A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA

I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Határozza meg a tízes számrendszerbeli $x = \overline{abba}$ és $y = \overline{abab}$ ($a \neq b$) páros természetes számokat úgy, hogy az $x + y$ összeg osztható legyen 7-tel!

Megoldás:
Mivel $x = \overline{abba}$ és $y = \overline{abab}$ tízes számrendszerbeli számok, ezért

$$x = 1001a + 110b \text{ és } y = 1010a + 101b. \qquad \text{1 pont}$$

Az (1) összefüggésekből azt kapjuk, hogy

(1) $$x + y = 2011a + 211b. \qquad \text{1 pont}$$

Maradékos osztással $2011 = 287 \cdot 7 + 2$ és $211 = 30 \cdot 7 + 1$, ezért (2)-ből az következik, hogy

$$x + y = 287 \cdot 7a + 30 \cdot 7b + 2a + b,$$

innen pedig

(2) $$x + y = 7 \cdot (287a + 30b) + 2a + b. \qquad \text{2 pont}$$

(3) szerint $x + y$ pontosan akkor osztható 7-tel, ha $2a + b$ osztható 7-tel. 1 pont

A feltétel szerint a és b páros számjegyek, valamint $a \neq b$, így a $2a + b$ összeg 24-nél kisebb 7-tel osztható pozitív páros szám, azaz

(3) $$2a + b = 14. \qquad \text{2 pont}$$

(4)-ből két megoldást kapunk:

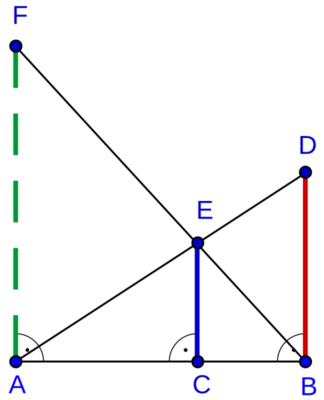
(4) $$a = 6;\ b = 2, \text{ valamint } a = 4;\ b = 6. \qquad \text{2 pont}$$

A feladatra összesen 2 megoldáspár adódik, mégpedig

$$x = 6226;\ y = 6262, \quad \text{illetve} \quad x = 4664;\ y = 4646. \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: 10 pont

2. Az AF; CE és BD szakaszok az alábbi ábrának megfelelően helyezkednek el. A CE szakasz hossza 24, a BD szakasz hossza 40 egységnyi. Hány egység hosszúságú az AF szakasz?



Megoldás:

Az AF; CE és BD szakaszok mindegyike az ábra szerint merőleges az AB szakaszra, ezért a szakaszok párhuzamosak egymással. 1 pont

A $DAB\angle$-et metsző CE és BD szakaszokra felírjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét:

(1) $$\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{BD}=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}.$$ 2 pont

A $FBA\angle$-et metsző CE és AF szakaszokra is felírjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét:

(2) $$\frac{BC}{AB}=\frac{CE}{AF}=\frac{24}{AF}.$$ 2 pont

Az (1) és (2) megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy $\frac{AC}{AB}+\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}+\frac{24}{AF}$, mivel azonban $AC+BC=AB$, ezért

(3) $$1=\frac{3}{5}+\frac{24}{AF}.$$ 3 pont

(3)-ból egyszerű számolással adódik, hogy $AF=60$, tehát az AF szakasz 60 egység hosszúságú. 2 pont

Összesen: 10 pont

3. Oldja meg az $x^2+y^2-8z=14$ egyenletet az egész számok halmazán!

I. Megoldás:

Az $x; y$ egész számok nem lehetnek egyszerre párosak, mert akkor x^2 és y^2 is 4-gyel osztható, így az egyenlet bal oldala 4-gyel osztható, miközben a jobb oldal nem osztható 4-gyel. 1 pont

Az sem állhat fenn, hogy az $x; y$ egész számok közül az egyik páros, a másik páratlan, mert ekkor az egyenlet bal oldala páratlan egész szám, míg a jobb oldala páros. 1 pont
Ezért csak az lehetséges, hogy az $x; y$ egész számok mindegyike páratlan. 1 pont

