

## FONTOS TUDNIVALÓK

- Az elméleti forduló időtartama 5 óra. A feladatok hibátlan megoldásával összesen 450 pontot lehet szerezni, a részpontszámok az egyes kérdéseknél zárójelben fel vannak tüntetve. Figyelem! Az összes feladathoz egyetlen, közös adattáblázat tartozik, ami a feladatokban szereplő konstansokat, fizikai állandókat tartalmazza (lásd a lap alját).
- A részletes számolásokat a rendelkezésre álló fehér lapokon végezd! Az egyéb (füzetből kitépett, négyzetrácsos stb.) lapra írt megoldásokat nem tudjuk értékelni. Lehetőleg minél kevesebb szöveget használj, megoldásaidat igyekezz főleg egyenletekkel, számokkal, szimbólumokkal és grafikonokkal kifejezni! Ha azt szeretnéd, hogy megoldásod egy része ne kerüljön értékelésre, tedd zárójelbe azt a részt, és egy vonallal húzd át! (Az áthúzott, de helyes megoldást nem tudjuk értékelni.)
- Minden lapra írd rá a nevedet! Ügyelj rá, hogy *minden feladat megoldása külön lapra kerüljön*, mert a különböző feladatokat más-más javító fogja értékelni.
- Végeredményeidet a feladatokhoz tartozó válaszlap megfelelő mezőjébe is írd be! Mindenképp szakíts időt a válaszlap kitöltésére! Azon feladatokhoz tartozó mezőket, amelyekkel érdemben nem foglalkoztál, hagyd üresen!
- A verseny teljesen egyéni. A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön, valamint kétsoros (nem grafikus) számológépen kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, internet, számítógép, mobiltelefon stb.) nem használható.

## FIZIKAI ÁLLANDÓK TÁBLÁZATA

vákuumbeli fénysebesség:  $c = 2,998 \cdot 10^8$  m/s

vákuum permeabilitása:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (V s)/(A m)

gravitációs állandó:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/(kg s<sup>2</sup>)

pion nyugalmi energiája:  $m_\pi c^2 = 139,57$  MeV

müon nyugalmi energiája:  $m_\mu c^2 = 105,66$  MeV

## HASZNOS MATEMATIKAI ÖSSZEFÜGGÉSEK

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

# KUNFALVI REZSŐ OLIMPIAI VÁLOGATÓVERSENY

1. forduló, elméleti rész  
Budapest, 2016. április 11.



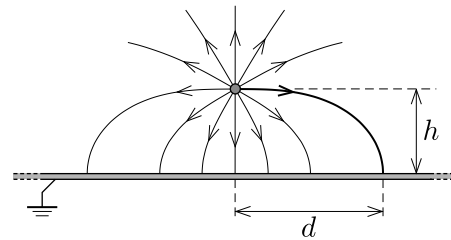
**1. feladat.** (Ez a feladat három független, kisebb részből áll.) (150 p)

**1.A. Hűtőgép.** (50 pont) Egy sátorban hosszú ideje be van kapcsolva a hűtőszekrény. A hőmérséklet a hűtőszekrény belsejében  $-13^\circ\text{C}$ , a sátorban  $1^\circ\text{C}$ , a sátoron kívül pedig  $0^\circ\text{C}$ .

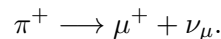
Mekkora lesz hosszú idő után a sátorban a hőmérséklet, ha még egy ugyanilyen hűtőszekrényt bekapcsolunk?

Tegyük fel, hogy a külső hőmérséklet nem változik; a hűtőszekrények ideális Carnot-gépként működnek, és úgy vannak beállítva, hogy a belsejükben fenntartsák a  $-13^\circ\text{C}$  hőmérsékletet; valamint a sátor falánál és a hűtőszekrény falánál is teljesül, hogy a hővezetés egyenesen arányos a hőmérséklet-különbséggel.

**1.B. Elektromos erővonal.** (50 pont) Egy nagy kiterjedésű, vízszintes, földelt fémlap felett  $h$  magasságban egy pozitív ponttöltést rögzítünk. Hol érik el a lemezt azok az elektromos erővonalak, amelyek vízszintesen indulnak ki a ponttöltésből?



**1.C. Pion-bomlás.** (50 pont) A pozitív pion ( $\pi^+$ ) egyik lehetséges bomlási folyamatában pozitív müon ( $\mu^+$ ) és (a leptontöltés megmaradása miatt) müon-neutrínó ( $\nu_\mu$ ) keletkezik:



Legalább hány MeV annak a pionnak a kinetikus (mozgási) energiája, amelynek bomlásában a müon és a neutrínó egymásra merőlegesen repülnek szét? A neutrínót tekintjük zérus nyugalmi tömegűnek, azaz olyan részecskének, melynek energiája és impulzusa között fennáll az  $E = pc$  összefüggés.

