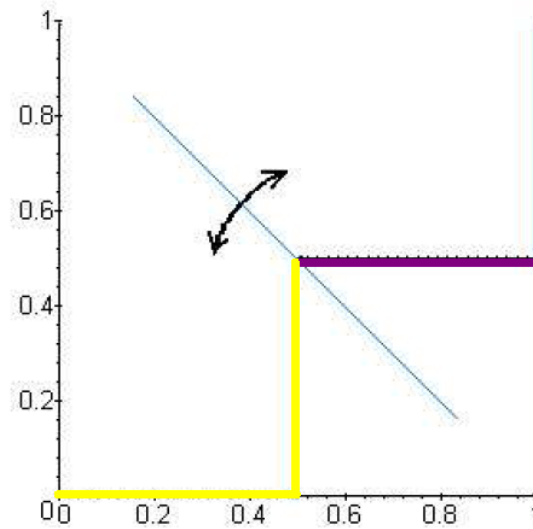
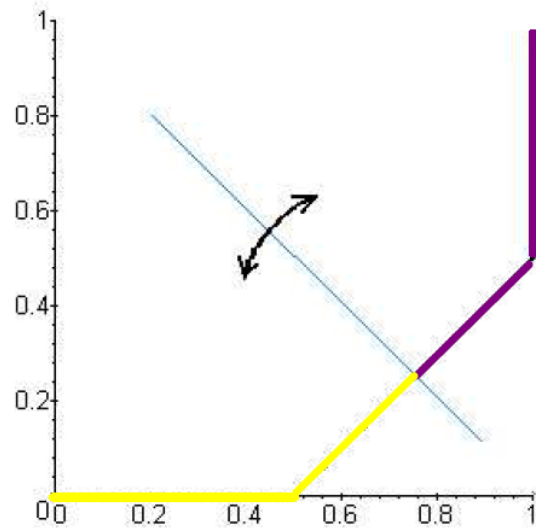
c) • **balról-folytonos**, azaz ...



