



A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. A 2015 olyan négyjegyű szám, amelynek számjegyei különbözőek és közülük pontosan kettő prímszám. Hány ilyen négyjegyű természetes szám van?

Megoldás:

A 10-es számrendszerben a tíz darab számjegy között négy prímszám van, ezek a 2; 3; 5; 7. 1 pont

Ezekből két különböző számjegy $\binom{4}{2} = 6$ -féleképpen választható ki. 1 pont

Ha a két nem prím számjegy közül az egyik a 0, akkor a másik nem prím számjegy 5-féle lehet. 1 pont

Mivel 0 nem állhat az ezresek helyén, ezért a négy különböző számjegyek $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ -féle sorrendje lehetséges. 1 pont

Ebből az következik, hogy a feltételeknek megfelelő olyan négyjegyű szám, amelynek jegyei között egy darab 0 számjegy van, pontosan $6 \cdot 5 \cdot 18 = 540$ állítható elő. 1 pont

Ha a két különböző, nem prím számjegy egyike sem 0, akkor a nem prím számjegyek közül két különbözőt $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen választhatunk ki. 1 pont

A négy különböző számjegyek $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ -féle sorrendjét állíthatjuk elő. 1 pont

Ebből azt kapjuk, hogy a feladat feltételeinek megfelelő olyan négyjegyű szám, amelynek jegyei között a 0 számjegy nem szerepel, pontosan $6 \cdot 10 \cdot 24 = 1440$ darab van. 1 pont

Tehát az olyan 10-es számrendszerbeli, különböző számjegyekből álló négyjegyű számból, amelynek pontosan két jegye prímszám, $540 + 1440 = 1980$ darab van. 2 pont

Összesen: 10 pont

2. Oldja meg a valós számpárok halmazán az $x + y^2 = \frac{1}{2}$, $x^2 + 2y = -\frac{7}{4}$ egyenletrendszert!

1. Megoldás:

A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

$$(1) \quad x^2 + x + y^2 + 2y = -\frac{5}{4}. \quad 2 \text{ pont}$$

Ebből ekvivalens átalakítással

$$(2) \quad x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 = 0$$

következik. 2 pont

Látható, hogy (2) bal oldala két teljes négyzet összege, mégpedig

$$(3) \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = 0. \quad 2 \text{ pont}$$

A (3) összefüggés bal oldalán szereplő zárójeles kifejezések nem negatívak, összegük akkor és csak akkor zérus, ha mindkét kifejezés értéke zérus. 1 pont

Ebből $x + \frac{1}{2} = 0$ és $y + 1 = 0$ következik. 1 pont

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát az $x = -\frac{1}{2}$; $y = -1$ valós számpár. 1 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a kapott számpár az eredeti egyenletrendszer mindkét egyenletét kielégíti. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Az első egyenletből kifejezhetjük az x -et, ezzel

$$(1) \quad x = \frac{1}{2} - y^2. \quad 1 \text{ pont}$$

Az (1) mindkét oldalát négyzetre emelve $x^2 = \frac{1}{4} - y^2 + y^4$. 1 pont

Ezt a második egyenletbe helyettesítve és rendezve:

$$(2) \quad y^4 - y^2 + 2y + 2 = 0. \quad 1 \text{ pont}$$

A (2) bal oldala szorzattá alakítható

$$(3) \quad (y+1) \cdot (y^3 - y^2 + 2) = 0. \quad 1 \text{ pont}$$

Mivel $y^3 - y^2 + 2 = y^3 + y^2 - 2y^2 + 2 = y^2 \cdot (y+1) - 2 \cdot (y^2 - 1)$, ezért a (3) bal oldalán szereplő második zárójeles kifejezés is szorzattá alakítható.

