Oktatási Hivatal

A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. feladat: Adja meg az összes olyan (x, y) valós számpárt, amely megoldása a következő egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \end{cases} .$$

I. Megoldás: Sem x, sem y nem lehet nulla, mert akkor a 2. egyenletnek nem lenne értelme. (1 pont)

Az első egyenlet bal oldalát alakítsuk szorzattá, a második egyenletben pedig hozzunk közös nevezőre.

$$\begin{cases} xy(x+y) = 6 \\ \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$ (1 pont)

Vezessük be az $u = x + y$ és $v = xy$ új ismeretleneket. Behelyettesítés után az egyenletrendszer

$$\begin{cases} vu = 6 \\ \dfrac{u}{v} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$ (1 pont)

alakban írható. A két egyenlet összeszorzásával

$$u^2 = 9,$$

$$u_1 = 3 \quad \text{és} \quad u_2 = -3.$$ (1 pont)

Az ezekhez tartozó v értékek

$$v_1 = 2, \quad \text{illetve} \quad v_2 = -2.$$ (1 pont)

Visszahelyettesítve az eredeti egyenletekbe kapjuk, hogy

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -2 \end{cases}$$ (1 pont)

A Viete-formulák felhasználával az x és y az

$$a^2 - 3a + 2 = 0, \quad \text{illetve az} \quad a^2 + 3a - 2 = 0$$ (1 pont)

egyenlet gyökei. Az első egyenletből

$$x_1 = 2, y_1 = 1, \quad \text{illetve} \quad x_2 = 1, y_2 = 2,$$ (1 pont)

míg a másik egyenletből

$$x_3 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, y_3 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \quad \text{illetve} \quad x_4 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}, y_4 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}.$$ (1 pont)

A kapott valós számpárok mind megoldásai az eredeti egyenletrendszernek. (1 pont)

Összesen: 10 pont

II. Megoldás: Sem x, sem y nem lehet nulla, mert akkor a 2. egyenletnek nem lenne értelme. (1 pont)
Fejezzük ki a második egyenletből y-t:

$$y = \frac{2x}{3x-2}$$ (1 pont)

és helyettesítsük be az első egyenletbe

$$x^2 \cdot \frac{2x}{3x-2} + x \cdot \left(\frac{2x}{3x-2}\right)^2 = 6$$ (1 pont)

az egyenletet $(3x-2)^2$-tel szorozva, rendezés után kapjuk:

$$x^2 \cdot 2x \cdot (3x-2) + x \cdot (2x)^2 = 6 \cdot (3x-2)^2$$

$$x^4 = (3x-2)^2$$ (1 pont)

Szorzattá alakítva:

$$x^4 - (3x-2)^2 = 0$$

$$\left(x^2 + 3x - 2\right)\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$$ (1 pont)

tehát az

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{vagy} \quad x^2 + 3x - 2 = 0$$ (1 pont)

Az első egyenletből

$$x_1 = 2, y_1 = 1 \quad \text{illetve} \quad x_2 = 1, y_2 = 2,$$ (1 pont)

míg a másik egyenletből

$$x_3 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2},\; y_3 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \quad \text{illetve} \quad x_4 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2},\; y_4 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}. \qquad (2 \text{ pont})$$

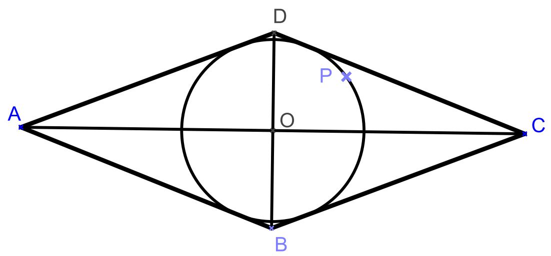
A kapott valós számpárok mind megoldásai az eredeti egyenletrendszernek. (1 pont)

Összesen: 10 pont

2. feladat: Az $ABCD$ rombusz hegyesszöge 45°. Mutassa meg, hogy a rombusz beírt körének tetszőleges P pontjára teljesül