Legyen ezért $x=2k+1$ és $y=2m+1$, ahol $k; m \in Z$. 1 pont
Eszerint $4k^2+4k+1+4m^2+4m+1-8z=14$, ahonnan rendezéssel:
(1) $$4k^2+4k+4m^2+4m-8z=12.$$ 1 pont

(1) mindkét oldalát 4-gyel osztva azt kapjuk, hogy $k^2+k+m^2+m-2z=3$, amelyből kiemelés után
(2) $$k\cdot(k+1)+m\cdot(m+1)-2z=3.$$ 2 pont

A k és $k+1$, illetve m és $m+1$ közvetlen egymás utáni egész számok, ezért $k\cdot(k+1)$, illetve $m\cdot(m+1)$ páros számok. 1 pont

Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $2z$ páros egész szám, ezért (2) bal oldala páros, jobb oldala pedig páratlan egész szám. Ez nem lehetséges, tehát (2) nem teljesülhet egyetlen $k; m; z$ egész számokból álló számhármasra sem.

Minden esetet megvizsgáltunk, megoldást egyetlen esetben sem kaptunk, az $x^2+y^2-8z=14$ egyenletnek tehát nincs megoldása az egészekből álló számhármasok halmazán. 2 pont

Összesen: 10 pont

II. Megoldás:

Az $x; y$ egész számok mindegyike páratlan. (előző megoldásban részletezve) 3 pont
Átrendezve az egyenletet:
$$x^2-1+y^2-1-8z=12$$
$$(x-1)(x+1)+(y-1)(y+1)-8z=12$$
Itt a két szorzatban két egymás utáni páros szám áll, tehát a szorzat osztható 8-cal. 2 pont

A bal oldal egy 8-cal osztható szám **z** értékétől függetlenül. 3 pont

A jobb oldalon a 12 nem osztható 8-cal. 1 pont

Tehát nincs megoldása az egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

4. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$\log_5(x+4)\cdot\log_5(x-1)=\log_5\left((x+4)^2\cdot(x-1)\right)-2$$

egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

A logaritmus értelmezése miatt $x>-4$, illetve $x>1$, ezért a feladat megoldásait az $A=\left]1;\infty\right[$ halmazon keressük. 1 pont

Az egyenlet jobb oldala a logaritmus azonosságai miatt átalakítható, így

(1) $$\log_5(x+4)\cdot\log_5(x-1)=2\cdot\log_5(x+4)+\log_5(x-1)-2\,.$$ 2 pont

Végezzük el az $a=\log_5(x+4)$ és a $b=\log_5(x-1)$ helyettesítéseket, ezekkel (1) a következő alakba írható:

(2) $$a\cdot b=2a+b-2\,.$$ 2 pont

A (2) egyenlet rendezésével és kiemeléssel:

(3) $$(a-1)\cdot(b-2)=0\,.$$

A (3) egyenlet szerint $a=1$ vagy $b=2$ lehetséges. 2 pont

Ha $a=1$, akkor $\log_5(x+4)=1$, ebből a logaritmus definíciója szerint $x+4=5$, azaz $x=1$ következik. Ez a szám azonban nem eleme az $A=\left]1;\infty\right[$ halmaznak, ezért nem megoldás. 1 pont

Ha pedig $b=2$, akkor $\log_5(x-1)=2$, innen a logaritmus definíciója alapján azt kapjuk, hogy $x-1=25$, azaz $x=26$. 1 pont

Ez a szám megfelel a feladat feltételeinek és behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy valóban megoldása a feladatnak. <u>1 pont</u>

