XIX. Román-Magyar Előolimpia

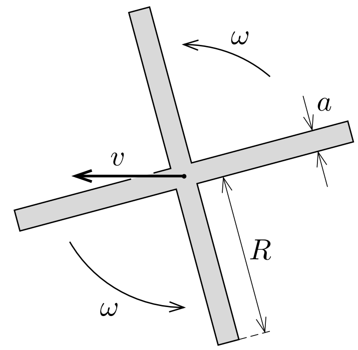
elméleti forduló

Budapest, 2016. május 25.

Fontos tudnivalók

- Az elméleti forduló időtartama 5 óra. Mindhárom feladat hibátlan megoldásával összesen 30 pontot lehet szerezni, a részpontszámok az egyes kérdéseknél zárójelben fel vannak tüntetve. Az egyes feladatokra kapható összpontszámok *különbözőek*.
- A részletes számolásokat a rendelkezésre álló fehér lapokon végezze! Az egyéb (füzetből kitépett, négyzetrácsos stb.) lapra írt megoldásokat nem tudjuk értékelni. Lehetőleg minél kevesebb szöveget használjon, megoldásait igyekezzen főleg egyenletekkel, számokkal, szimbólumokkal és grafikonokkal kifejezni! Ha azt szeretné, hogy megoldásának egy része ne kerüljön értékelésre, tegye zárójelbe azt a részt, és egy vonallal húzza át! (Az áthúzott, de helyes megoldást nem tudjuk értékelni.)
- Minden lapra írja rá a kódszámát, ami a három betűs országkódból (HUN vagy ROM) és egy egyjegyű sorszámból áll. A kódszám a feladatokat tartalmazó borítékokon is megtalálható. Ügyeljen rá, hogy *minden feladat megoldása külön lapra kerüljön*, mert a különböző feladatokat más-más javító fogja értékelni.
- Végeredményeit a feladatokhoz tartozó válaszlap megfelelő mezőjébe is írja be! Mindenképp szakítson időt a válaszlapok kitöltésére! Azon feladatokhoz tartozó mezőket, amelyekkel érdemben nem foglalkozott, hagyja üresen!
- A verseny vége előtt a megoldásait tartalmazó fehér lapokat, a hozzá tartozó válaszlapot és a feladatlapot is helyezze vissza a megfelelő (T1, T2 és T3) jelzésű borítékokba, azokat pedig a nagy borítékba.
- A verseny teljesen egyéni. A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön, valamint kétsoros (nem grafikus) számológépen kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, internet, számítógép, mobiltelefon stb.) *nem használható*.

1. Miért tér vissza a bumeráng? (8 pont)



Ez a feladat a bumerángok működési elvével foglalkozik. Bár a mozgás pontos leírása igen bonyolult, bizonyos egyszerűsítő feltevésekkel élve jól megérthető a bumerángok visszatérésének oka. A feladatban egy szimmetrikus, homogén tömegeloszlású, kereszt alakú bumerángot vizsgálunk (lásd az *ábrát*). Jelöljük a bumeráng teljes tömegét m-mel, karjainak hosszát R-rel, karjainak szélességét a-val ($a \ll R$), a karok vastagsága ezekhez a méretekhez képest elhanyagolható.

A bumerángot eldobjuk úgy, hogy síkja függőleges legyen. A bumeráng ω szögsebességgel forog a síkjára merőleges szimmetriatengelye körül, s eközben a középpontja vízszintes irányban v sebességgel halad. A szárnyakra a mozgás során olyan hidrodinamikai erő hat, amelynek iránya merőleges a szárnyak síkjára, és az ábrán jelölt forgásirány esetén az ábra síkjából kifelé mutat. A szárny egy kicsiny ΔA felületű darabkájára ható hidrodinamikai erőt az

$$F = \gamma v_\perp^2 \Delta A$$

alakban adhatjuk meg, ahol $v_\perp$ a levegő szárnyhoz viszonyított (relatív) sebességének a szárny élére merőleges komponense. A γ együttható értéke arányos a levegő (állandónak tekinthető) sűrűségével, ezen kívül pedig a bumeráng alakjától függ. A feladatban a nehézségi erőt és a közegellenállásból származó disszipációt mindvégig *hanyagoljuk el*!

