Oktatási Hivatal

A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

döntő forduló

MATEMATIKA

I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Legyen x egész szám, p pozitív prímszám, legyen továbbá A és B az a két különböző pont a számegyenesen, amelyek az x^2, illetve az $(x+p)^2$ számok helyét jelölik.
Adja meg az összes olyan p prímszámot, amelyre az AB szakasz valamelyik harmadolópontja a p szám helyét jelöli!

Megoldás: nem sérti az általánosságot, ha feltesszük, hogy az A pont az AB szakasz bal oldali, míg a B pont az AB szakasz jobb oldali végpontja. Az A és B pontok jelölhetik a számegyenesen az x^2 és az $(x+p)^2$ számok bármelyikét.
Meg kell vizsgálnunk minden lehetőséget, ezért feltesszük, hogy ha létezik a feladatban szereplő p prímszám, akkor a p prímet jelölő pont az AB szakasz bármelyik harmadolópontja lehet.

A harmadolópontoknak megfelelő számok minden esetben

$$\frac{2x^2+(x+p)^2}{3}\text{, és }\frac{2\cdot(x+p)^2+x^2}{3}.$$

Azt kell tehát vizsgálnunk, hogy milyen $x \in Z$ számra és p pozitív prímszámra áll fenn

(1) $$\frac{2x^2+(x+p)^2}{3}=p,$$

vagy

(2) $$\frac{2\cdot(x+p)^2+x^2}{3}=p.$$ 1 pont

Az (1) egyenletből a műveletek elvégzésével és rendezéssel a

(3) $$3x^2 + 2px + p^2 - 3p = 0$$

x-ben másodfokú egyenletet kapjuk.

A (3) egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz, ha

$$4p^2 - 12 \cdot \left(p^2 - 3p\right) \geq 0,$$

ahonnan a műveletek elvégzésével, egyszerűsítéssel és rendezéssel adódik

(4) $$9p \geq 2p^2.$$ 1 pont

Ha a (4) egyenlőtlenség teljesül, akkor a (3), és ezzel az (1) egyenlet valós megoldásai:

(5) $$x_1 = \frac{-p + \sqrt{9p - 2p^2}}{3} \text{ és } x_2 = \frac{-p - \sqrt{9p - 2p^2}}{3}.$$ 1 pont

Mivel p pozitív prímszám, ezért a (4) egyenlőtlenségből a p pozitív prímszámmal való osztással az is következik, hogy

$$0 < p \leq \frac{9}{2},$$

ennek csak a $p = 2$ és $p = 3$ prímszámok felelnek meg. 1 pont

Ha $p = 2$, akkor a (3), és így az (1) egyenlet valós megoldásai (5) szerint

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{10}}{3} \text{ és } x_2 = \frac{-2 - \sqrt{10}}{3},$$

ezek azonban a feladatnak nem megoldásai, mert a feltétel szerint x egész szám.
Ezért $p = 2$ nem lehetséges. 1 pont

Ha $p = 3$, akkor (5) szerint $x_1 = 0$ és $x_2 = -2$. 1 pont

Vizsgáljuk most a (2) egyenlet lehetséges megoldásait.

A műveletek elvégzésével és rendezéssel:

(6) $$3x^2 + 4px + 2p^2 - 3p = 0.$$

A (6) egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz, ha

$$16p^2 - 12 \cdot \left(2p^2 - 3p\right) \geq 0,$$

ahonnan a műveletek elvégzésével, egyszerűsítéssel és rendezéssel adódik, hogy

(7) $$9p \geq 2p^2.$$

A (7) egyenlőtlenség a (4) egyenlőtlenséggel azonos, és pontosan akkor teljesül, ha

$$0 < p \leq \frac{9}{2}.$$

Ekkor a (6), és így a (2) egyenlet valós megoldásai:

(8) $$x_3 = \frac{-2p + \sqrt{9p - 2p^2}}{3} \text{ és } x_4 = \frac{-2p - \sqrt{9p - 2p^2}}{3}.$$ 1 pont

A (7) egyenlőtlenségnek a (4)-gyel megegyezően csak a $p = 2$ és $p = 3$ prímszámok felelnek meg.