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = \frac{5}{2}AB^2.$$

I. Megoldás: A megoldás során többször felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével (Geometria FGY I. 1671. feladat). Ennek következménye, hogy a háromszög súlyvonala kifejezhető az oldalak hosszának segítségével. (1 pont)



(1 pont)

Legyen O a beírt kör középpontja. Ekkor PO az APC háromszög súlyvonala, ezért

$$PO^2 = \frac{PA^2 + PC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}. \qquad (1 \text{ pont})$$

Hasonló meggondolással a BPD háromszögből kapjuk, hogy

$$PO^2 = \frac{PB^2 + PD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}. \qquad (1 \text{ pont})$$

Ha összeadjuk a két egyenletet és szorozzuk mindkét oldalt 2-vel, akkor rendezés után

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4 \cdot PO^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2}. \qquad (1 \text{ pont})$$

Az AC és BD a rombusz átlói, így a paralelogramma-tétel alapján

$$AC^2 + BD^2 = 4 \cdot AB^2. \qquad (1 \text{ pont})$$

Másrészt a rombusz magassága $2 \cdot PO$, hegyesszöge $45°$, tehát

$$2 \cdot PO = \frac{\sqrt{2}}{2} AB, \text{ vagyis } 4 \cdot PO^2 = \frac{1}{2} AB^2.$$ (2 pont)

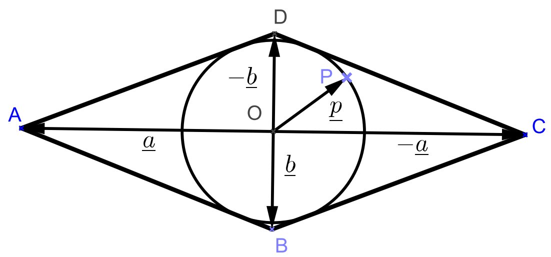
Ezeket felhasználva

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4 \cdot PO^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2} = 4 \cdot PO^2 + 2 \cdot AB^2 =$$

$$= \frac{1}{2} AB^2 + 2 \cdot AB^2 = \frac{5}{2} AB^2.$$ (2 pont)

Összesen: 10 pont

II. Megoldás: Irányítsunk vektorokat az O pontból a rombusz csúcsaiba és a P pontba az ábra szerint. Legyen $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ és $\overrightarrow{OP} = \underline{p}$. A rombusz átlói felezik egymást, így $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} = -\underline{a}$ továbbá $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} = -\underline{b}$. (1 pont)



A PA szakasz hosszának négyzete a $(\underline{p} - \underline{a})$ vektor önmagával vett skaláris szorzata, (1 pont)

emiatt

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (\underline{p} - \underline{a})^2 + (\underline{p} - \underline{b})^2 + (\underline{p} + \underline{a})^2 + (\underline{p} + \underline{b})^2 = 4\underline{p}^2 + 2\underline{a}^2 + 2\underline{b}^2.$$ (2 pont)

Ebből egyrészt a Pitagorasz-tétel miatt

$$2\underline{a}^2 + 2\underline{b}^2 = 2 \cdot AB^2,$$ (2 pont)

másrészt az első megoldásban szereplő gondolattal a rombusz magassága $2 \cdot PO$, hegyesszöge $45°$, tehát (1 pont)

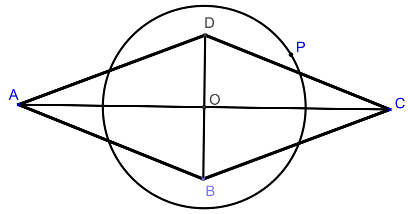
$$2 \cdot PO = \frac{\sqrt{2}}{2} AB, \text{ vagyis } 4 \cdot \underline{p}^2 = \frac{1}{2} AB^2.$$ (2 pont)

Ezzel beláttuk, hogy

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 2 \cdot AB^2 + \frac{1}{2} AB^2 = \frac{5}{2} AB^2.$$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:



1. A rombusz középpontja körül rajzolt R sugarú kör tetszőleges P pontjára állandó lesz a

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

kifejezés értéke.