1.1. Határozzuk meg a bumerángra ható eredő hidrodinamikai erő egy fordulatra vett időátlagát! A választ v, ω, R, a és γ segítségével adjuk meg!	(2,0 p)

1.2. Számítsuk ki a bumerángra ható eredő forgatónyomaték egy fordulatra vett időátlagát a bumeráng tömegközéppontjára vonatkoztatva! A választ v, ω, R, a és γ segítségével adjuk meg!	(2,0 p)

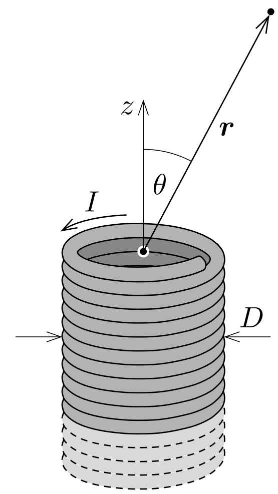
1.3. Mekkora legyen a bumeráng eldobásakor a $v/R\omega$ arány, hogy a bumeráng középpontja vízszintes síkú körpályán mozogjon? (Tételezzük fel, hogy a bumeráng $2\pi/\omega$ forgási periódusideje sokkal kisebb a körpályán való mozgás periódusidejénél.)	(2,5 p)

1.4. Adjuk meg a bumeráng középpontja által leírt pálya r sugarát γ-val és a bumeráng adataival kifejezve.	(1,0 p)

1.5. Ugyanabból az anyagból két geometriailag hasonló bumerángot készítünk: az egyik a másiknak minden lineáris méretében a felére kicsinyített mása. Hogyan viszonyul a megfelelően eldobott, körpályán mozgó bumerángok pályasugara a két esetben?	(0,5 p)

2. Ponttöltés mozgása mágneses monopólus terében (10 pont)

2.A. Mágneses mező a szolenoid vége közelében (3 pont)



Ebben a részben egy légmagos, nagyon hosszú, egyenes tekercs (szolenoid) mágneses mezőjét vizsgáljuk az egyik végének közelében. Használjuk az *ábrán* látható koordináta-rendszert (a szokásos z, r, θ koordinátákkal), melynek origója a szolenoid tengelyén (z-tengely), a tekercs végére illeszkedő síkban van. A tekercs átmérője D, benne állandó I erősségű áram folyik, menetsűrűsége (egységnyi hosszra jutó meneteinek száma) n.

A szolenoidon *kívül*, az $\boldsymbol{r}$ helyvektorral jellemzett pontban (ahol a helyvektor $|\boldsymbol{r}| = r$ hossza sokkal kisebb, mint a szolenoid hossza, de $r \gg D$) a mágneses mező indukcióvektora jó közelítéssel a következő alakban adható meg:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \lambda \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{1}$$

ami egy mágneses monopólus terével analóg.

2.A.1. Határozzuk meg a λ tényező értékét D, I, n és univerzális konstansok felhasználásával!	(1,0 p)

Egy igen hosszú, D_1 átmérőjű szolenoid menetsűrűsége n_1, benne I_1 erősségű áram folyik. Egy másik, ugyanilyen hosszú szolenoid ugyanezen adatai D_2 ($D_2 < D_1$), n_2 és I_2. A vékonyabb szolenoidot hosszának feléig koaxiálisan beledugjuk a másik tekercsbe.

2.A.2. Mekkora erőt fejt ki a vékonyabb szolenoid a vastagabbra?	(2,0 p)

2.B. Töltött részecske mozgása a tekercs végének közelében (7 pont)

Tekintsünk egy Q töltésű, m tömegű töltött részecskét, amely a szolenoid végének közelében mozog. A mágneses mező indukciójának helyfüggésére használjuk mindvégig az (1) egyenlettel megadott monopól-közelítést! A gravitáció hatása ebben a feladatban elhanyagolható.

A töltött részecske origóra vonatkoztatott $\boldsymbol{L}$ impulzusmomentum-vektora a mozgás során nem marad meg, azonban a

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + C\boldsymbol{e_r} \tag{2}$$

összefüggéssel definiált $\boldsymbol{J}$ vektor megmaradó mennyiség (itt C konstans, $\boldsymbol{e_r} = \boldsymbol{r}/r$ pedig az origótól a részecske felé mutató egységvektor).

2.B.1. Adjuk meg a C együttható értékét Q, λ és konstansok segítségével! *Útmutatás:* Szükségünk lehet az ún. kifejtési tételre, mely szerint $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$.	(2,0 p)

Megmutatható, hogy általános esetben a részecske a mozgása során olyan térgörbén mozog, amely egy kúppalástra illeszkedik. Ennek a kúppalástnak a csúcsa a koordináta-rendszerünk origójában található.