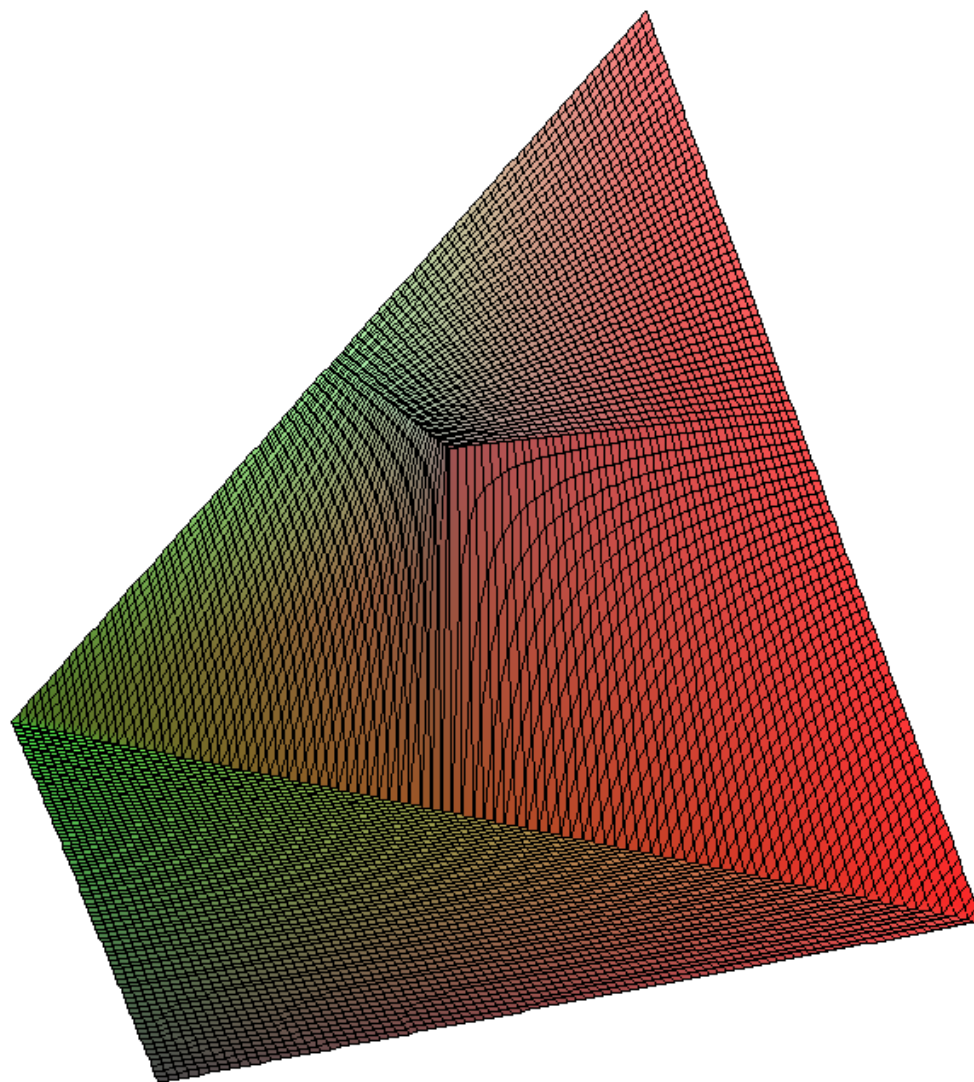
# *Alkalmazások az algebrában*

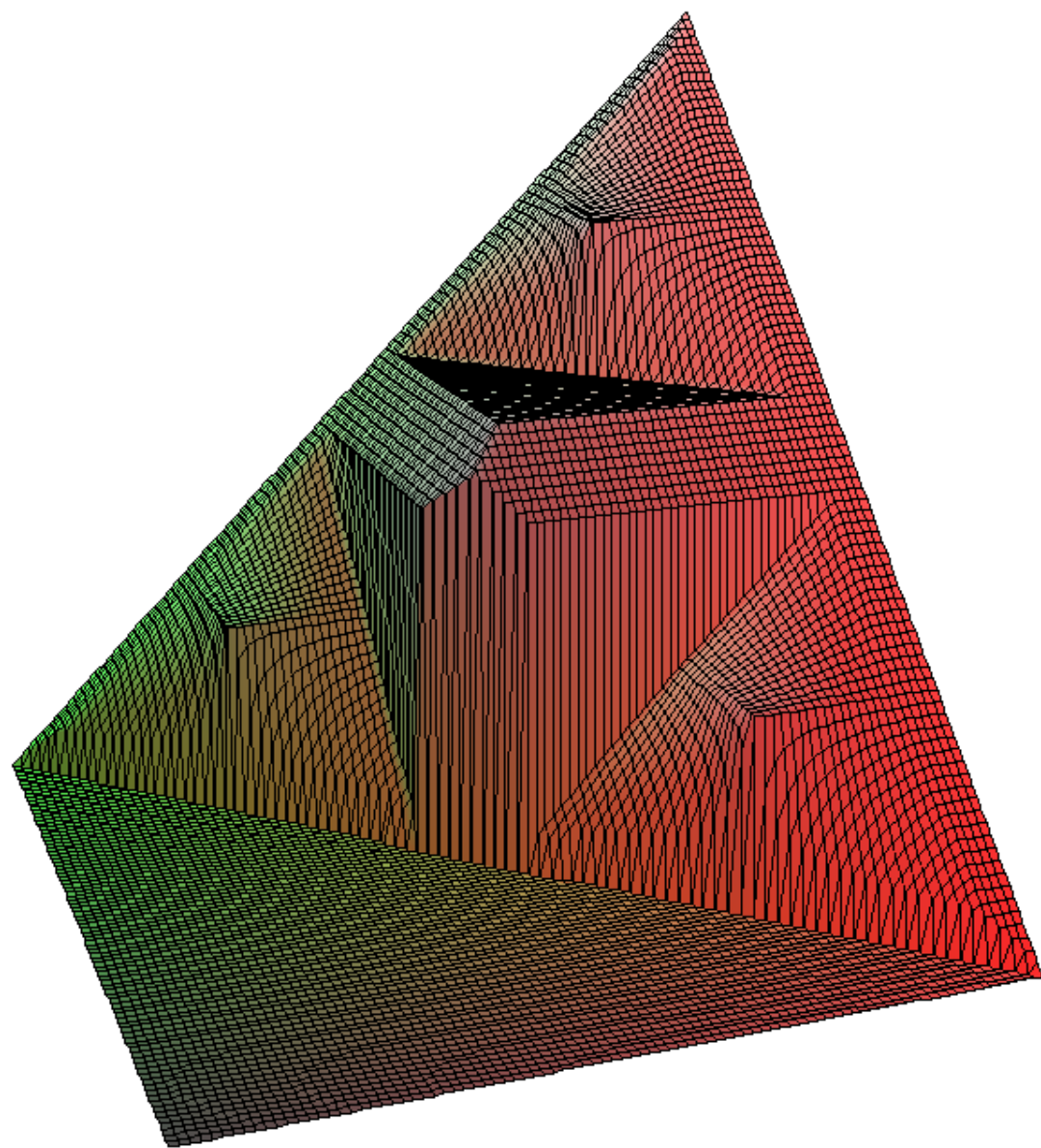