Eszerint:

$$(4) \quad (y+1)^2 \cdot (y^2 - 2y + 2) = 0.$$

A (4) egyenlet bal oldalán $y^2 - 2y + 2 = (y-1)^2 + 1$, ezért $y^2 - 2y + 2 = 0$ nem lehetséges. 2 pont

Ebből az következik, hogy (4) csak úgy teljesülhet, ha $(y+1)^2 = 0$. 1 pont

Az $(y+1)^2 = 0$ eredményünkből $y = -1$ adódik, ez pedig (1) alapján azt jelenti,

hogy $x = -\frac{1}{2}$. 1 pont

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát az $x = -\frac{1}{2}; y = -1$ valós számpár. 1 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért az $x = -\frac{1}{2}; y = -1$ számpár az eredeti

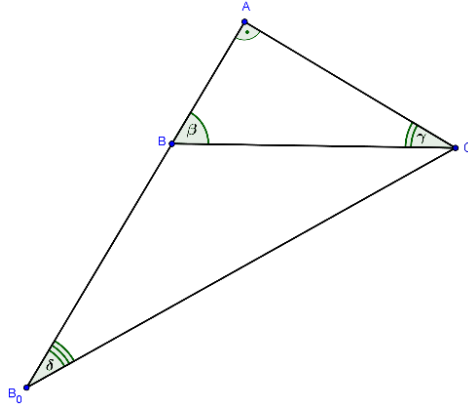
egyenletrendszer mindkét egyenletét kielégíti. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. A BC átfogójú ABC derékszögű háromszög AB befogójának A pontból induló félegyenesén megjelöljük azt a B_0 pontot, amelyre $AB_0 = 3 \cdot AB$. Azt tapasztaljuk, hogy az ABC és AB_0C háromszögek hasonlóak.

Bizonyítsa be, hogy az AB_0C háromszögben CB belső szögfelező!

Megoldás: jelöléseink az 1. ábrán láthatók.



1. ábra

Legyen $AC = b$ és $AB = c$. Ekkor a feltételeknek megfelelően $AB_0 = 3c$.

Mivel az ABC és AB_0C derékszögű háromszögek hasonlóak, hegyesszögeik páronként egyenlők. Ezért az 1. ábra jelöléseinek megfelelően $\beta = \delta$ vagy $\gamma = \delta$. 1 pont

A $\beta = \delta$ összefüggés azonban nem állhat fenn, mert az $ABC \angle = \beta$ szög a BB_0C háromszög külső szöge, ezért $\beta = \delta + BCB_0 \angle$, vagyis $\beta > \delta$. 1 pont

Ebből az következik, hogy csak $\gamma = \delta$, valamint $\beta = ACB_0 \angle$ állhat fenn. 1 pont

Az ABC és AB_0C derékszögű háromszögek hasonlósága azt is jelenti, hogy a megfelelő oldalak hosszának aránya a két háromszögben egyenlő, azaz $\frac{AC}{AB} = \frac{AB_0}{AC}$, innen jelöléseinkkel 1 pont

$$(1) \quad \frac{b}{c} = \frac{3c}{b}.$$

Az (1) összefüggésből azt kapjuk, hogy $b^2 = 3c^2$, ahonnan 2 pont

$$(2) \quad b = c \cdot \sqrt{3}.$$

Így (2) alapján az ABC háromszögben $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c} = \sqrt{3}$, innen pedig a β hegyesszögre $\beta = 60^\circ$ adódik, és ezzel $\gamma = \delta = 30^\circ$. 2 pont

Eszerint $ACB \angle = \gamma = 30^\circ$ és $ACB_0 \angle = \beta = 60^\circ$, ez éppen azt jelenti, hogy az AB_0C háromszögben CB belső szögfelező, és éppen ezt akartuk bizonyítani. 2 pont

Összesen: 10 pont

4. Legyenek a $\frac{p}{p-2} \cdot x^2 + \frac{p-1}{p+1} \cdot x + \frac{1}{4} = 0$ egyenlet valós gyökei x_1 és x_2 .

Határozza meg a $p \neq 0$ valós paraméter mindazon értékeit, amelyekre fennáll, hogy

$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = \frac{1}{p+1}!$$

Megoldás:

Mivel $p \neq 0$, ezért $\frac{p}{p-2} \neq 0$, így a feladatbeli egyenlet másodfokú, továbbá a bal oldalon szereplő törtek nevezői miatt teljesül, hogy $p \neq 2$ és $p \neq -1$.