2. A feladat állítása általánosabban is igaz. Egy tetszőleges n-szög (n pontból álló pontrendszer) esetén a súlypont, mint középpont körül rajzolt R sugarú kör tetszőleges P pontjának az n-szög csúcsaitól (a pontrendszer pontjaitól) vett távolságainak négyzetösszege nem függ a P pont választásától, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} PA_i^2 = \text{állandó}$$

Az állítás bizonyítása a 2. megoldásban közölt módon végezhető el.

3. feladat: Egy négyzetes oszlop alapélének és magasságának számértéke egész. A négyzetes oszlop V térfogatának és A felszínének mérőszámai között fennáll a $V = 2015 \cdot A$ összefüggés. Hány olyan nem egybevágó négyzetes oszlop létezik, amely megfelel ezeknek a feltételeknek?

I. Megoldás: Legyen a négyzetes oszlop alapéle a, magassága b. A feladatban szereplő feltételek szerint a és b pozitív egész számok. A szokásos jelölésekkel

$$V = a^2 b, \text{ továbbá } A = 2a^2 + 4ab.$$

Így

$$a^2 b = 2015 \cdot (2a^2 + 4ab). \qquad \text{(2 pont)}$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát az a pozitív egésszel, majd a jobb oldal nullára rendezését követően alakítsuk az egyenlet bal oldalát szorzattá.

$$a \cdot b - 2 \cdot 2015 \cdot a - 4 \cdot 2015 \cdot b = 0, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$a \cdot b - 2 \cdot 2015 \cdot a - 4 \cdot 2015 \cdot b + 2 \cdot 2015 \cdot 4 \cdot 2015 = 2 \cdot 2015 \cdot 4 \cdot 2015,$$
$$(a - 4 \cdot 2015)(b - 2 \cdot 2015) = 2 \cdot 2015 \cdot 4 \cdot 2015. \qquad \text{(2 pont)}$$

A jobb oldalon álló pozitív egész szám bármelyik pozitív osztójához párosítva az osztópárját az egyenlet egy helyes megoldásához jutunk. Amennyiben $k \cdot n = 2 \cdot 2015 \cdot 4 \cdot 2015$ és $k, n < 0$ negatív osztópár, akkor a $k = -4 \cdot 2015, n = -2 \cdot 2015$ párhoz az $a = 0, b = 0$ tartozna, míg a további negatív párok esetében az egyik tényező abszolút értéke mindenképpen nagyobb lesz, mint a megfelelő $a - 4 \cdot 2015$,

vagy $b-2\cdot 215$ abszolút értéke, így ezekben a további esetekben a és b közül az egyik negatív egész lenne. (1 pont)
Elegendő tehát a pozitív osztópárokra szorítkoznunk. Mivel nem szimmetrikus a két tényező, így minden osztóra különböző megoldást kapunk. (1 pont)
Pontosan annyi megoldása lesz az egyenletnek, ahány osztója van a $2^3 \cdot 2015^2$ számnak. (1 pont)
A pozitív osztók száma

$$d(2^3 \cdot 2015^2) = d(2^3 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2) = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108. \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát 108 különböző ilyen tulajdonságú négyzetes oszlop van. (1 pont)

Összesen: 10 pont

II. Megoldás: Legyen a négyzetes oszlop alapéle a, magassága b. A feladatban szereplő feltételek szerint a és b pozitív egész számok. A szokásos jelölésekkel

$$V = a^2b, \text{ továbbá } A = 2a^2 + 4ab.$$

Így

$$a^2b = 2015 \cdot (2a^2 + 4ab). \qquad \text{(2 pont)}$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát az a pozitív egésszel, majd majd kezdjük meg a rendezést, az a-ra megoldáshoz

$$a\ \ (b - 2 \cdot 2015) = 4 \cdot 2015 \cdot b \qquad \text{(1 pont)}$$

A jobb oldal pozitív, tehát a bal oldal is. a pozitív, mert éthossz, tehát a $b-2\cdot 2015$ kifejezés is, tehát oszthatunk vele. (1 pont)
a-t kifejezve kapjuk:

$$a = \frac{4 \cdot 2015 \cdot b}{b - 2 \cdot 2015} \qquad \text{(1 pont)}$$

Tovább alakítva a törtet

$$a = \frac{4 \cdot 2015 \cdot (b - 2 \cdot 2015) + 2^3 \cdot 2015^2}{b - 2 \cdot 2015} = 4 \cdot 2015 + \frac{2^3 \cdot 2015^2}{b - 2 \cdot 2015}$$