# *Alkalmazások az algebrában*

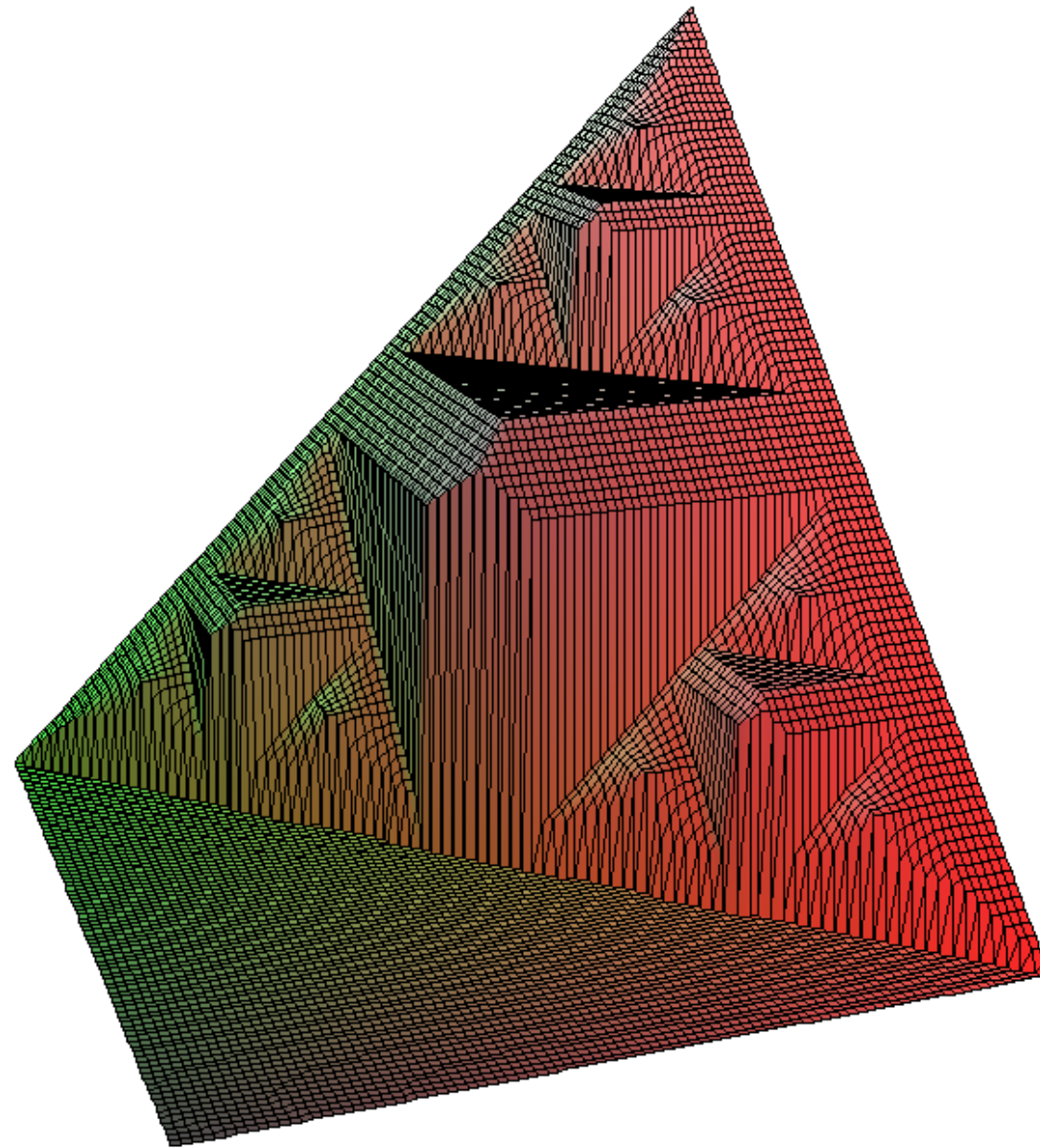


*(Forgatás konstrukció)*