Ha $p = 2$, akkor a (6), és ebből következően a (2) egyenlet valós megoldásai (8) szerint

$$x_3 = \frac{-4 + \sqrt{10}}{3} \text{ és } x_4 = \frac{-4 - \sqrt{10}}{3},$$

de ezek a feladatnak nem megoldásai, mert x egész szám. Ezért $p = 2$ nem lehetséges. 1 pont

Ha $p = 3$, akkor (8) szerint $x_3 = -1$ és $x_4 = -3$. 1 pont

Azt kaptuk tehát, hogy a feladat feltételeinek csak a $p = 3$ prímszám felel meg.

A $p = 3$ prímszámhoz tartozó $x_1 = 0$ egész számra az AB szakasz a $[0; 9]$ intervallumnak felel meg a számegyenesen, és az AB szakasz A pontjához közelebbi harmadolópont jelöli a $p = 3$ prímszám helyét. A $p = 3$ prímszámhoz tartozó $x_2 = -2$ egész számra az AB szakasz az $[1; 4]$ intervallumnak felel meg, és az AB szakasz B pontjához közelebb eső harmadolópont éppen a $p = 3$ prímszám helyét jelöli.

Ha $p = 3$ mellett $x_3 = -1$, akkor az AB szakasz az $[1; 4]$ intervallumot jelöli ki a számegyenesen, és a B ponthoz közelebb eső harmadolópont adja meg a $p = 3$ prímszám helyét. Végül pedig $x_4 = -3$ mellett az AB szakasz a $[0; 9]$ intervallumnak felel meg, és az A ponthoz közelebbi harmadolópont jelöli a $p = 3$ prímszám helyét. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Oldja meg a $\left[\frac{11x-3\cdot\sqrt{x}}{2x}\right]=\sqrt{4n^2+12n}$ egyenletet, ahol x valós szám és n egész szám!

($[y]$ az y valós szám egészrésze, azaz az y -nál nem nagyobb egészek közül a legnagyobb)

Megoldás: a négyzetgyök értelmezése szerint egyrészt $x \geq 0$, a bal oldali törtkifejezés nevezője miatt pedig $x \neq 0$, ezért x csak pozitív valós szám lehet.
Másrészt ugyancsak a négyzetgyök értelmezése miatt $4n^2+12n \geq 0$, ahonnan szorzattá alakítással kapjuk, hogy

(1) $$4n\cdot(n+3)\geq 0.$$

Az (1) egyenlőtlenségnek olyan $n \in Z$ számok felelnek meg, amelyekre $n \geq 0$, vagy $n \leq -3$. 1 pont

A kiindulási egyenlet bal oldala egész szám, ezért a jobb oldalnak is egész számnak kell lennie. Ez csak úgy lehetséges, ha a $4n^2+12n$ kifejezés egy egész szám négyzetével egyenlő, azaz, ha

$$4n^2+12n=m^2 \quad (m \in Z).$$

Mindkét oldalhoz 9-et adva $(2n+3)^2=m^2+9$. Ebből a két négyzet különbségére vonatkozó azonosság ismeretében szorzattá alakítással kapjuk, hogy

(2) $$(2n+3+m)\cdot(2n+3-m)=9.$$ 1 pont

A (2) egyenlet bal oldalának zárójeles kifejezései a 9 szám pozitív vagy negatív osztópárjai és ezért a következő esetek lehetségesek:

a) $2n+3+m=1$ és $2n+3-m=9$,

b) $2n+3+m=-1$ és $2n+3-m=-9$,

c) $2n+3+m=3$ és $2n+3-m=3$,

d) $2n+3+m=-3$ és $2n+3-m=-3$.

Az a)-b)-c)-d) esetekben egyenként az egyenletek bal oldalait összeadva, rendre a következő n értékeket kapjuk (ha az egyes esetekben az osztópárok tényezőit fölcseréljük, nem kapunk újabb megoldásokat):

$$n_1=1; n_2=-4; n_3=0; n_4=-3.$$ 1 pont

Az $n=1$ és $n=-4$ esetekben a $\left[\frac{11x-3\cdot\sqrt{x}}{2x}\right]=\sqrt{4n^2+12n}$ egyenlet jobb oldalának értéke 4, ezért

