# Oktatási Hivatal

**A 2014/2015. tanévi**
**Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny**
**első forduló**

**MATEMATIKA**

**II. KATEGÓRIA**
**(GIMNÁZIUM)**

**<u>Javítási–értékelési útmutató</u>**

1. Tekintsük azokat az ötjegyű számokat, amelyek az 5, 6, 7, 8 számjegyeket tartalmazzák és mindegyiket legalább egyszer. Mennyi ezeknek az ötjegyű számoknak az összege?

**Megoldás:** A megadott számjegyek között nem szerepel a 0, ezért mindegyik ugyanannyiszor fordul elő a keresett számokban mind az öt helyiértéken. 1 pont

Elegendő tehát megnézni, hogy a négy számjegy közül az egyik hányszor fordul elő egy rögzített helyiértéken. 1 pont

Kiválasztjuk az öt helyiérték közül azt a kettőt, ahova azonos számjegy kerül. Ez 10-féleképpen lehetséges, mivel $\binom{5}{2} = 10$. A megmaradt három helyre a másik három számjegy 6-féleképpen kerülhet. Így $10 \times 6 = 60$ lehetőség van. 3 pont

Mivel az 5,6,7,8 jegyek mindegyike 60-szor fordul elő mind az öt helyiértéken, ezért a feladatban említett számok összege $60 \cdot (5 + 6 + 7 + 8) \cdot 11111 = 17333160$. 2 pont

Összesen 7 pont

A feladat szövege úgy is érthető, csak az a fontos, hogy az 5, 6, 7, 8 szerepeljen a számban, az ötödik jegy bármi lehet. Ha a versenyző így értette a feladatot, megoldásának pontozása az alábbi:

A hiányzó számjegy lehet i) az 5, 6, 7, 8 valamelyike; ii) a 0; iii) az 1, 2, 3, 4, 9 valamelyike. A kérdéses számok összegének kiszámolásához elegendő meghatározni, hogy a különböző számjegyek hányszor szerepelnek egy adott helyiértéken. 2 pont

i) Ebben az esetben a számok összege 17333160 az előző megoldás alapján. 2 pont

ii) A 0 nem állhat a szám elején és az összegben sem számít. Mivel minden jegy különböző, ezért az 5, 6, 7, 8 mindegyike $4!=24$ esetben áll a 10000-esek helyén. A többi helyiérték esetén a szám első jegye 3-féle lehet, a további jegyek sorrendje $3!$, így $3 \cdot 3! = 18$ lehetőség van. Ebben az esetben a számok összege

$$24 \cdot (5 + 6 + 7 + 8) \cdot 10000 + 18 \cdot (5 + 6 + 7 + 8) \cdot 1111 = 6759948. \qquad \text{2 pont}$$

iii) Minden jegy különböző és bármely helyiértéken állhat. Az 5, 6, 7, 8 jegyek közül egyet véve egy rögzített helyiértéken a további számok 4! sorrendben állhatnak és az ötödik jegy 5-féle lehet, ez $5 \cdot 4! = 120$ lehetség. Az 1, 2, 3, 4, 9 jegyek közül egyet véve egy rögzített helyiértéken a további számok 4! sorrendben állhatnak, ez 24 lehetőség. Ebben az esetben a számok összege

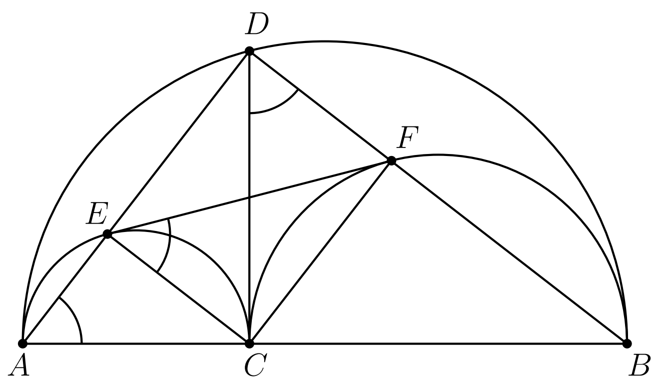
$$120 \cdot (5+6+7+8) \cdot 11111 + 24 \cdot (1+2+3+4+9) \cdot 11111 = 39732936. \qquad \text{2 pont}$$

A számok összege tehát 17333160+6759948+39732936=63826044.