A nevezőnek (a $b - 2 \cdot 2015$ kifejezésnek) az előzőek szerint a számláló pozitív osztójának kell lennie az előzőek szerint. (2 pont)
Pontosan annyi megoldása lesz az egyenletnek, ahány pozitív osztója van a $2^3 \cdot 2015^2$ számnak. (1 pont)
A pozitív osztók száma

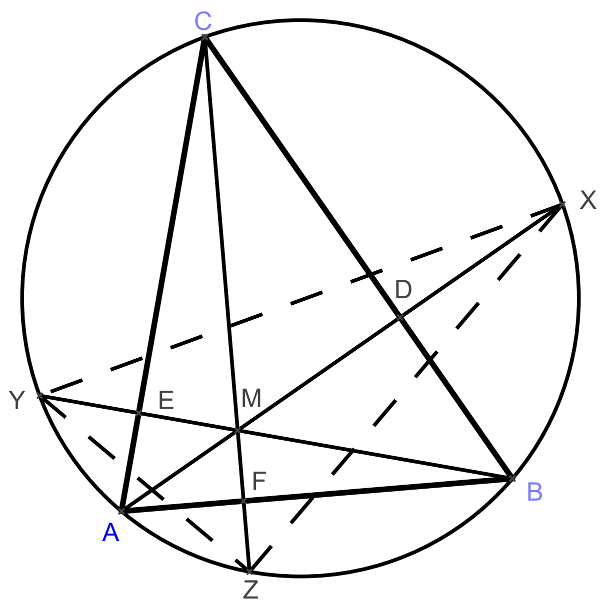
$$d(2^3 \cdot 2015^2) = d(2^3 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2) = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108. \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát 108 különböző ilyen tulajdonságú négyzetes oszlop van. (1 pont)

Összesen: 10 pont

4. feladat: Az ABC háromszög szögei $CAB\angle = 75°$ és $ABC\angle = 60°$. Legyenek az ABC háromszög magasságpontjának a BC, CA és AB oldalakra vonatkozó tükörképei rendre X, Y és Z pontok. Közelítő értékek használata nélkül határozza meg az XYZ és ABC háromszögek területének arányát!

I. Megoldás: A háromszög mindhárom szöge hegyesszög, a magasságpont tehát a háromszög belső pontja. Legyenek a háromszög magasságvonalainak a BC, CA és AB oldalakkal való metszéspontjai rendre D, E és F.



Az $AFME$ négyszög két szemben fekvő szöge derékszög, ezért a négyszög húrnégyszög, innen azt kapjuk, hogy $EMF\angle = CMB\angle = 105°$. Az X pont az M magasságpontnak a BC oldalra vonatkozó tükörképe, ezért $CXB\angle = 105°$. Látható, hogy $CAB\angle + BXC\angle = 180°$. A $BACX$ négyszög húrnégyszög, az X pont az ABC háromszög körülírt körén fekvő pont. Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy Y és Z is a körülírt körön levő pontok. (1 pont)

AzABE és ACF derékszögű háromszögekben $ABE\angle = ACF\angle = 15°$, ebből a tükrözés tulajdonsága miatt $ABZ\angle = ACY\angle = 15°$ következik. (1 pont)

A kerületi szögek tétele szerint$YCZ\angle = YXZ\angle$, így beláttuk, hogy $YXZ\angle = 30°$. (1 pont)