2.B.2. Írjunk fel egy egyenletet a kúppalást β félnyílásszögére a részecske kezdeti impulzusmomentumának L_0 nagysága, Q és λ segítségével! (1,0 p)

Tegyük fel, hogy a részecske kezdetben a z tengelyen, az origó fölött r_0 magasságban helyezkedik el, kezdősebessége v_0, sebessége pedig $\alpha_0 < 90°$ szöget zár be a $-z$ iránnyal.

2.B.3. Számítsuk ki, mekkora r_{min} távolságra közelíti meg a részecske az origót a további mozgása során! A választ r_0 és α_0 segítségével adjuk meg! (1,0 p)

2.B.4. A kezdeti helyzetéből mennyi idő alatt közelíti meg a részecske az origót r_{min} távolságra? Az eredményt r_0, v_0 és α_0 felhasználásával adjuk meg. *Útmutatás:* Vizsgáljuk a részecske gyorsulásának irányát! (2,0 p)

Belátható, hogy a (2) egyenlet jobb oldalán szereplő második tag az elektromágneses tér impulzusmomentumának felel meg, így a $\boldsymbol{J}$ vektor a részecskéből és az elektromágneses térből álló rendszer teljes impulzusnyomatékát jelenti. A kvantumelmélet szerint ennek a teljes impulzusmomentumnak egy tetszőleges irányra (például az $\boldsymbol{e_r}$ irányra) vett vetülete $\hbar/2$ egységekben kvantált. *Paul Dirac* 1931-ben felvetette, hogy ha létezne valahol az univerzumban egyetlen mágneses monopólus, az magyarázatot adna az elektromos töltés kvantáltságára.

2.B.5. Mekkora lenne ennek a mágneses monopólusnak a póluserőssége? (Póluserősség alatt az (1) összefüggésben szereplő λ mennyiség $4\pi/\mu_0$-szorosát értjük, ahol μ_0 a vákuum permeabilitása.) A választ univerzális állandókkal adjuk meg! (1,0 p)

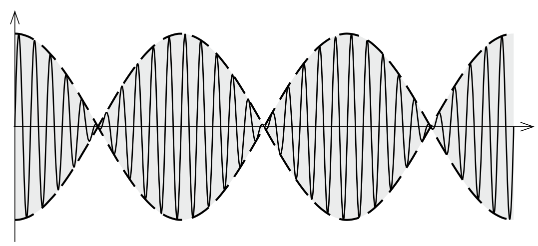
3. Lelassított fény (12 pont)

Ismert, hogy egy monokromatikus fényhullám terjedési sebessége közegben a c vákuumbeli fénysebesség n-ed része, ahol n a közeg törésmutatója. Diszperzív közegek esetén (azaz ha az anyag törésmutatója függ a fény frekvenciájától) az ω körfrekvenciájú monokromatikus hullámok terjedési sebessége továbbra is $c/n(\omega)$ (az ún. *fázissebesség*), azonban a hullámcsomagok terjedési sebessége (vagyis az információküldés sebessége) ettől eltérő érték (az ún. *csoportsebesség*). 1999-ben *L. V. Hau* és munkatársai a Nature folyóiratban olyan kísérletről számoltak be, melyben sikerült a fény csoportsebességét nátriumatomok ultrahideg gázában néhány m/s értékre csökkenteni. Ez a feladat a fény lelassításának elvével foglalkozik.

3.A. Hullámcsomag terjedése közegben (1,5 pont)

Tekintsük egy olyan hullámot, amely két azonos amplitúdójú, azonos polarizációjú, kicsit különböző körfrekvenciájú, monokromatikus, haladó síkhullám szuperpozíciója.

Legyen a két összetevő körfrekvenciája ω és $\omega + \Delta\omega$ (ahol $\Delta\omega \ll \omega$), hullámszámuk pedig rendre k és $k + \Delta k$ (itt $\Delta k \ll k$). Az eredő hullám felfogható úgy, mint egy olyan szinuszhullám, amelynek amplitúdója időben és térben is modulált (lásd az *ábrán* a szaggatott burkológörbét).