Összesen 7 pont

2. Legyen $C$ az $AB$ szakasz belső pontja. Az $AB$ szakasz azonos oldalára emeljük az $AB$, $AC$ és $CB$ átmérőjű félköröket. A $C$ ponton át az $AB$-re emelt merőleges egyenes az $AB$-re emelt félkörívet a $D$ pontban metszi. Az $AD$ szakasz és az $AC$-re emelt félkörív metszéspontja $E$, a $BD$ szakasz és a $CB$-re emelt félkörív metszéspontja $F$. Igazoljuk, hogy az $EF$ egyenes az $AC$-re illetve $CB$-re emelt félkörívek közös érintője lesz.

**Megoldás:** Thalesz tétele alapján $ADB\angle = AEC\angle = CFB\angle = 90°$. 1 pont
A $CEDF$ négyszög tehát téglalap. 1 pont
A téglalap szimmetrikus az oldalainak felezőmerőlegesére, így $FDC\angle = CEF\angle$. 1 pont
Másrészt $FDC\angle = DAB\angle$, hiszen merőleges szárú hegyesszögek. 1 pont
Tekintsük az $AEC$ háromszög köré írt kört és abban az $EC$ húrhoz tartozó $DAB\angle$ kerületi szöget. Imént azt kaptuk, hogy $CEF\angle = DAB\angle$, ebből az következik, hogy $CEF\angle$ az $EC$ húrhoz tartozó érintő szárú kerületi szög, azaz $EF$ érintője az $AEC$ háromszög köré írt körnek. 2 pont
Ugyanígy igazolható, hogy $EF$ érinti a $CB$-re emelt félkörívet is. 1 pont




Összesen 7 pont

3. Legyen $a_1 = 1$, a sorozat további elemeit a következő összefüggés határozza meg:

$$a_{n+1}a_n = 4(a_{n+1} - 1), \quad n \text{ pozitív egész}$$

Igazoljuk, hogy a sorozat első 2025 darab tagjának szorzata nagyobb, mint $2^{2014}$.

**Megoldás:** A képzési szabály alapján a sorozat első néhány eleme:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{6}{4}, \quad a_4 = \frac{8}{5}, \quad a_5 = \frac{10}{6}, \quad \dots \qquad \text{1 pont}$$

A sorozat első tagjait tekintve kialakulhat a sejtés, hogy $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. 1 pont

Kezdő lépés: ha $n = 1$, akkor a definíció alapján $a_1 = 1$ és valóban $\frac{2\cdot 1}{1+1} = 1$. 1 pont

Indukciós lépés: feltesszük, hogy az állítás igaz $n$-re és ennek segítségével bebizonyítjuk $n+1$-re. Az alábbi számolásban először $a_{n+1}$-et kifejezzük a feladatban megadott rekurzív összefüggés segítségével, alkalmazzuk az indukciós feltevést, majd kiszámoljuk $a_{n+1}$-et és megkapjuk a bizonyítandót.

$$a_{n+1} = \frac{4}{4 - a_n} = \frac{4}{4 - \frac{2n}{n+1}} = \frac{4}{\frac{4n+4-2n}{n+1}} = \frac{2(n+1)}{n+2}. \qquad \text{2 pont}$$

A sorozat első 2025 tagjának szorzata így könnyen számolható:

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{2\cdot 2}{3} \cdot \frac{2\cdot 3}{4} \cdot \frac{2\cdot 4}{5} \cdot \frac{2\cdot 5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2\cdot 2025}{2026} = \frac{2^{2025}}{2026} \qquad \text{1 pont}$$