Hasonlóan kapjuk, hogy $FCB\angle = MCD\angle = 30°$, és így a tükrözés miatt $MCX\angle = ZCX\angle = 60°$, innen pedig a kerületi szögek tétele miatt $XYZ\angle = 60°$. Eszerint az XYZ háromszög harmadik szöge derékszög, az XYZ háromszög félszabályos. (1 pont)

AZ ABC és XYZ háromszögek körülírt köre közös, legyen ennek a sugara R. A továbbiakban felhasználjuk a szögekre vonatkoz eredményeinket. Az általános szinusztétel szerint

$$XY = 2Rsin60° = R\sqrt{3}, \text{ és } YZ = 2Rsin30° = R.$$

Az XYZ háromszög derékszögű, ezért területe

$$T_1 = \frac{XZ \cdot YZ}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}. \qquad (2 \text{ pont})$$

Felhasználva a két szög összegének szinuszára vonatkozó addíciós tételt, hogy:

$$sin75° = sin(45° + 30°) = sin45°cos30° + cos45°sin30° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ugyancsak az általános szinusztétel szerint

$$AB = 2Rsin45° = R\sqrt{2}, \text{ és } BC = 2Rsin75° = R\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}. \qquad (1 \text{ pont})$$

Az ABC háromszög T területére az eddigiek alapján:

$$T = \frac{AB \cdot BC \cdot sin60°}{2} = \frac{R^2\sqrt{6}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{8} = \frac{R^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}. \qquad (2 \text{ pont})$$

A két terület aránya

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\frac{R^2\sqrt{3}}{2}}{\frac{R^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1. \qquad (1 \text{ pont})$$

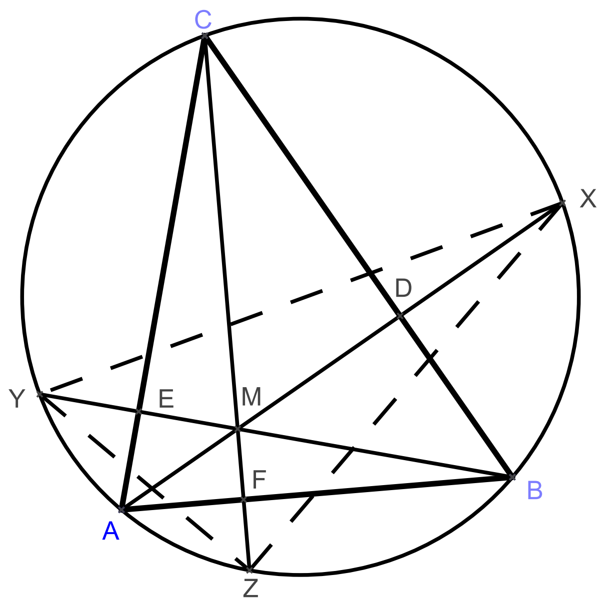
Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

1. Az első pontot akkor is megkapja a versenyző, ha nem bizonyítja be, hogy a háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei a körülírt körön vannak, de helyesen hivatkozik a tételre.

2. A második pontot akkor is megkapja a versenyző, ha előbb bizonyítja, hogy $ABZ\angle = 15°$, majd hivatkozik a kerületi szögek tételére

II. Megoldás: A háromszög mindhárom szöge hegyesszög, a magasságpont tehát a háromszög belső pontja. Legyenek a háromszög magasságvonalainak a BC, CA és AB oldalakkal való metszéspontjai rendre D, E és F.



Az $AFME$ négyszög két szemben fekvő szöge derékszög, ezért a négyszög húrnégyszög, innen azt kapjuk, hogy $EMF\angle = CMB\angle = 105°$. Az X pont az M magasságpontnak a BC oldalra vonatkozó tükörképe, ezért $CXB\angle = 105°$. Látható, hogy $CAB\angle + BXC\angle = 180°$. A $BACX$ négyszög húrnégyszög, az X pont az ABC háromszög körülírt körén fekvő pont. Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy Y és Z is a körülírt körön levő pontok. (1 pont)
AzABE és ACF derékszögű háromszögekben $ABE\angle = ACF\angle = 15°$, ebből a tükrözés tulajdonsága miatt $ABZ\angle = ACY\angle = 15°$ következik. (1 pont)
A kerületi szögek tétele szerint$YCZ\angle = YXZ\angle$, így beláttuk, hogy $YXZ\angle = 30°$. (1 pont)