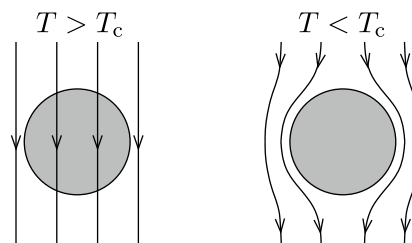
## 2. feladat. Szupravezetők elektrodinamikája

(150 p)

### 2.A. Meissner–Ochsenfeld-jelenség (50 pont)

1911-ben Kamerlingh Onnes megfigyelte, hogy bizonyos fémeket egy adott (a fémre jellemző, tipikusan néhány kelvin nagyságrendű)  $T_c$  kritikus hőmérséklet alá hűtve az anyag elektromos ellenállása nullára csökken. Az ilyen típusú anyagokat szupravezetőknek nevezzük. Logikusnak tűnt az a következtetés, hogy ha mágneses térbe helyezett szupravezető anyagot a kritikus hőmérséklete alá hűtünk, akkor az eltűnő ellenállás miatt az anyag belsejében a mágneses tér nem változhat meg (hiszen az végtelen nagy áramot indukálna), hanem „befagy” a mintába.

1933-ban *W. Meissner* és *R. Ochsenfeld* kísérletileg felfedezte, hogy a várakozásokkal szemben a szupravezető anyagok mágneses térben nem egyszerűen úgy viselkednek, mint ideális (azaz nulla ellenállású) vezetők. A kritikus hőmérsékletet elérve ugyanis a mágneses tér kiszorul a szupravezető minta belsejéből, így a minta előéletétől függetlenül belül mindig zérus a mágneses indukció értéke (lásd az ábrát). Ez az állítás csak viszonylag gyenge mágneses tereknél igaz, elég erős mágneses tér a szupravezető állapotot lerombolhatja. Ebben a feladatban a kritikus hőmérsékletük alá hűtött szupravezetők elektromágneses tulajdonságaival foglalkozunk.



**2.A.1.** (10 pont) Elektromágneses szempontból a szupravezetők tárgyalhatók úgy, mintha a normális elektronok mellett  $n_s$  részecskesűrűségben  $-e$  töltésű,  $m$  tömegű szupravezető elektronok is jelen lennének, amelyek teljesen szabadon (ellenállás nélkül) áramolhatnak az anyagban.<sup>1</sup> Mutassuk meg, hogy ha a szupravezető belsejében egy adott pontban  $\mathbf{E}$  az elektromos térerősség, akkor ugyanitt a szupravezető elektronok által képviselt  $\mathbf{j}_s$  áramsűrűség időbeli változását a

$$\frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = \alpha \mathbf{E}$$

összefüggés írja le (itt  $\alpha$  állandó). Adjuk meg az  $\alpha$  együttható értékét  $n_s$ ,  $e$  és  $m$  segítségével!

**2.A.2.** (10 pont) Mutassuk meg, hogy a szupravezető belsejében felvett tetszőleges, zárt kontúrra

$$\oint \mathbf{j}_s \cdot d\boldsymbol{\ell} = \beta \Phi,$$

ahol  $\Phi$  a kontúron keresztülhaladó mágneses fluxus,  $\beta$  pedig állandó. Fejezzük ki  $\beta$  értékét  $n_s$ ,  $e$  és  $m$  segítségével! (Felhasználhatjuk, hogy mélyen a szupravezető belsejében sem mágneses tér, sem áramok nincsenek jelen.)

**2.A.3.** (15 pont) Tekintsünk egy homogén szupravezető anyagot, amely az  $x > 0$  féltérrel tölti ki, az  $x < 0$  féltérben pedig vákuum van. Ha az  $x < 0$  féltérben a mágneses indukció mindenhol  $z$  irányú és  $B_0$  indukciójú, akkor ez a tér kismértékben behatol a szupravezető belsejébe is, de

<sup>1</sup>A szupravezetés mikroszkopikus elmélete (*Bardeen, Cooper, Schrieffer, 1957*) szerint ezek az elektronok párokba rendeződve ellenállás nélkül tudnak az anyagon áthaladni, ezek az ún. *Cooper-párok*.

továbbra is  $z$  irányú marad. Mélyen a szupravezető belsejében a határfelület közelében folyó véges áramsűrűség árnyékoló hatása miatt a mágneses indukció értéke nullára csökken.