Az egyenletnek vannak valós gyökei, tehát az egyenlet diszkriminánsa nem negatív valós szám:

$$(1) \quad \left(\frac{p-1}{p+1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{p}{p-2} \cdot \frac{1}{4} \geq 0. \quad 1 \text{ pont}$$

Az (1) bal oldalán egyszerűsítés, a törtek közös nevezőre hozása és a műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$(2) \quad \frac{-6p^2 + 4p - 2}{(p+1)^2 \cdot (p-2)} \geq 0. \quad 1 \text{ pont}$$

Mivel $(p+1)^2 > 0$, ezért a (2) egyenlőtlenség kétféle módon állhat fenn:

$$(3) \quad -6p^2 + 4p - 2 \geq 0 \text{ és } p - 2 > 0,$$

vagy

$$(4) \quad -6p^2 + 4p - 2 \leq 0 \text{ és } p - 2 < 0. \quad 1 \text{ pont}$$

A $-6p^2 + 4p - 2 = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása, mert az egyenlet diszkriminánsa negatív, tehát az $f(p) = -6p^2 + 4p - 2 = 0$ másodfokú függvénynek nincsen zérushelye.

Az $f(p) = -6p^2 + 4p - 2 = 0$ függvény képe lefelé nyíló parabola, ezért $-6p^2 + 4p - 2 \geq 0$ nem lehetséges, vagyis a (3) egyenlőtlenségek nem teljesülhetnek egyetlen p valós számra sem.

Ebből az is következik, hogy $-6p^2 + 4p - 2 \leq 0$ minden p valós számra igaz, tehát (4) alapján a (2) egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$$(5) \quad p < 2. \quad 1 \text{ pont}$$

A másodfokú egyenlet Viéte-formulái alapján

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p-2}{4p} \text{ és } x_1 + x_2 = -\frac{(p-1) \cdot (p-2)}{p \cdot (p+1)}. \quad 1 \text{ pont}$$

Mivel a feladat feltétele szerint $x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = \frac{1}{p+1}$,

ezért,

$$\frac{p-2}{4p} + \frac{(p-1) \cdot (p-2)}{p \cdot (p+1)} = \frac{1}{p+1},$$

ahonnan egyszerűsítés, a műveletek elvégzése és rendezés után azt kapjuk, hogy

$$(6) \quad 5p^2 - 17p + 6 = 0. \quad 1 \text{ pont}$$

A (6) másodfokú egyenlet megoldásai $p_1 = \frac{2}{5}$ és $p_2 = 3$. 1 pont

A $p_2 = 3$ megoldás nem felel meg az (5) feltételnek, ezért csak $p_1 = \frac{2}{5}$ lehetséges. 1 pont

A $p_1 = \frac{2}{5}$ értéket a $\frac{p}{p-2} \cdot x^2 + \frac{p-1}{p+1} \cdot x + \frac{1}{4} = 0$ egyenletbe helyettesítve a műveletek elvégzése után a $7x^2 + 12x - 7 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{85}}{7} \text{ és } x_2 = \frac{-6 - \sqrt{85}}{7}. \quad 1 \text{ pont}$$

Számolással ellenőrizhető, hogy ezekre $p_1 = \frac{2}{5}$ mellett valóban teljesül, hogy

$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = \frac{1}{p+1}. \quad \underline{1 \text{ pont}}$$

Összesen: 10 pont

5. Az a_n sorozatra teljesül, hogy $a_1 = 1$, és minden $n \geq 2$ esetén $a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1} + 1}$.

Hány olyan tagja van a sorozatnak, amelyik nagyobb $\frac{1}{100}$ -nál?

Megoldás:

Ha $a_{n-1} > 0$, akkor az $a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1} + 1}$ képzési szabály alapján $a_n > 0$ is teljesül minden

$n \geq 2$ esetén. Mivel $a_1 = 1$, ezért $a_2 > 0$, ebből $a_3 > 0$, és ehhez hasonlóan minden $n \geq 2$ pozitív egész számra igaz, hogy $a_n > 0$, vagyis a sorozat minden tagja pozitív szám. 1 pont

Vehetjük tehát az $a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1} + 1}$ képzési szabály két oldalának a reciprokat:

$$(1) \quad \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + 2. \quad \text{2 pont}$$

(1) alapján felírhatunk egy $n-1$ darab egyenletről álló egyenletrendszert:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} &= 2; \\ \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} &= 2; \\ &\vdots \\ \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} &= 2. \end{aligned} \quad \text{2 pont}$$