Hasonlóan kapjuk, hogy $FCB\angle = MCD\angle = 30°$, és így a tükrözés miatt $MCX\angle = ZCX\angle = 60°$, innen pedig a kerületi szögek tétele miatt $XYZ\angle = 60°$. Eszerint az XYZ háromszög harmadik szöge derékszög, az XYZ háromszög félszabályos. (1 pont)
A terület kiszámításához használjuk fel a következő összefüggéseket:

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$$

$$AB = 2Rsin45°; \qquad BC = 2Rsin60°; \qquad CA = 2Rsin75°$$

és

$$T_{XYZ} = \frac{XY \cdot YZ \cdot ZX}{4R}$$

$$XY = 2Rsin90°; \qquad YZ = 2Rsin60°; \qquad ZX = 2Rsin30°$$ (2 pont)

rendezés után

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} = 2R^2 \cdot sin45° \cdot sin60° \cdot sin75°$$

$$T_{XYZ} = \frac{XY \cdot YZ \cdot ZX}{4R} = 2R^2 \cdot sin90° \cdot sin60° \cdot sin30°$$ (2 pont)

valamint

$$sin75° = sin(45° + 30°) = sin45°cos30° + cos45°sin30° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \qquad \text{(1 pont)}$$

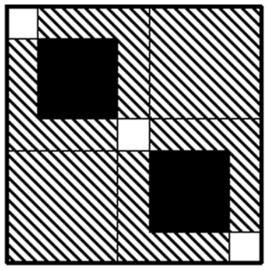
A két terület aránya

$$\frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}} = \frac{2R^2 \cdot sin90° \cdot sin60° \cdot sin30°}{2R^2 \cdot sin45° \cdot sin60° \cdot sin75°} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1 \qquad \text{(1 pont)}$$

Összesen: 10 pont

5. feladat: Papírból 6 darab a cm oldalhosszúságú négyzetet vágtunk ki, majd azokból egy-egy L-alakot raktunk le a b cm oldalhosszúságú, négyzet alakú asztallap két szemközti csúcsánál az ábra szerint. (A hatoldalú L-alak kettő oldala $2a$, négy oldala pedig a hosszúságú.) Így az asztallap két feketével jelölt része kétszer, a csíkozással jelölt része pedig egyszer fedett. A nem fedett részek területének összege, a kétszer fedett (fekete) részek területének összege és az egyszer fedett (csíkozott) részek területének összege cm^2-ben mérve, ebben a sorrendben egy pozitív tagokból álló, monoton növő számtani sorozat egymást közvetlenül követő tagjai. (Az ábra nem méretarányos.) Határozza meg a b és a oldalak arányának pontos értékét!



I. Megoldás: A nem fedett (fehér) négyszögek bármely oldala vagy valamely a oldalhosszúságú négyzet egyik oldalára, vagy a b oldalú négyzet egyik oldalára illeszkedik, ezért ezek szemközti oldalai párhuzamosak, szögei 90°-osak, valamint bármely oldaluk hossza $b - 2a$, így ezek olyan négyzetek, amelyeknek területe $(b - 2a)^2$. (1 pont)
Így a nem fedett részek területének összege:

$$3 \cdot (b - 2a)^2 = 3b^2 - 12ab + 12a^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Hasonlóan a feketével jelölt négyszögek is négyzetek, oldalaik hossza pedig $a - (b - 2a) = 3a - b$. (1 pont)
Így a kétszer fedett (fekete) részek területének összege:

$$2 \cdot (3a - b)^2 = 18a^2 - 12ab + 2b^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az egyszer fedett (csíkos) részek területének összege:

$$b^2 - (3b^2 - 12ab + 12a^2) - (18a^2 - 12ab + 2b^2) = -30a^2 + 24ab - 4b^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

