A 2014/2015. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA

(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Javítási-értékelési útmutató

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül** az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 19. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2014. november — A versenybizottság

1. feladat

Mely 1-nél nagyobb egész számok lehetnek két egymást követő n^2+3 alakú szám közös osztói?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a k természetes szám osztója n^2+3-nak és $(n+1)^2+3$-nek is. Ekkor k osztója a különbségüknek is, vagyis $2n+1$-nek is. (2 pont)

Ekkor k ugyancsak osztója az $n(2n+1)-2(n^2+3)=n-6$ számnak, és így $(2n+1)-$ $-2(n-6)=13$-nak is. Tehát ha $k>1$, akkor csak $k=13$ lehet. (3 pont)

Másrészt a 13 szám valóban megfelelő, mert $n=6$-ra 13 osztója az $n^2+3=39$ és az $(n+1)^2+3=52$ számnak is. (2 pont)

Megjegyzés: A 13 számhoz n^2+3 és $2n+1$ másféle kombinációi útján is eljuthatunk (például $4(n^2+3)-(2n-1)(2n+1)=13$), a megoldás középső részlete ezek bármelyikével teljes értékű.

2. feladat
Egy háromszög oldalszakaszain felvettünk egy-egy pontot úgy, hogy az ezek összekötésével keletkező négy részháromszög területe egyenlő. Mutassuk meg, hogy a pontok az oldalak felezőpontjai.

Első megoldás: Legyenek az ABC háromszög AB, BC, AC oldalán felvett pontok rendre C_1, A_1, B_1. Legyen még $AC_1/AB = x$, $BA_1/BC = y$, és $CB_1/CA = z$. A háromszög területére vonatkozó képlet alapján

$$\frac{T_{AB_1C_1}}{T_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1 \cdot \sin\alpha}{AB \cdot AC \cdot \sin\alpha} = (1-z)\cdot x = 1/4\,.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $(1-x)\cdot y = 1/4$, valamint $(1-y)\cdot z = 1/4$. (3 pont)

Az első egyenletből z-t kifejezve majd a harmadikba helyettesítve $(1-y)\cdot(1-1/(4x)) = 1/4$, azaz $1-y = x/(4x-1)$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve x-re az

$$(1-x)\,\frac{3x-1}{4x-1} = \frac{1}{4}$$

egyenlet adódik. Innen átrendezéssel $4x^2 - 4x + 1 = 0$, amit egyedül az $x = 1/2$ érték elégít ki. (3 pont)

Ezt az egyenletekbe visszahelyettesítve $y = z = 1/2$, vagyis a pontok valóban az oldalak felezőpontjai. (1 pont)

Második megoldás: Használjuk az előző megoldásban bevezetett jelöléseket. Válasszuk meg az egységet úgy, hogy az ABC háromszög területe éppen 1 legyen. Ekkor az AB_1C_1, BC_1A_1, CB_1A_1 háromszögek mindegyikének területe 1/4, és rendre egyenlő az $x(1-z)$, $y(1-x)$, $z(1-y)$ értékekkel. (3 pont)

A számtani és mértani közép közötti egyelőtlenségek alapján

$$\frac{3}{2} = \sqrt{T_{AB_1C_1}} + \sqrt{T_{BC_1A_1}} + \sqrt{T_{CB_1A_1}} \le \frac{x+(1-z)}{2} + \frac{y+(1-x)}{2} + \frac{z+(1-y)}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

(3 pont)

Egyenlőség csak úgy állhat, ha $x = 1-z$, $y = 1-x$, és $z = 1-y$, ahonnan $x = y = z = 1/2$ adódik. Az osztópontok tehát felezőpontok. (1 pont)

3. feladat
A $p < q$ páratlan prímek az $n!$ prímtényezős felbontásában azonos kitevőn szerepelnek. Igazoljuk, hogy ekkor $n < p(p+1)/2$.