Az egyenletek megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy

$$(3) \quad \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = (n-1) \cdot 2. \quad \text{1 pont}$$

Mivel a feltétel szerint $a_1 = 1$, ezért (3) alapján $\frac{1}{a_n} - 1 = 2n - 2$, és ezzel

$$(4) \quad a_n = \frac{1}{2n-1},$$

ahol $2n-1 > 0$ pozitív egész szám. 1 pont

A feladat kérdésére akkor adjuk meg a választ, ha megoldjuk az $a_n > \frac{1}{100}$ egyenlőtlenséget. 1* pont

A (4) eredmény alapján $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{100}$, ebből rendezés után $n < \frac{101}{2}$ következik. 1* pont

Eszerint a sorozatnak pontosan 50 olyan tagja van, amelyek nagyobbak $\frac{1}{100}$ -nál. 1* pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: az $a_n = \frac{1}{2n-1}$ alapján $a_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$, és így $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}$, ahonnan a műveletek elvégzésével azt kapjuk, hogy $a_{n+1} - a_n = \frac{-2}{(2n+1) \cdot (2n-1)}$.

Ez azt jelenti, hogy minden pozitív egész n számra $a_{n+1} - a_n < 0$, vagyis $a_{n+1} < a_n$, tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

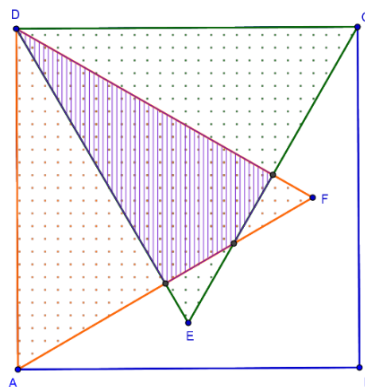
Számolással ellenőrizhető, hogy $a_{50} = \frac{1}{99}$ és $a_{51} = \frac{1}{101}$.

A sorozat szigorúan monoton csökkenő tulajdonságából tehát az következik, hogy a sorozatnak valóban 50 olyan tagja van, amelyek nagyobbak $\frac{1}{100}$ -nál.

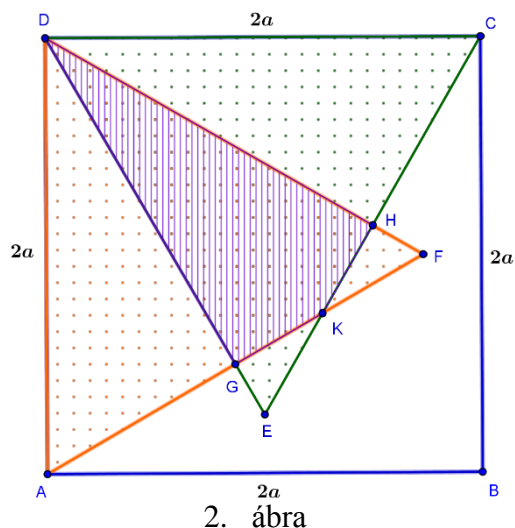
Ha a versenyző a feladat megoldását a sorozat szigorúan monoton csökkenő tulajdonságának bizonyítására építve a fenti módon fejezi be, a *-gal jelzett pontokat megkapja.

6. A négyzet alakú $ABCD$ asztallapra két egybevágó szabályos háromszöget terítünk le az ábra szerint (a szabályos háromszögek oldalainak hossza egyenlő a négyzet oldalainak hosszával).

Határozza meg a kétszer lefedett rész területének és a nem fedett rész területének arányát!



Megoldás: jelöléseink a 2. ábrán láthatók.



Az ADF és CDF szabályos háromszögek minden szöge 60° -os, oldalaik hosszát, és ezzel az $ABCD$ négyzet oldalainak hosszát is $2a$ -val jelöltük.

Az ADG háromszögben $GAD\angle = 60^\circ$ és $GDA\angle = 30^\circ$, hiszen $GDA\angle = CDA\angle - CDE\angle = 90^\circ - 60^\circ$.

Eszerint az ADG háromszög harmadik szöge derékszög, azaz $AGD\angle = 90^\circ$.