A három terület mérőszáma egy monoton növő számtani sorozat egymást közvetlen követő eleme, ezért:

$$18a^2 - 12ab + 2b^2 - (3b^2 - 12ab + 12a^2) = -30a^2 + 24ab - 4b^2 - (18a^2 - 12ab + 2b^2),$$ (1 pont)

$$6a^2 - b^2 = -48a^2 + 36ab - 6b^2,$$
$$5b^2 - 36ab + 54a^2 = 0,$$
$$5 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 36 \cdot \left(\frac{b}{a}\right) + 54 = 0,$$
$$\frac{b}{a} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 4 \cdot 5 \cdot 54}}{10} = \frac{18 \pm 3\sqrt{6}}{5}.$$ (1 pont)

Ha $b \geq 3a$ akkor nincs kétszer fedett (fekete) rész, ezért $\frac{b}{a} < 3$. (1 pont)
Ha $b \leq 2a$ akkor nincs nem fedett rész, sőt az a oldalú négyzetek egy része még le is lóghat az asztalról. Tehát $2 < \frac{b}{a} < 3$. Ezekből következik, hogy $\frac{18+3\sqrt{6}}{5} > \frac{18}{5} > 3$ nem megoldás. Mivel

$$2 < \frac{10,5}{5} = \frac{18 - 3 \cdot 2,5}{5} < \frac{18 - 3\sqrt{6}}{5} < \frac{18 - 3 \cdot 2,4}{5} = \frac{10,8}{5} < 3,$$

ezért a keresett pontos érték: (1 pont)

$$\frac{18 - 3\sqrt{6}}{5}.$$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

II. Megoldás: Ha az elrendezésünket kétszeresére növeljük, akkor a négyzetek oldalai is kétszeresek lesznek, míg a területek négyszeresre változnak. A területek különbsége is négyszeres lesz. A számtani sorozat tulajdonságuk is megmarad, hiszen a különbségük is négyszeresre növekszik. Ugyanígy igaz lenne, ha tetszőlegesen nagyítanánk vagy kicsinyítenénk. Tehát vegyük azt az esetet, amikor a kicsi négyzetek (a oldalú négyzetek) éppen egységnyiek, a nagy négyzet (b oldalú) mérete pedig legyen x. A feladat ezen x értékének a meghatározása, hiszen ez éppen a keresett arány. (1 pont)
A nem fedett (fehér) négyszögek bármely oldala $x - 2$ nagyságú. Ebből következik az $x > 2$ egyenlőtlenség, másrészt a területe $(x - 2)^2$. (1 pont)
Így a nem fedett részek területének összege:

$$3 \cdot (x - 2)^2$$ (1 pont)

Hasonlóan a feketével jelölt négyszögek is négyzetek, oldalaik hossza pedig $1 - (x - 2) = 3 - x$. Ebből következik x-re egy újabb feltétel: $3 > x$. (1 pont)

Így a kétszer fedett (fekete) részek területének összege:

$$2 \cdot (3-x)^2 \qquad \text{(1 pont)}$$

Az egyszer fedett (csíkos) részek területének összege:

$$x^2 - 2 \cdot (3-x)^2 - 3 \cdot (x-2)^2 \qquad \text{(1 pont)}$$

A három terület mérőszáma egy monoton növő számtani sorozat egymást közvetlen követő eleme, ezért:

$$4 \cdot (3-x)^2 = x^2 - 2 \cdot (3-x)^2 - 3 \cdot (x-2)^2 + 3 \cdot (x-2)^2 \qquad \text{(1 pont)}$$

$$4x^2 - 24x36 = -x^2 + 12x - 18$$

$$5x^2 - 36x + 54 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 4 \cdot 5 \cdot 54}}{10} = \frac{18 \pm 3\sqrt{6}}{5}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel $2 < x < 3$, ezért a kapott két gyök közül csak a

$$\frac{18 - 3\sqrt{6}}{5}.$$

felel meg. (1 pont)

A keresett pontos érték:

$$\frac{18 - 3\sqrt{6}}{5}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Összesen: 10 pont