Megoldás: A p prímszám kitevője az $n!$ felbontásában

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots\,,$$

ahol $[x]$ az x szám egészrészét jelöli, és az összegzést addig kell folytatni, amíg az egészrész nulla nem lesz. (2 pont)

A feltevés szerint $p < q$, így minden i kitevőre

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] \geq \left[\frac{n}{q^i}\right].$$

Ezért p és q kitevője csak úgy egyezhet meg, ha minden $i \geq 1$-re

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] = \left[\frac{n}{q^i}\right]$$

teljesül. (1 pont)

Jelölje k az $[n/p]$ és $[n/q]$ közös értékét, ekkor tehát

$$kp \leq n < (k+1)p \quad \text{és} \quad kq \leq n$$

érvényes. (1 pont)

Mivel $p < q$ páratlan prímek, azért $p + 2 \leq q$. Emiatt a fenti egyenlőtlenségekből

$$k(p+2) \leq kq \leq n < (k+1)p\,,$$

majd ebből $2k < p$, azaz $2k \leq p - 1$ következik. (2 pont)

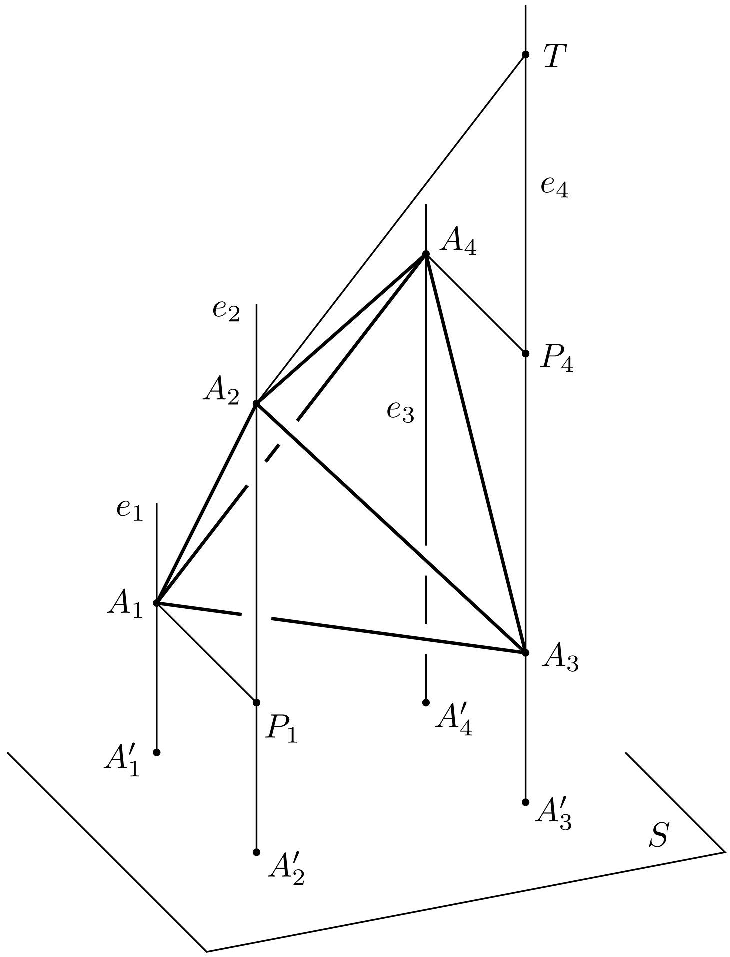
Ezeket felhasználva valóban $2n < (2k+2)p \leq (p+1)p$, amit bizonyítani akartunk. (1 pont)

4. feladat

Vetítsünk egy szabályos tetraédert merőlegesen a tér valamely síkjára. Mutassuk meg, hogy ha a tetraéder vetülete paralelogramma, akkor négyzet.

Első megoldás: A tetraéder csúcsait jelölje A_1, A_2, A_3, A_4, merőleges vetületeiket az S síkra A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 úgy, hogy ezek ebben a körüljárási sorrendben paralelogrammát alkossanak. Feltehetjük, hogy a tetraéder mindegyik csúcsa S-nek ugyanazon az oldalán van, mert a síkot önmagával párhuzamosan eltolva az eredetivel egybevágó vetületet kapunk. Legyen d_i az A_i távolsága S-től, e_i az A'_i-ben S-re állított merőleges, P_1 az A_1 merőleges vetülete az e_2 egyenesre, P_4 pedig az A_4 merőleges vetülete az e_3 egyenesre.