Az eddigi eredményeket is felhasználva határozzuk meg a mágneses indukció  $B(x)$  nagyságát a szupravezető belsejében  $x$  függvényében! A választ  $B_0$ ,  $n_s$ ,  $e$  és  $m$  segítségével adjuk meg.

**2.A.4.** (10 pont) A szupravezető elektronok árama általában a felület közelében folyik. Határozzuk meg  $x$  függvényében a szupravezető féltérben folyó  $\mathbf{j}_s(x)$  áramsűrűség nagyságát és irányát! Adjuk meg annak a rétegnek a karakterisztikus  $\lambda$  vastagságát, amelyben ez az áram folyik!

**2.A.5.** (5 pont) Ha a szupravezetőben a mágneses indukció értéke eléri a szupravezető anyagára jellemző  $B_{\text{krit}}$  értéket, a szupravezető elektronok sűrűsége nullára csökken, és az anyag megszűnik szupravezető lenni. Tekintsünk egy hosszú, hengeres,  $R$  sugarú, szupravezető drótot. Adjuk meg azt a kritikus  $I_{\text{krit}}$  áramerősséget, amelyet még át lehet hajtani a dróton anélkül, hogy a szupravezetőből normális vezető válna. Válaszunkat  $B_{\text{krit}}$ ,  $R$  és univerzális konstansok segítségével adjuk meg!

A további feladatokban **mindig feltesszük**, hogy a karakterisztikus  $\lambda$  távolság sokkal kisebb minden más lineáris méretnél ( $\lambda \rightarrow 0$ ), és hogy a szupravezetőre jellemző  $B_{\text{krit}}$  kritikus tér nagysága sokkal nagyobb az előforduló mágneses tereknél.

## **2.B. Mágneses dipólus lebegtetése** (50 pont)

Ebben a részben egy  $m$  mágneses dipólyomatékú,  $M$  tömegű kis rúd-mágnezt szeretnénk lebegtetni egy vízszintes síkkal határolt szupravezető féltér fölött. A nehézségi gyorsulás iránya függőleges, értéke  $g$ .

**2.B.1.** (35 pont) Határozzuk meg a kis mágnes és a szupravezető féltér sík határfelületének  $h$  távolságát (az orientációra nézve) *stabil* egyensúlyi helyzetben!

**2.B.2.** (15 pont) Határozzuk meg a mágnes kis rezgéseinek  $T$  periódusidejét, ha azt függőleges irányban kicsit kitérítjük egyensúlyi helyzetéből. (Tegyük fel, hogy a mágnes orientációja a mozgás közben nem változik.)

## **2.C. Szupravezető korong** (50 pont)

Most tekintsünk egy vékony (de  $\lambda$ -nál sokkal vastagabb),  $R$  sugarú szupravezető korongot, melynek közepén  $r \ll R$  sugarú, kör alakú lyuk van. Amikor a korong mindentől távol van, benne olyan áramok folynak, hogy az  $r$  sugarú lyukon  $\Phi_0$  mágneses fluxus halad át. Ezután a korongot a **2.B.** feladatban szereplő szupravezető féltérhez közelítjük úgy, hogy síkja vízszintes legyen, a szupravezető felületétől való távolsága pedig  $d \ll r$ .

**2.C.1.** (10 pont) Ábrázoljuk vázlatosan a korong és a féltér között kialakuló mágneses indukcióvonalakat a válaszlapon található rajzon!

**2.C.2.** (40 pont) Határozzuk meg a korongra ható mágneses taszítóerőt! Felhasználhatjuk, hogy vákuumban a  $B$  indukciójú mágneses mező energiasűrűsége  $w = B^2/(2\mu_0)$ .

### 3. feladat. Táguló univerzum

(150 p)

Ebben a feladatban a táguló univerzum dinamikáját próbáljuk megérteni a newtoni mechanika segítségével. A téridő tágulását helyesen Einstein általános relativitáselméletével lehet leírni, amely tárgyalásához mélyebb fizikai és matematikai ismeretekre lenne szükség. Szerencsére az elmélet néhány fontosabb eredményét az alábbiakban bemutatott egyszerű modell is visszaadja.

**3.1.** (25 pont) Tekintsünk először egy gömb alakú, homogén tömegeloszlású,  $\rho_0$  sűrűségű porfelhőt, amelyben minden porszem (kezdeti) sebessége zérus. A porfelhő a saját (newtoni) gravitációs vonzása hatására összeomlik. Adjuk meg a porfelhő teljes összeroskadásához szükséges  $t$  időt  $\rho_0$  és univerzális konstansok segítségével! (Tegyük fel, hogy  $\rho_0$  sokkal kisebb a porszemek anyagának sűrűségénél.)