(3) $$\left[\frac{11x-3\cdot\sqrt{x}}{2x}\right]=4.$$ 1 pont

Az egészrész értelmezése szerint (3) azt jelenti, hogy $4\le\frac{11x-3\cdot\sqrt{x}}{2x}<5$, ahonnan a $2x>0$ számmal való szorzással és rendezéssel két egyenlőtlenséget kapunk:

(4) $$0\le 3x-3\cdot\sqrt{x}$$

és

(5) $$x-3\cdot\sqrt{x}<0.$$ 1 pont

A (4) egyenlőtlenség mindkét oldalát osztva a $3\cdot\sqrt{x}>0$ kifejezéssel, előbb a $0\le\sqrt{x}-1$ egyenlőtlenséget, majd ebből rendezéssel és négyzetreemeléssel az

$$1\le x$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

Az (5) egyenlőtlenség mindkét oldalát oszthatjuk a $\sqrt{x}>0$ kifejezéssel, ebből a $\sqrt{x}-3<0$ egyenlőtlenség, majd innen rendezéssel és négyzetreemeléssel az

$$x<9$$

egyenlőtlenség adódik.

Eszerint az $n=1$ és $n=-4$ egész számokra a $\left[\frac{11x-3\cdot\sqrt{x}}{2x}\right]=\sqrt{4n^2+12n}$ egyenlet megoldásai az

$$1\le x<9$$

egyenlőtlenségeknek megfelelő valós számok. 1 pont

Az $n=0$ és $n=-3$ egész számok esetén pedig a $\left[\frac{11x-3\cdot\sqrt{x}}{2x}\right]=\sqrt{4n^2+12n}$ egyenlet jobb oldalának értéke zérus, ezért

(6) $$\left[\frac{11x-3\cdot\sqrt{x}}{2x}\right]=0.$$ 1 pont

Az egészrész értelmezése miatt (6)-ból az következik, hogy $0 \le \frac{11x - 3 \cdot \sqrt{x}}{2x} < 1$, ahonnan a $2x > 0$ számmal való szorzással és rendezéssel ismét két egyenlőtlenséget kapunk:

(7) $$0 \le 11x - 3 \cdot \sqrt{x}$$

és

(8) $$9x - 3 \cdot \sqrt{x} < 0.$$ 1 pont

Az (7) egyenlőtlenség mindkét oldalát osztva a $\sqrt{x} > 0$ kifejezéssel, ebből a $0 \le 11 \cdot \sqrt{x} - 3$ egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan rendezéssel és négyzetreemeléssel adódik, hogy

$$\frac{9}{121} \le x.$$

A (8) egyenlőtlenség mindkét oldalát osztjuk a $3 \cdot \sqrt{x} > 0$ kifejezéssel, a művelet eredményeként adódik a $3 \cdot \sqrt{x} - 1 < 0$ egyenlőtlenség, majd ebből rendezés és négyzetreemelés után

$$x < \frac{1}{9}.$$

Ezért, ha $n = 0$, vagy $n = -3$, akkor a $\left[\frac{11x - 3 \cdot \sqrt{x}}{2x}\right] = \sqrt{4n^2 + 12n}$ egyenlet megoldásai az

$$\frac{9}{121} \le x < \frac{1}{9}$$

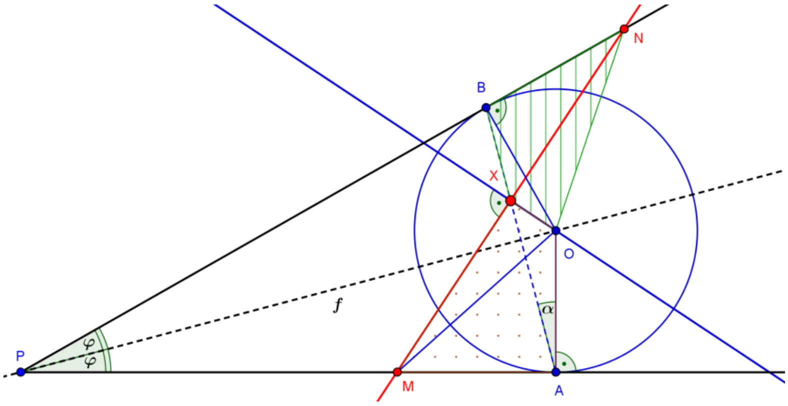
egyenlőtlenségeknek megfelelő valós számok. 1 pont