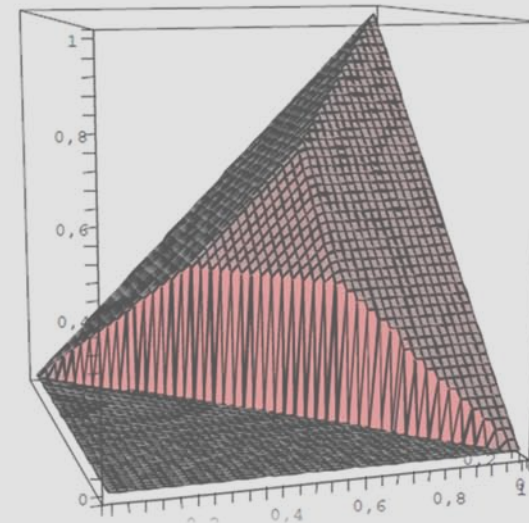
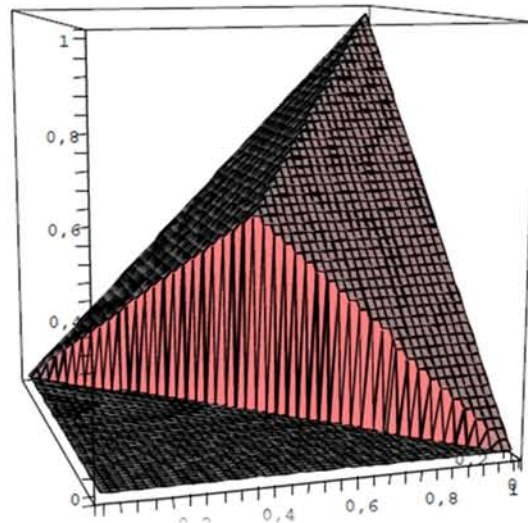
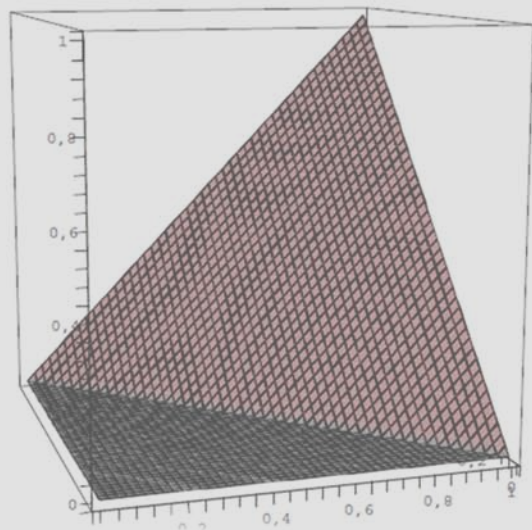