3.A.1. Határozzuk meg ennek a hullámszerűen terjedő amplitúdómodulációnak a v haladási sebességét (azaz a csoportsebességet) $\Delta\omega$-val és Δk-val kifejezve!	(0,5 p)

Egy elektromágneses hullámcsomag nem más, mint az ω körfrekvenca körüli szűk, $\Delta\omega$ körfrekvencia-intervallumban található monokromatikus síkhullámok szuperpozíciója. Belátható, hogy a hullámcsomag csoportsebességére is érvényes a **3.A.1.** részfeladatban kapott eredmény.

3.A.2. Fejezzük ki egy diszperzív közegben terjedő hullámcsomag v csoportsebességét a c vákuumbeli fénysebesség, az ω körfrekvencia és a közeg törésmutatójának frekvenciafüggését leíró $n(\omega)$ függvény segítségével!	(1,0 p)

3.B. Fény abszorpciója és diszperziója ritka közegben (7,5 pont)

Tekintsünk egy ritka közeget (gázt), amely semleges atomokból áll. A semleges atomokat úgy modellezhetjük, hogy a $+q$ töltésű, pontszerű atommagot egy r sugarú merev gömbnek tekinthető, $-q$ töltésű, homogén töltéseloszlású, a maghoz képest *könnyű*, m tömegű elektronfelhő veszi körül. (A $-q$ töltés és az m tömeg hányadosa éppen az elektron fajlagos töltése.)

3.B.1. Feltételezve, hogy az atommag és az elektronfelhő anyaga között a súrlódás elhanyagolható, adjuk meg az elektronfelhő atommag körüli kis rezgéseinek ω_0 saját(kör)frekvenciáját m, r, q és a vákuum ε_0 permittivitása segítségével!	(1,0 p)

Ha a ritka közegben egy ω körfrekvenciájú monokromatikus fényhullám terjed, a tér egy adott pontjában található atom elektronfelhőjét az időben $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ módon változó térerősség rezgőmozgásra kényszeríti. A továbbiakban használjuk a **3.B.1.** modellt azzal a kiegészítéssel, hogy a veszteségeket egy, az elektronfelhő középpontjának sebességével arányos, azzal ellentétes irányú $-\gamma m\dot{x}$ súrlódási erővel vesszük figyelembe, ahol γ a csillapítási tényező, x az elektronfelhő középpontjának és az atommagnak a távolsága, a fizikai mennyiségek fölé tett pont pedig az idő szerinti deriválást jelöli.

3.B.2. Írjuk fel az elektronfelhő mozgásegyenletét ω, ω_0, m, γ, q, E_0, valamint az x kitérés és annak deriváltjai segítségével! (A mágneses mező hatása elhanyagolható.) (0,5 p)

A γ csillapítási tényező miatt az elektronfelhő $x(t)$ kitérése és a fényhullám $E(t)$ elektromos térerőssége között fáziskülönbség alakul ki, ezért a hullám által szállított energia fokozatosan disszipálódik, így a fény intenzitása a közegben megtett z távolsággal exponenciálisan csökken:

$$I(z) = I_0 \mathrm{e}^{-\kappa(\omega) z},$$

ahol I_0 állandó, $\kappa(\omega)$ pedig a (frekvenciafüggő) *abszorpciós tényező.*

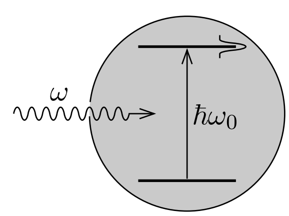
3.B.3. Térfogategységenként N atomot feltételezve fejezzük ki κ értékét N, ω, ω_0, m, γ, q és fizikai állandók segítségével! *Útmutatás:* Keressünk analógiát az elektromos térben rezgő elektronfelhő mozgása és egy alkalmasan választott váltóáramú áramkör viselkedése között! (2,5 p)

Az elektronfelhő kényszerrezgése során a semleges atomok időben harmonikusan változó elektromos dipólmomentumra tesznek szert, amelyet a $P(t)$ elektromos polarizációval (azaz dipólmomentum-sűrűséggel) jellemezhetünk. Ebben az időfüggő esetben a közeg (valós) relatív permittivitását az

$$\varepsilon_\mathrm{r} = 1 + \left\langle \frac{P(t)}{\varepsilon_0 E(t)} \right\rangle$$

összefüggéssel definiálhatjuk, ahol a $\langle \dots \rangle$ jelölés az időátlagolást jelenti.