Most igazoljuk, hogy ez nagyobb, mint $2^{2014}$:

$$\frac{2^{2025}}{2026} = 2^{2014} \cdot \frac{2^{11}}{2026} = 2^{2014} \cdot \frac{2048}{2026} > 2^{2014} \qquad \text{1 pont}$$

Összesen 7 pont

4. Az $ABC$ háromszög kerülete 12 cm, területe 6 cm$^2$. Legyen $P$ az $ABC$ háromszög egy belső pontja. A $P$ pontnak a $BC$, $CA$ és $AB$ oldalak egyeneseire vonatkozó merőleges vetületei legyenek rendre $D$, $E$ és $F$. Tekintsük az alábbi összeget

$$S = \frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}.$$

(a) Határozzuk meg $S$ minimális értékét.

(b) A háromszög mely $P$ belső pontjára lesz $S$ értéke minimális?

**Megoldás:** Jelölje a háromszög oldalait a szokásos módon $a$, $b$, és $c$ és legyen továbbá $PD = x$, $PE = y$ és $PF = z$. Ezen jelölésekkel

$$S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$$

Az $ABC$ háromszög $T$ területe az $ABP$, $BCP$ és $CAP$ háromszögek területének összegével egyenlő. Így $2T = ax + by + cz = 12\text{cm}^2$. 1 pont

Mivel $T$ rögzített, ezért $S$ pontosan akkor lesz minimális, amikor $2TS$, ezért vizsgáljuk ez utóbbit:

$$2TS = (ax + by + cz)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \qquad \text{2 pont}$$

A szorzást elvégezzük és kihasználjuk, hogy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2:

$$2TS = a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + bc\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + ca\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq$$

$$\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2 = (12\text{cm})^2 \qquad 2 \text{ pont}$$

A becslés során használt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $x = y$. $2TS$ és egyúttal $S$ tehát akkor lesz minimális, ha $x = y = z$, azaz $P$ a háromszög beírt körének középpontja. Mivel $2T = 12\text{cm}^2$ és $2TS$ minimumának értéke $(12\text{cm})^2$, ezért $S$ minimális értéke 12. 2 pont

Összesen 7 pont

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^2, \quad \sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

**Megoldás:** Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 y + \cos^2 y = 1$, ezért a kitűzött egyenletek összegéből a következőt kapjuk:

$$x^2 + y^2 = 2 \tag{1}$$

1 pont

A feladatban szereplő egyenletek megfelelő oldalainak a különbségét vizsgáljuk és felhasználjuk, hogy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ és $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$. Ekkor

$$\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + (1 - \sin^2 y) - \sin^2 y = y^2 - x^2,$$

amiből a következőt kapjuk:

$$2\sin^2 x + x^2 = 2\sin^2 y + y^2 \tag{2}$$

1 pont

Az (1)-es egyenletből következik, hogy $x$ és $y$ is a $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ intervallumban van. (Ugyanezt megkaphatjuk közvetlenül a kiindulási egyenletekből is, hiszen $-1 \leq \sin x \leq 1$ és $-1 \leq \cos x \leq 1$. ) 1 pont

Ha $x$ és $y$ kielégítik (1)-et, akkor az abszolút értékük is megoldás. Ugyanez igaz a (2) egyenletre is, mivel a változók második hatványon szerepelnek, illetve a szinusz függvény páratlan és az is a négyzeten szerepel. 1 pont

Használjuk ki, hogy $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, a $2\sin^2 x$ és $x^2$ függvény egyaránt szigorúan monoton növő a $[0; \sqrt{2}]$ intervallumon, tehát az összegük is. 1 pont

Tehát (1) és (2) csak akkor teljesülhet, ha $|x| = |y|$. 1 pont

Ezt (1)-gyel összevetve a következő négy $(x; y)$ megoldáspárt kapjuk:

$$(1; 1) \quad (1; -1) \quad (-1; 1) \quad (-1; -1). \qquad 1 \text{ pont}$$

Összesen 7 pont