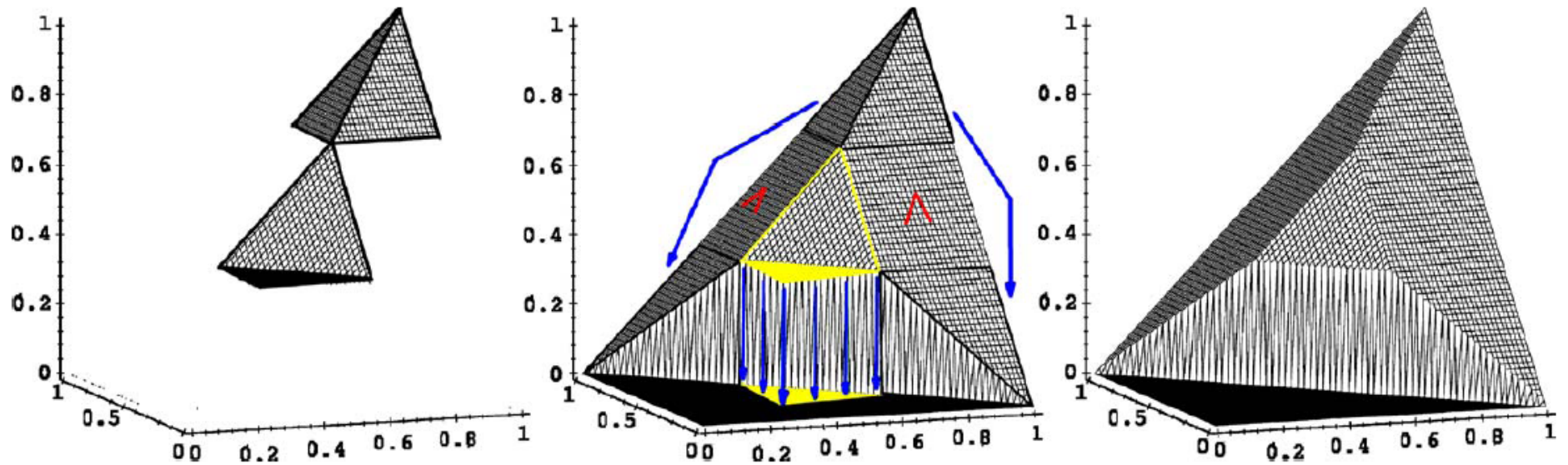


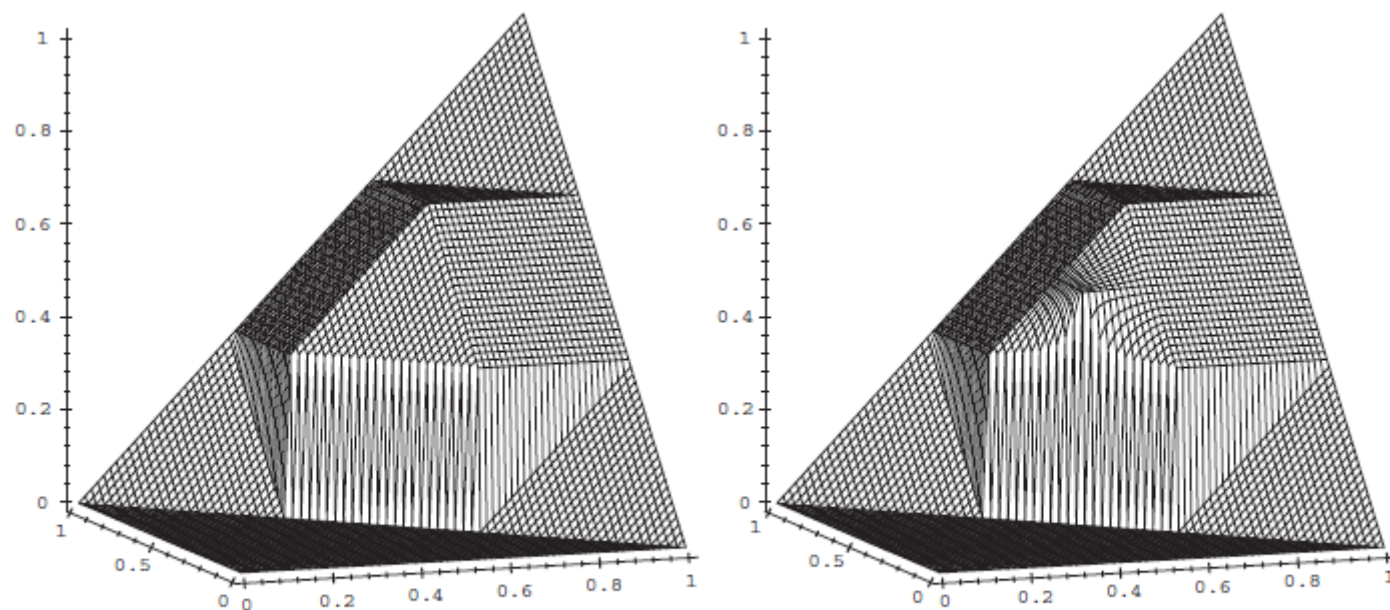


*Az „egyenes vágás” esete:*