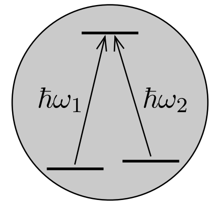
3.B.4. Határozzuk meg a közeg $n(\omega)$ törésmutatóját, feltételezve, hogy a közeg ritka (azaz törésmutatója 1-hez közeli szám)! A választ N, q, m, ε_0, γ, ω_0 és ω segítségével adjuk meg. (2,5 p)



A fenti klasszikus modellből a $\kappa(\omega)$ abszorpciós együtthatóra és az $n(\omega)$ törésmutatóra kapott eredményeink egyeznek a kvantummechanikai számolás eredményével. A kvantummechanikai képben a semleges atomot egy olyan kétállapotú rendszernek tekintjük, melynek alap- és gerjesztett energiaszintjeinek távolsága $\hbar\omega_0$. Ha az alapállapotban lévő atommal egy, ω_0 körfrekvenciához elegendően közeli ω körfrekvenciájú foton találkozik, akkor az bizonyos valószínűséggel az atomot a gerjesztett állapotba juttatja. Megmutatható, hogy a gerjesztés valószínűsége arányos a **3.B.3.** pontban meghatározott $\kappa(\omega)$ abszorpciós együtthatóval.

3.B.5. Az eddigi eredmények felhasználásával adjunk becslést az atom gerjesztett állapotának átlagos élettartamára γ segítségével! (Feltehetjük, hogy $\gamma \ll \omega_0$.) (1,0 p)

3.C. Lassú fény (3 pont)



A fény lelassításához olyan speciális, ritka gázt használnak, melynek atomjai háromállapotú rendszernek tekinthetők. A háromállapotú atom energiaszintjeinek elrendeződése az *ábrán* látható „Λ” alakú: a legnagyobb energiájú állapotból az atom átmehet az annál $\hbar\omega_1$ értékkel alacsonyabb energiájú alapállapotba vagy a $\hbar\omega_2$ értékkel kisebb energiájú köztes állapotba. Ez utóbbi állapot és az alapállapot közötti átmenet tiltott, azaz nem mehet végbe. A 2-es számú átmenetet egy folytonos működésű, ω_2 frekvenciájú lézerrel pumpálják, aminek következtében az atom folyamatosan energiát kap a lézertől.

Ennek a rendszernek a viselkedése klasszikusan jól modellezhető úgy, mintha a gáz kétféle (egyenként N részecskesűrűségben jelen lévő) kétállapotú atomból állna, melyek közül az egyik gerjesztéséhez $\hbar\omega_1$, a másikhoz $\hbar\omega_2$ energia szükséges. A pumpálás során folyamatosan betáplált energia miatt azonban a 2-es számú oszcillátor csillapítási tényezője negatív, $\gamma_2 = -\gamma$, míg a másiké pozitív, $\gamma_1 = \gamma$.

3.C.1. Legyen $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ és $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$, ahol $\gamma \ll \Delta\omega \ll \omega_0$. Mutassuk meg, hogy ha ebben az (optikailag pumpált) közegben egy ω_0 körfrekvenciájú elektromágneses síkhullám halad, akkor arra nézve a κ abszorpciós tényező értéke nagyon kicsi, a törésmutató pedig 1-hez nagyon közeli érték. (1,0 p)

Ha monokromatikus síkhullám helyett egy ω_0 körfrekvencia körüli hullámcsomagot indítunk az optikailag pumpált közegben, annak csoportsebessége a vákuumbeli fénysebességnél sokkal kisebb lehet. Ez történt *L. V. Hau* és munkatársai kísérletében is, amelyben $N = 8{,}0 \cdot 10^{13}\ \mathrm{cm}^{-3}$ sűrűségű nátriumgőzben terjedő hullámcsomagot vizsgáltak. A kísérletben a $\Delta\omega$ frekvenciakülönbség értéke $6{,}0 \cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$ volt.

3.C.2. Határozzuk meg a hullámcsomag v terjedési sebességét c, m, q N, $\Delta\omega$ és ε_0 segítségével! Adjuk meg a sebesség értékét számszerűen is! A vákuumbeli fénysebesség $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s, az elektron tömege $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, töltése $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, a vákuum dielektromos állandója pedig $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m. (2,0 p)
Útmutatás: A számolás során alkalmazzunk a $\gamma \ll \Delta\omega \ll \omega_0$ relációból következő közelítéseket!