A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
harmadik, döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA

Javítási–értékelési útmutató

1. Az x, y, z olyan pozitív egészek, amelyekre az

$$\frac{x(y+1)}{x-1}, \quad \frac{y(z+1)}{y-1}, \quad \frac{z(x+1)}{z-1}$$

hányadosok mindegyike pozitív egész szám. Mi az xyz szorzat lehetséges legnagyobb értéke?

Megoldás: A feladatban szereplő hányadosok nevezője nem lehet 0, ezért x, y, z mindegyike legalább 2. 1 pont

Mivel a szomszédos számok relatív prímek, ezért teljesül, hogy

$$x-1|y+1, \quad y-1|z+1, \quad z-1|x+1.$$ 2 pont

Használjuk ki, hogy $a|b$-ből következik, hogy $a \leqslant b$, így

$$x \leqslant y+2 \leqslant z+4 \leqslant x+6$$

Az így nyert összefüggésben nem lehet mindenhol egyenlőség, mert akkor $x = x+6$ lenne. 2 pont

Ha például $z-1 < x+1$, akkor $z-1|x+1$ miatt $2(z-1) \leqslant x+1$. Ekkor $2z \leqslant x+3 \leqslant y+5 \leqslant z+7$. Ebből $z \leqslant 7$, $y \leqslant 9$, $x \leqslant 11$, azaz $xyz \leqslant 7 \cdot 9 \cdot 11 = 693$.

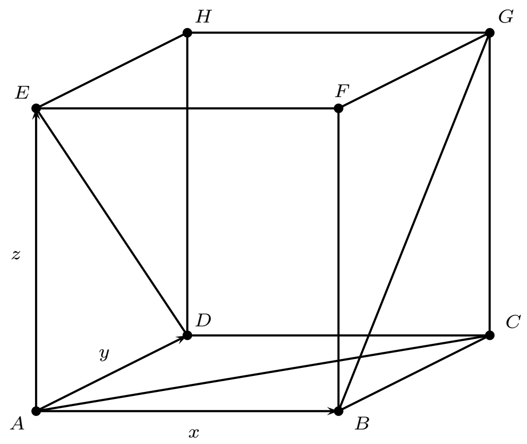
Hasonlóan kapjuk $y-1 < z+1$-ből hogy $y \leqslant 7$, $x \leqslant 9$, $z \leqslant 11$, vagy $x-1 < y+1$-ből hogy $x \leqslant 7$, $z \leqslant 9$, $y \leqslant 11$.

A feladatban keresett N értéke tehát 693 és ezt az xyz szorzat el is éri például az $x = 7$, $y = 11$, $z = 9$ esetben.

2 pont

Összesen 7 pont

2. Tekintsük egy kocka három olyan lapátlójának egyenesét, amelyek páronként kitérőek. Az e egyenes az iménti három egyenes mindegyikével ugyanakkora szöget zár be. Mekkora lehet ez a szög?



Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit. Először megmutatjuk, hogy a feladat szövegének megfelelően csak lényegében egyféle lehetőségünk van kijelölni három lapátlót. Ezek az ábrán a BG, AC és DE.

Legyen az egyik lapátlót tartalmazó lap az $ABCD$. Még két további lapátló kell, ezek nem lehetnek mindketten a szemben levő lapon, ezért egyikük lapja az $ABCD$-re merőleges, legyen ez a $BCGF$. Ezen két lapon csak úgy tudunk kitérő lapátlókat felvenni, ha a közös BC él végpontjaiból egy-egy indul. Tegyük fel, hogy az egyik az AC, a másik a BG. A megmaradt lapátlók közül vagy DE-t, vagy FH-t választhatjuk, e két eset forgatással egymásba vihető, ezért válasszuk ED-t. Megkaptuk, hogy lényegében egyetlen módon lehetséges kiválasztani három lapátlót úgy, hogy azok páronként kitérőek legyenek. 2 pont

Bevezetünk három, páronként egymásra merőleges egységvektort. Legyen $\overrightarrow{AB} = \underline{x}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{y}$, $\overrightarrow{AE} = \underline{z}$. A keresett e egyenes $\underline{v}$ irányvektora legyen $\underline{v} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{y} + \gamma\underline{z}$. A kijelölt lapátlóink irányvektorai $\overrightarrow{BG} = \underline{y} + \underline{z}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{x} + \underline{y}$ és $\overrightarrow{DE} = \underline{z} - \underline{y}$. Mivel $|\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{DE}|$, ezért e akkor zár be mindegyikkel ugyanakkora szöget, ha $\underline{v}$ skalárszorzatának abszolút értéke mindhárommal ugyanakkora.

$$\underline{v} \cdot \overrightarrow{BG} = \beta + \gamma, \quad \underline{v} \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha + \beta, \quad \underline{v} \cdot \overrightarrow{DE} = \gamma - \beta. \qquad \text{1 pont}$$