Az A_1P_1, $A'_1A'_2$, $A'_4A'_3$, A_4P_4 irányított szakaszok párhuzamosak, egyenlő hosszúak és egyenlő állásúak. Tekintsük azt az eltolást, amely A_1-et A_4-be, és így P_1-et P_4-be viszi. Ennél az e_2 egyenes e_3-ba megy (hiszen ez a P_4-en át e_2-vel húzott párhuzamos). Ezért az A_2 pont képe rajta van e_3-on, távolsága A_4-től pedig a tetraéder élhossza. Ilyen pont (legfeljebb) kettő van: az egyik az A_3, a másik pedig az A_3 pont T tükörképe P_4-re. De A_2 nem mehet A_3-ba, mert akkor A_2A_3 párhuzamos lenne A_1A_4-gyel, és így a tetraéder csúcsai egy síkban lennének. Ezért A_2 képe T, azaz $d_2 - d_1 = d_4 - d_3$ (az A_2P_1, illetve a TP_4 hossza). (3 pont)



A paralelogramma másik párhuzamos oldalpárját használva az analóg gondolatmenet azt adja, hogy $d_4 - d_1 = d_2 - d_3$. A két egyenletből $d_2 = d_4$ és $d_1 = d_3$ adódik. Ezért A_3-nak az e_2 egyenesre eső merőleges vetülete a P_1 ponttal esik egybe. Az $A_1P_1A_2$ és az $A_3P_1A_2$ derékszögű háromszögek egybevágók, mert átfogóik a tetraéder élei, amik egyenlők, egy-egy befogójuk pedig közös. Ezért a másik két befogó hossza is egyenlő, azaz $A_1P_1 = A_3P_1$. Emiatt $A_1'A_2' = A_3'A_2'$, és ezzel beláttuk, hogy az $A_1'A_2'A_3'A_4'$ paralelogramma rombusz.

(3 pont)

Mivel $d_1 = d_3$, ezért az A_1A_3 szakasz párhuzamos az S síkkal, és így a vetületének hossza a tetraéder élhossza. Ugyanez érvényes az A_2A_4 szakaszra is, és így a rombusz átlói egyenlők, tehát négyzetről van szó. (1 pont)

Második megoldás: Foglaljuk a szabályos tetraédert egy kockába: legyenek a kocka egy csúcsból kiinduló élvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, a szabályos tetraéder csúcsaiba pedig mutassanak a $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektorok. (2 pont)

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok merőleges vetületei a megadott síkra legyenek $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$; ekkor a tetraéder csúcsaiba mutató vektorok vetülete rendre $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}'+\mathbf{b}'$, $\mathbf{a}'+\mathbf{c}'$ és $\mathbf{b}'+\mathbf{c}'$. Ezek a vektorok a paralelogramma egyik csúcsából mutatnak a paralelogramma csúcsaiba.

(2 pont)

Válasszuk meg a jelölést úgy, hogy a paralelogramma egyik oldalvektora $\mathbf{a}' + \mathbf{b}'$ legyen. Ekkor a vele szemben fekvő oldalvektor $(\mathbf{b}' + \mathbf{c}') - (\mathbf{a}' + \mathbf{c}') = \mathbf{b}' - \mathbf{a}'$. Ez a két vektor csak akkor lehet egyenlő vagy egymás (-1)-szerese, ha $\mathbf{a}' = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{b}' = \mathbf{0}$, vagyis ha a kocka egy élének két végpontja ugyanarra a pontra vetül. (1 pont)

Ekkor pedig a kocka vetülete – és vele együtt a szabályos tetraéder vetülete is – négyzet. (2 pont)