Minden esetet megvizsgáltunk és azt kaptuk, hogy az $n \in Z$ szám értékei csak az $n_1 = 1; n_2 = -4; n_3 = 0; n_4 = -3$ lehetnek, ezek közül $n = 1$ és $n = -4$ esetén az egyenlet megoldásai az $[1; 9[$ intervallumba tartozó valós számok, míg $n = 0$ és $n = -3$ esetén az egyenlet megoldásai a $\left[\frac{9}{121}; \frac{1}{9}\right[$ intervallumba tartozó valós számok. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Egy szög szárait az O középpontú kör az A és B pontokban érinti.
Az AB szakasz egy belső X pontjában az OX egyenesre állított merőleges a szög szárait az M és N pontokban metszi.
Bizonyítsa be $MX = NX$!

<u>Megoldás:</u> jelöléseink az ábrán láthatók.



Tekintettel arra, hogy OX merőleges MN-re, elegendő bizonyítani, hogy az MNO háromszög egyenlőszárú, azaz $OM = ON$, illetve $OMN\angle = ONM\angle$. 1 pont

Mivel a kör érinti a 2φ-vel jelölt szög szárait, ezért a kör O középpontja csak a 2φ szög f szögfelezőjére illeszkedhet. 1 pont

A szögfelező minden pontja egyenlő távol van a szögszáraktól, ezért $OA = OB$, vagyis az OAB háromszög egyenlő szárú.
Ez azt is jelenti, hogy az ábra $OAB\angle = \alpha$ szögére

$$OAB\angle = OBA\angle = \alpha .$$ 1 pont

Az $OAMX$ csúcsai az OM szakasz, mint átmérő fölé írt Thalész-körön vannak, erre illeszkednek az A és X pontok, ezért $OAMX$ szükségképpen húrnégyszög. 1 pont

Az $OAMX$ húrnégyszög körülírt körében az $OAX\angle$ és $OMX\angle$ szögek azonos ívhez tartozó kerületi szögek, ezért a kerületi szögek tétele és $OAX\angle = OAB\angle = \alpha$ alapján

(1) $$OMX\angle = \alpha .$$ 1 pont

Az $ONBX$ négyszögben a B és X pontok az ON szakasz, mint átmérő fölé írt Thalész-körön vannak, tehát $ONBX$ is húrnégyszög. 1 pont

Az $ONBX$ húrnégyszög körülírt körében az $OBX\angle$ és $ONX\angle$ szögek azonos ívhez tartozó kerületi szögek, ezért a kerületi szögek tétele alapján $OBX\angle = ONX\angle$. Mivel azonban

$$OBX\angle = OBA\angle = \alpha ,$$

ezért

(2) $$ONX\angle = \alpha .$$ 1 pont

Az (1) és (2) összefüggések szerint az OMN háromszög két szöge egyenlő, ezért a háromszög egyenlő szárú, tehát

$$OM = ON,$$

ezek a szakaszok az OMN egyenlő szárú háromszög szárai. 1 pont

Az OMN egyenlő szárú háromszögben a szárak O metszéspontjából az MN alapra bocsátott OX merőleges felezi az alapot, azaz

$$MX = NX,$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani. 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

a) a bizonyításhoz felhasználhatjuk, hogy $AXM\angle = BXN\angle$, mert csúcsszögek. Mivel $OAMX$ húrnégyszög, ezért a kerületi szögek tétele alapján a húrnégyszög köré írt körben $AXM\angle = AOM\angle$, továbbá $ONBX$ szintén húrnégyszög, ezért a köré írt körben $BXN\angle = BON\angle$, így $AOM\angle = BON\angle$. Az AOM és BON derékszögű háromszögekben tehát két-két szög nagysága megegyezik, és ezért a harmadik szögek is egyenlők, ugyanakkor $OA = OB$, tehát a két háromszög egybevágó. Ebből következik, hogy $OM = ON$, ebből pedig a bizonyítandó állítás könnyen adódik.

b) megoldható koordináta-geometriai eszközökkel is, például oly módon, hogy a P pontot az origóban vesszük föl és a PA egyenest az x tengelynek választjuk.