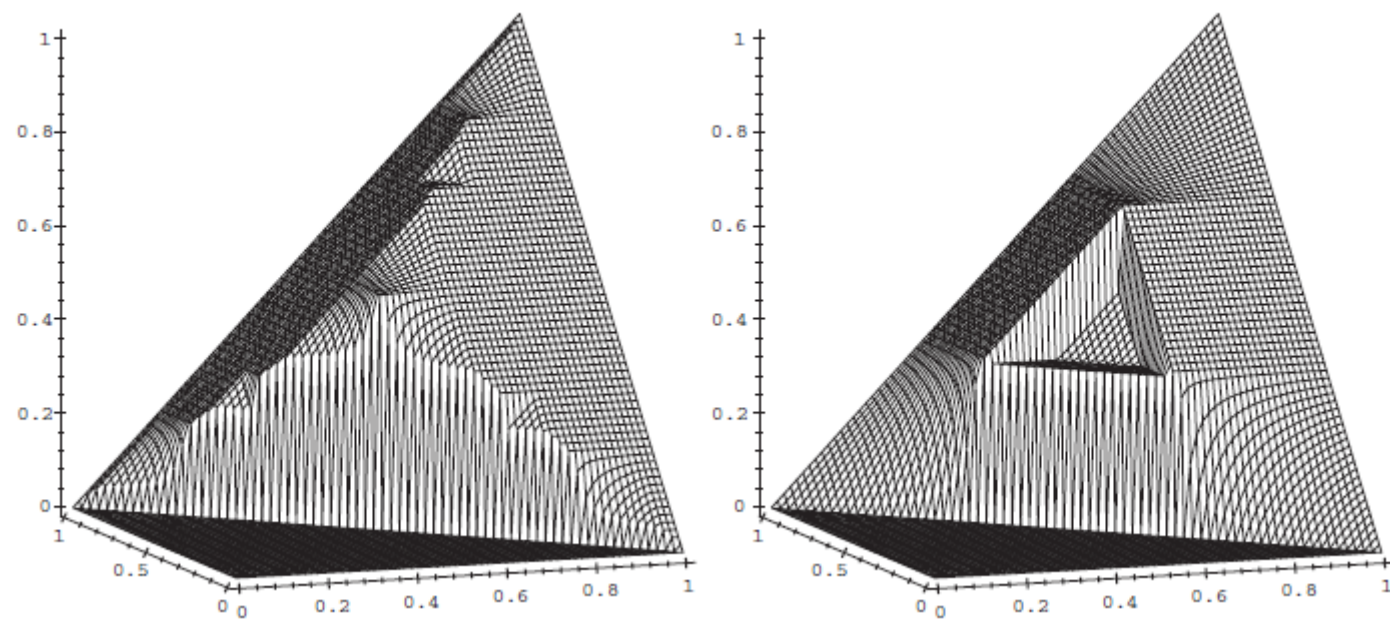


# *(Forgatás-annihilációs konstrukció)*



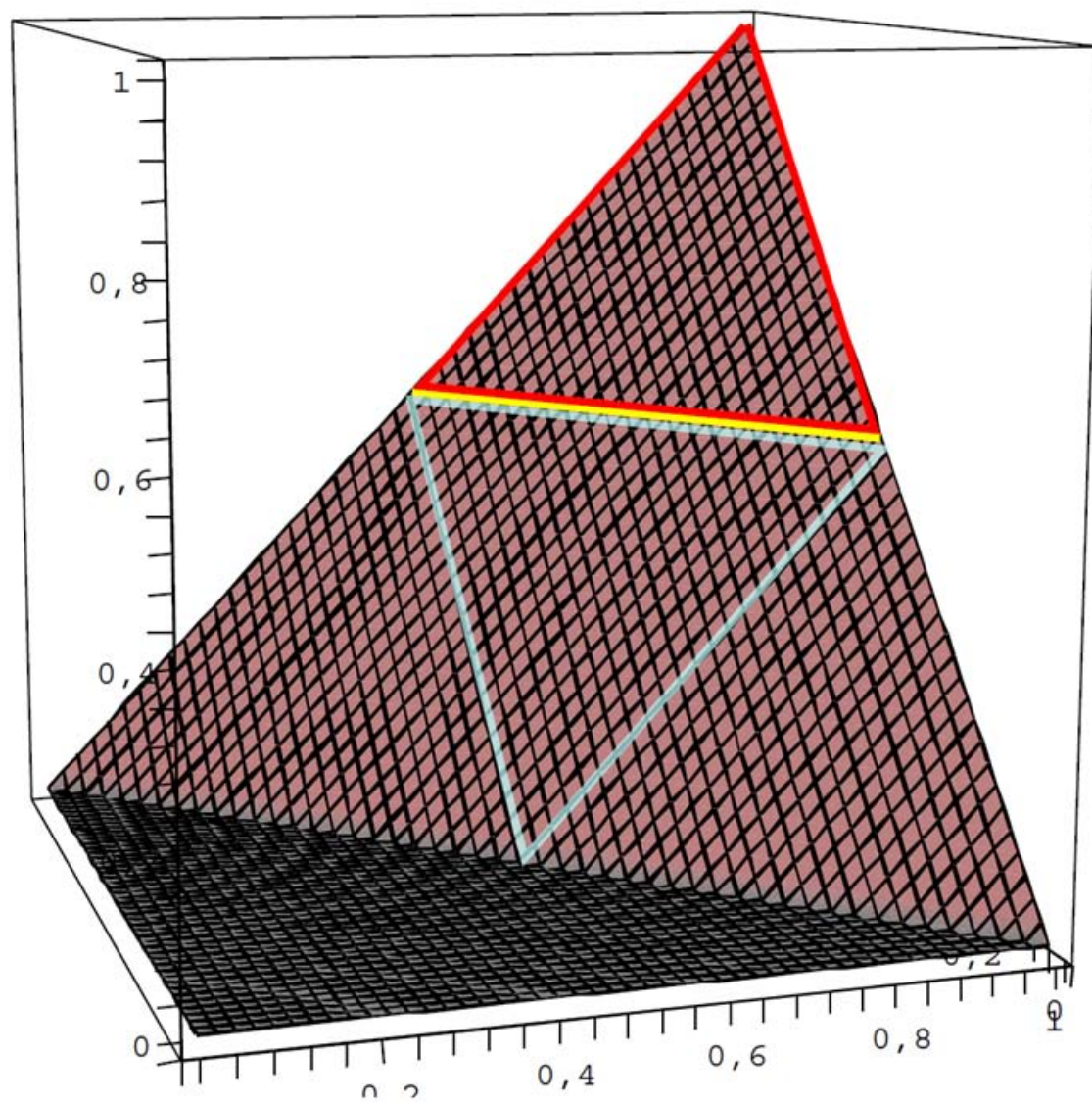


T-norms generated by the rotation-annihilation construction, see Example 5.





## *Egyéb geometriai meglepetések ...*



*Köszönöm a szíves figyelmeteket!*