**3.2.** (15 pont) Az ún. kozmológiai elv azt az általános megfigyelést mondja ki, hogy az univerzum kellően nagy méretskálán tekintve homogén és izotrop, ezért jól modellezhető az előző részfeladatban szereplő homogén, gömb alakú porfelhővel. A „porszemek” (galaxisok) kezdeti (azaz jelenlegi) sebessége azonban a megfigyelések szerint nem nulla, hanem a porfelhő  $C$  középpontjából radiálisan kifelé mutat, nagysága pedig arányos a  $C$  középponttól mért  $r$  távolsággal:

$$v(r) = Hr,$$

ahol  $H$  az ún. *Hubble-paraméter*.

Határozzuk meg azt a kritikus  $\rho_{\text{krit}}$  sűrűséget, amelynél kisebb (jelenlegi) sűrűség esetén az univerzumunk örökké tágulni fog! A választ adjuk meg paraméteresen és számszerűleg is. A Hubble-paraméter jelenlegi értéke  $H \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , ahol 1 Mpc (megaparsec)  $3,09 \cdot 10^{19} \text{ km}$ .

**3.3.** (5 pont) A modern kozmológia szerint nem csupán a galaxisok távolodnak egymástól, hanem velük együtt az egész tér is tágul. Emiatt érdemes a térrel együtt táguló, felfúvódó, ún. *együttmozgó* koordináta-rendszert használni, melyben a galaxisok helyzetét jellemző koordináták időben állandók. Két galaxis valódi fizikai  $r$  távolságát az együttmozgó koordináta-rendszerben mérhető (állandó)  $s$  távolsággal tehát a következőképpen lehet kifejezni:  $r(t) = a(t)s$ , ahol  $a(t)$  az időtől függő ún. *skálafaktor*.

Fejezzük ki a Hubble-paramétert a skálafaktor és annak idő szerinti deriváltja segítségével!

**3.4.** (15 pont) Az univerzum porfelhő-modelljének segítségével a skálafaktor időbeli változását összefüggésbe lehet hozni az univerzum pillanatnyi  $\rho$  sűrűségével:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A\rho + \frac{B}{a^2},$$

ahol  $A$  és  $B$  állandók. Határozzuk meg az  $A$  állandó értékét!

**3.5.** (25 pont) A skálafaktor időbeli változására az általános relativitáselmélet is a **3.4.** részfeladatbeli egyenletet adja, a  $B$  állandót azonban az univerzum geometriájának görbültségével hozza kapcsolatba. A legpontosabb mérések szerint az univerzum „lapos”, geometriája euklideszi, ami  $B = 0$  értéknek felel meg.

Használjuk továbbra is az univerzum porfelhő-modelljét ( $B = 0$  feltevással), és tegyük fel, hogy az ősrobbanáskor az univerzum mérete nagyon kicsi volt. Fejezzük ki az univerzum  $T_1$  életkorát a Hubble-paraméter jelenlegi értékének felhasználásával, és adjuk meg az eredményt számszerűleg is!

**3.6.** (15 pont) Az eddigiekben használt porfelhő-modellben csak a világegyetemet alkotó (nemrelativisztikus) anyag hatását vettük figyelembe. Valójában (főleg az univerzum fejlődésének korai szakaszában) fontos szerepet játszik a sugárzás is, amely ultrarelativisztikus részecskék gázának tekinthető.

Tekintsük most a következő modellt: legyen az univerzum egy gömb alakú ballon, melyet teljes egészében sugárzás tölt ki. A ballonban lévő sugárzás energiáját a  $\rho$  sűrűséggel jellemezhetjük, amit az energiasűrűség  $1/c^2$ -szereseként definiálunk (itt  $c$  a fénysebesség). Adjuk meg a ballonban uralkodó  $p$  nyomást  $\rho$  segítségével!

**3.7.** (20 pont) A világegyetem tágulása miatt ebben a modellben is változik a sűrűség az idő függvényében. Fejezzük ki a táguló ballonban lévő sugárzás sűrűségének  $\dot{\rho}$  változási ütemét a Hubble-paraméterrel és a pillanatnyi  $\rho$  sűrűséggel.

**3.8.** (30 pont) A relativitáselmélet szerint a **3.4.** részfeladatbeli egyenlet érvényes akkor is, ha az univerzumot nagyrészt nem anyag, hanem sugárzás tölti ki. A táguló ballon modelljét használva ( $B = 0$  feltevással) adjuk meg az univerzum  $T_2$  életkorát a Hubble-paraméter jelenlegi értékének felhasználásával a sugárzás-dominálta univerzum esetére, és adjuk meg az eredményt számszerűleg is!