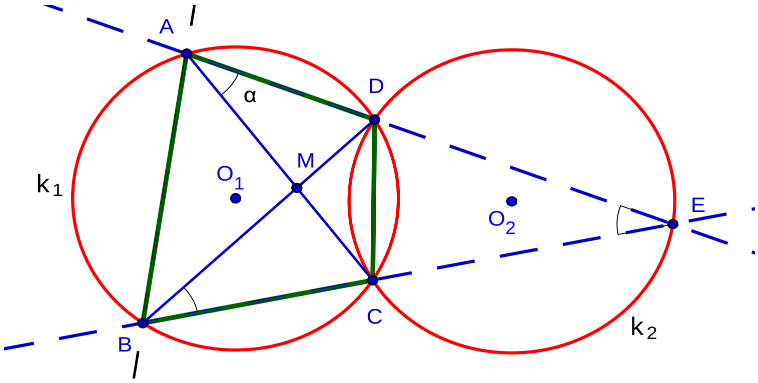
Összesen: 10 pont

5. Az $ABCD$ húrnégyszög BC és AD oldalainak egyenesei a hegyesszögű CDE háromszöget zárják közre. A CDE háromszög körülírt körének sugara megegyezik az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének sugarával.

Bizonyítsa be, hogy $\frac{AB}{CD} = 2 \cdot \cos(CED\angle)$!

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók.



1 pont

A k_1 és k_2 körök sugara egyenlő, legyen ez a sugár R.

A k_1 körben a CD húrhoz az ábra jelölése szerint, α nagyságú kerületi szög tartozik. Egyenlő sugarú körökben az egyenlő hosszúságú húrokhoz egyenlő nagyságú kerületi szögek tartoznak, ezért a k_2 körben, amelynek CD ugyancsak húrja, a CD húrhoz szintén α nagyságú kerületi szög tartozik, vagyis

(1) $$CED\angle = \alpha \ .$$ 2 pont

A kerületi szögek tétele miatt a k_1 körben $CBD\angle = \alpha$, tehát a BED háromszög egyenlő szárú háromszög, mert a BE alapon fekvő szögei egyenlők. Mivel pedig a BED háromszögnek $BDA\angle$ külső szöge, ezért

(2) $$BDA\angle = 2\alpha \ .$$ 2 pont

Ismeretes, hogy a kör egy húrjának hossza kifejezhető a kör sugarával és a húrhoz tartozó kerületi szög szinuszával. Eszerint egyrészt a k_1 körben $AB = 2R \cdot \sin 2\alpha$, másrészt a k_2 körben $CD = 2R \cdot \sin\alpha$. 1 pont

Ebből azt kapjuk, hogy

(3) $$\frac{AB}{CD} = \frac{2R \cdot \sin 2\alpha}{2R \cdot \sin\alpha} .$$ 2 pont

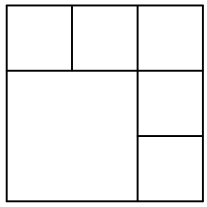
Felhasználva a $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ trigonometriai azonosságot, (3)-ból egyszerűsítés után (nyilvánvaló, hogy $\sin\alpha \neq 0$), azt kapjuk, hogy

$$\frac{AB}{CD} = 2 \cdot \cos\alpha \ ,$$ 2 pont

ez pedig a bizonyítandó állítással ekvivalens.

Összesen: 10 pont

6. Hányféleképpen írhatjuk be az ábrán látható négyzetekbe az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számokat úgy, hogy a szomszédos négyzetekbe írt számok különbsége ne legyen 3? (Szomszédosnak tekintünk két négyzetet, ha van közös oldaluk.)



Megoldás:

A megadott számokból három pár képezhető aszerint, hogy mely számpárok nem kerülhetnek szomszédos mezőbe, ezek:

(1) $(1;4)$, $(2;5)$ és $(3;6)$. 2 pont

A nagy négyzetbe bármelyik számot beírhatjuk, tehát ennek kitöltésére 6 lehetőségünk van, ekkor viszont a nagy négyzetbe írt szám (1)-nek megfelelő párját a jobb felső mezőbe kell írnunk. 2 pont

A bal felső mezőbe a megmaradt 4 szám bármelyike kerülhet, az ide írt szám (1)-ben látható párját két helyre írhatjuk: a jobb oldali középső vagy alsó mezőbe. 2 pont

Az előző elhelyezések után már csak egy (1) szerinti számpár maradt, ezeket kétféleképpen helyezhetjük el, hiszen ha eldöntöttük, hogy melyiket írjuk a felső középső mezőbe, a másik nyilván az utolsó üres mezőbe kerül. 2 pont

Az összes kitöltési lehetőségek száma tehát $6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 96$. 2 pont

Összesen: 10 pont