A CDH háromszögben hasonlóképpen láthatjuk be, hogy $HCD\angle = 60^\circ$, $HDC\angle = 30^\circ$ és $CHD\angle = 90^\circ$. Az is látható, hogy az ADG és CDH háromszögek egybevágó, $2a$ átfogójú derékszögű háromszögek, ezért T_1 -gyel jelölt területük egyenlő.

1 pont

Ismert, hogy azokban a $2a$ átfogójú derékszögű háromszögekben, amelyekben a hegyesszögek nagysága 30° és 60° , a 30° -os és 60° -os szögekkel szemben levő befogók hossza rendre a és $a \cdot \sqrt{3}$. Ebből az következik, hogy:

$$(1) \quad AG = CH = a \text{ és } GD = HD = a \cdot \sqrt{3}. \quad 1 \text{ pont}$$

Abból, hogy $AGD\angle = 90^\circ$ és $CHD\angle = 90^\circ$, az is adódik, hogy $EGK\angle = 90^\circ$ és $FHK\angle = 90^\circ$.

Mivel $DEC\angle = 60^\circ$ és $AFD\angle = 60^\circ$, ezért $GEK\angle = 60^\circ$, illetve $HFH\angle = 60^\circ$, ezzel pedig $GKE\angle = 30^\circ$ és $HKF\angle = 30^\circ$.

Ugyanakkor $GE = DE - GD$ és $HF = DF - HD$, ezért az EKG és FKH 30° -os és 60° -os hegyesszögekkel rendelkező derékszögű háromszögekben

$$(2) \quad GE = HF = 2a - a \cdot \sqrt{3} \text{ és } GK = HK = (2a - a \cdot \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}. \quad 1 \text{ pont}$$

Az EKG és FKH háromszögekben a megfelelő szögek egyenlők, és (2) szerint két-két megfelelő oldaluk is egyenlő, ezért a két háromszög egybevágó, tehát a T_2 -vel jelölt területük egyenlő.

Jelölje továbbá a kétszer fedett területet T_3 , ez a $DGKH$ négyszög területe, illetve jelölje a szabályos háromszögek által nem fedett területet T_0 .

Feladatunk a $\frac{T_3}{T_0}$ arány meghatározása. 1 pont

A 2. ábrán az ADF és CDF szabályos háromszögekben a GD illetve HD súlyvonalak felezik a megfelelő háromszögek területét, ezért

$$(3) \quad T_1 = T_2 + T_3,$$

valamint

$$(4) \quad T_0 = T_{ABCD} - 2T_1 - 2T_2 - T_3. \quad 2 \text{ pont}$$

Mivel $AG = a$ és $GD = a \cdot \sqrt{3}$, ezért $T_1 = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$, továbbá mivel $GE = 2a - a \cdot \sqrt{3}$ és

$$GK = (2a - a \cdot \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}, \text{ ezért } T_2 = \frac{a^2 \cdot (2 - \sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Ebből (3) alapján a műveletek elvégzésével és egyszerűsítéssel kapjuk, hogy

$$(5) \quad T_3 = a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3). \quad 1 \text{ pont}$$

Felhasználjuk, hogy $T_{ABCD} = 4a^2$, ezzel (4) szerint

$$T_0 = 4a^2 - a^2 \cdot \sqrt{3} - a^2 \cdot (2 - \sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3),$$

ahonnan a műveletek elvégzése után:

$$(6) \quad T_0 = 5a^2 \cdot (2 - \sqrt{3}). \quad 1 \text{ pont}$$

Az (5) és (6) összefüggések szerint

$$(7) \quad \frac{T_3}{T_0} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3)}{5a^2 \cdot (2 - \sqrt{3})}. \quad 1 \text{ pont}$$

A (7) jobb oldalán szereplő tört számlálóját és nevezőjét $\sqrt{3}$ -mal szorozva a tört értéke

nem változik, ezzel $\frac{T_3}{T_0} = \frac{3a^2 \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3)}{5a^2 \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3)}$, az egyszerűsítéseket elvégezve pedig azt

kapjuk, hogy $\frac{T_3}{T_0} = \frac{3}{5}$.

Eszerint a feladatban szereplő kétszer lefedett és a nem fedett területek aránya

$$\frac{T_3}{T_0} = \frac{3}{5}. \quad \underline{1 \text{ pont}}$$

Összesen: 10 pont