Harmadik megoldás: A vetületparalelogramma két átlója a tetraéder két kitérő élének a vetülete. Az átlók felezőpontja egybeesik, ezért a vetítés iránya párhuzamos a két kitérő él felezőpontját összekötő egyenessel, azaz a tetraéder egyik éltengelyével. (2 pont)

A szabályos tetraédert az éltengely körüli $90°$-os forgatás olyan tetraéderbe viszi, amely egy az éltengelyre merőleges síkra vonatkozó tükrözéssel is előállítható az eredeti tetraéderből. A két tetraédernek tehát azonos a vetülete. (3 pont)

A vetület ezért olyan négyszög, amelyet az átlói metszéspontja körüli $90°$-os forgatás önmagába visz, tehát négyzet. (2 pont)

5. feladat

Egy 2014 oldalú szabályos sokszög csúcsai valamilyen sorrendben P_1, $P_2, \ldots, P_{2014}$. Bizonyítsuk be, hogy a P_1P_2, P_2P_3, $\ldots$, $P_{2013}P_{2014}$, $P_{2014}P_1$ egyenesek között van két párhuzamos.

Első megoldás: Számozzuk meg a szabályos sokszög csúcsait pozitív körüljárás szerint az $1, 2, \ldots, 2014$ számokkal. Legyen a P_i csúcshoz írt szám a_i. A P_iP_{i+1} és a P_jP_{j+1} egyenes pontosan akkor párhuzamos, ha $a_i + a_{i+1}$ és $a_j + a_{j+1}$ vagy megegyezik, vagy pontosan 2014-gyel tér el egymástól. (2 pont)

Indirekt módon tegyük fel, hogy az adott egyenesek között nincs két párhuzamos, ekkor ezek a páronkénti összegek minden 2014-es maradékot pontosan egyszer adnak ki. (1 pont)

Tekintsük most az

$$(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2013} + a_{2014}) + (a_{2014} + a_1)$$

összeget. Mivel az $a_1, \ldots, a_{2014}$ számok pontosan az $1, \ldots, 2014$ számokkal egyeznek meg, ez az összeg $2014 \cdot 2015$, tehát osztható 2014-gyel. Másrészt az egyes zárójelekben szereplő összegek mind különböző maradékot adnak 2014-gyel osztva, ezért az összeg 2014-es maradéka egyenlő

$$0 + 1 + \ldots + 2013 = \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2014 \cdot 1006 + 1007$$

2014-es maradékával, vagyis nem nulla. A kapott ellentmondás igazolja az indirekt feltevés lehetetlenségét. (4 pont)

Második megoldás: Egy szabályos n oldalú sokszög oldalai és átlói pontosan n különböző irányt (párhuzamossági osztályt) határoznak meg. (2 pont)

Ezért ha – indirekt feltevéssel – a kérdéses egyenesek között nincs két párhuzamos, mind a 2014 lehetséges iránynak pontosan egyszer kell szerepelnie. (1 pont)

Számozzuk meg a szabályos sokszög csúcsait körüljárás szerint az 1-től 2014-ig terjedő egész számokkal. A sokszög átlóit és oldalait aszerint nevezzük párosnak, illetve páratlannak, hogy a két végpontjának a sorszáma páros vagy páratlan számban tér el egymástól. (Például az oldalak így mindannyian páratlanok.) Ha két átló vagy oldal párhuzamos, akkor a paritása azonos. Ezért beszélhetünk az irányaik paritásáról. (1 pont)

Tekintsük az egyik olyan szabályos 1007-szöget, amelyet minden második csúcs kiválasztásával kapunk. Ennek az 1007-szögnek az oldal- és átlóirányai az eredeti sokszög oldal- és átlóirányai közül pontosan a párosak, ezért páros irányból 1007 van. Következésképpen ugyancsak 1007 páratlan irány van. (1 pont)

Ezért a megadott egyenesek között is pontosan 1007 páratlan irányú kell legyen. Ugyanakkor a páratlan irányú egyenesek száma ennek ellentmondva páros, hiszen ahányszor a $P_1, P_2, \ldots$ ciklikus sorrend átvált párosról páratlanra, ugyanannyiszor kell páratlanról párosra váltania. (2 pont)