Vizsgáljuk a $|\beta + \gamma| = |\gamma - \beta|$ feltételt. i) Ha $\beta + \gamma = \gamma - \beta$, akkor $\beta = 0$. Két lehetőség maradt: i1) ha $\gamma = \alpha$, ekkor e párhuzamos AF-fel és az AFC illetve BDG szabályos háromszögek alapján minden kijelölt lapátlóval 60°-os szöget zár be; i2) ha $\gamma = -\alpha$, ekkor e párhuzamos BE-vel és az EGB illetve DEB szabályos háromszögek alapján minden kijelölt lapátlóval 60°-os szöget zár be. 2 pont

ii) Ha $\beta + \gamma = \beta - \gamma$, akkor $\gamma = 0$. Most is két lehetőség maradt: ii1) $\beta = \alpha + \beta$, azaz $\alpha = 0$, ekkor e párhuzamos AD-vel és nyilván minden kijelölt lapátlóval 45°-os szöget zár be; ii2) $-\beta = \alpha + \beta$, ekkor e párhuzamos a D-n és BC felezőpontján áthaladó egyenessel. Legyen a $\underline{v}$-vel párhuzamos, a feltételeinknek megfelelő $\underline{w} = 2\underline{x} - \underline{y}$. Ekkor a lapátlók irányvektorainak hossza $\sqrt{2}$, $|\underline{w}| = \sqrt{5}$, $\underline{w}$ skalárszorzatának abszolút értéke minden lapátló vektorral 1. Így a bezárt szög koszinuszának értéke $\frac{1}{\sqrt{10}}$, amiből a bezárt szög nagysága $\approx 71.6°$. 2 pont

Összefoglaljuk a kapott megoldásokat. Négy irányú lehet az e egyenes, ezek közül kettő $60°$-ot, egy $45°$-ot, egy pedig $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} \approx 71.6°$-ot zár be a feladatban meghatározott három lapátlóval.

Összesen 7 pont

3. Legyenek $x_1, x_2, ..., x_{2015}$ valós számok. Ugyanezen számok valamely $y_1, y_2, ..., y_{2015}$ permutációjára teljesül, hogy

$$3y_1 - x_1 = 2x_2, \quad 3y_2 - x_2 = 2x_3, \quad ..., \quad 3y_{2015} - x_{2015} = 2x_1$$

Bizonyítsuk be, hogy ez csak úgy lehet, ha minden x_i ugyanakkora.

Megoldás: Az indexek ciklikussága miatt képzelhetjük úgy a feladatot, hogy egy szabályos 2015 szög csúcsaiban vannak az $x_1, x_2, ..., x_{2015}$ valós számok, a sokszög x_i és x_{i+1} közti oldalára ráírjuk az y_i számot. A feltételt kissé átalakítva

$$y_i = \frac{x_i + 2x_{i+1}}{3}, \quad (i = 2015 - \text{re } \ i + 1 = 1)$$

így a sokszög minden oldalán a hozzá tartozó csúcsok súlyozott számtani közepe áll.

2 pont

Tekintsük az $x_1, x_2, ..., x_{2015}$, számok közül a legnagyobbat, ez forduljon elő a számok között n alkalommal és legyen értéke M. Ekkor az y_i számok között is n alkalommal látjuk M-et. 2 pont

Az ilyen éleket, ahol az y-beli szám értéke M, nevezzük maximálisnak. Egy maximális él mindkét végén álló x-beli szám értéke M. n darab maximális él és ezeknek $2n$ darab –nem feltétlenül különböző– végpontja van. A sokszögnek n darab csúcsához írtunk M-et, mindegyikbl legfeljebb kettő maximális él indulhat. Azaz minden M értékű x-beli számból 2 maximális él indul. Így a maximális élek kört alkotnak, ami csak úgy lehet, ha $n = 2015$, azaz minden szám ugyanakkora. 3 pont

Összesen 7 pont

2. megoldás: A feladatban megadott feltételeket rendezzük át $3y_i = x_i + 2x_{i+1}$ alakra. Emeljük ezen egyenletek mindkét oldalát négyzetre, majd adjuk össze mindegyiknél a bal és jobb oldalakat:

$$9\sum_{i=1}^{2015} y_i^2 = 5\sum_{i=1}^{2015} x_i^2 + 4\sum_{i=1}^{2015} x_i x_{i+1}.$$ 3 pont

Mivel

$$\sum_{i=1}^{2015} y_i^2 = \sum_{i=1}^{2015} x_i^2,$$

ezért rendezve

$$4\sum_{i=1}^{2015} x_i^2 = 4\sum_{i=1}^{2015} x_i x_{i+1}.$$

Ezt kettővel osztva, majd egy oldalra rendezve:

$$2\sum_{i=1}^{2015} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{2015} x_i x_{i+1} = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + ... + (x_{2015} - x_1)^2 = 0. \qquad \text{3 pont}$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha ciklikusan minden x-beli elem egyenlő a két szomszédjával, tehát az összes szám is egyenlő. 1 pont