A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási–értékelési útmutató

1. Adottak az 1, 2, 3, ..., 2015 grammos súlyok. Be lehet-e osztani őket öt csoportba úgy, hogy a súlyok száma és az összege is azonos legyen minden csoportban?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy a feladat feltételeinek megfelelő csoportok létrehozhatóak. A súlyokra a rájuk írt számokkal hivatkozunk. Először tekintsük az 1, 2, 3, ..., 15 számokat. Ezek egy lehetséges beosztása:

$$15+7+2=14+6+4=13+1+10=12+9+3=11+8+5$$

Minden csoportban három szám van, mindegyikben 24 a számok összege és minden számot pontosan egyszer használtunk fel. 3 pont

Megmutatjuk, hogy tíz szomszédos egész szám is csoportokba osztható a kívánt módon. Legyenek a számok $n, n+1, ..., n+9$, a csoportok pedig:

$$n+(n+9)=(n+1)+(n+8)=(n+2)+(n+7)=(n+3)+(n+6)=(n+4)+(n+5).$$

2 pont

A 2015 súly beosztása történhet a következőképpen: az első 15 számot szétosztjuk a megadott módon, majd sorra vesszük tízesével a számokat és szétosztjuk őket a fent megadottak szerint a meglévő csoportokba. Így minden szám sorra kerül, hiszen $2015=15+200\cdot 10$. 2 pont

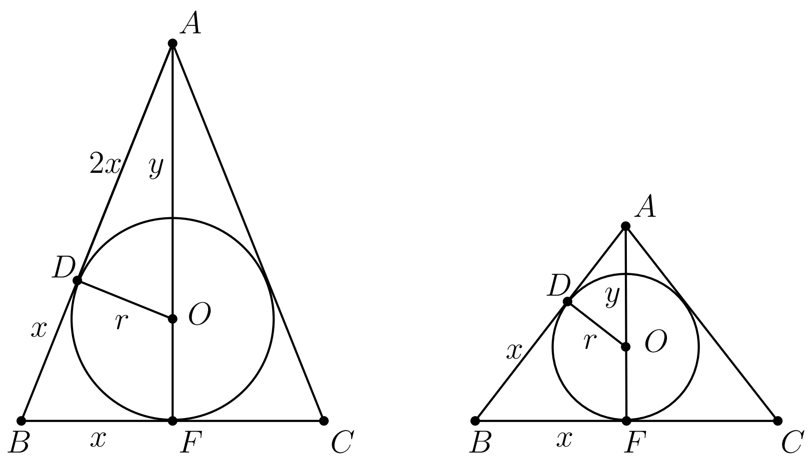
Összesen 7 pont

2. Két egyenlő szárú háromszöget vizsgálunk. Az elsőnél a háromszög beírt köre a szárakat az alaphoz közelebbi harmadolópontban érinti, a másodiknál az alaptól távolabbi harmadolópontban. Melyik esetben fedi a beírt kör a háromszög területének nagyobb hányadát?

Megoldás: Legyen a háromszög alapja BC, ennek felezőpontja F, a beírt kör középpontja O, sugara r, a beírt körnek az AB száron levő érintési pontja D. Legyen $OA = y$, $BF = x$. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, így $BF = BD = x$.

1 pont

Az OAD háromszög hasonló BAF háromszöghöz, hiszen A-nál levő szögük közös és D-nél illetve F-nél derékszög van, így szögeik ugyanakkorák. 1 pont



Először tekintsük azt az esetet, amikor $BD : DA = 1 : 2$, azaz $AD = 2x$. Az említett hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya megegyezik, tehát

$$y : 3x = r : x \quad \Rightarrow \quad y = 3r.$$

Írjuk fel a Pitagorasz tételt az OAD háromszögre:

$$r^2 + (2x)^2 = y^2 = (3r)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2} \cdot r. \qquad \text{1 pont}$$

A beírt kör területe $T_1 = r^2 \cdot \pi$. A háromszög területe $T_2 = x \cdot (r + y) = \sqrt{2}r \cdot (r + 3r) = 4\sqrt{2}r^2$. A kör és a háromszög területének aránya:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r^2 \cdot \pi}{4\sqrt{2}r^2} \approx 0.5554. \qquad \text{2 pont}$$

Most tekintsük azt az esetet, amikor $BD : DA = 2 : 1$, azaz $AD = \frac{x}{2}$. Az előző gondolatmenet lépései mentén: a hasonló háromszögekből $y = \frac{3}{2}r$, a Pitagorasz tételből $x = \sqrt{5}r$. A háromszög területe ebben az esetben $T_3 = x(r + y) = \sqrt{5}r(r + \frac{3}{2}r) = \frac{5\sqrt{5}}{2}r^2$. A kör és a háromszög területének aránya ebben az esetben :

$$\frac{T_1}{T_3} = \frac{r^2 \cdot \pi}{\frac{5\sqrt{5}}{2}r^2} \approx 0.562 \qquad \text{2 pont}$$

A második esetben fedi a beírt kör a háromszög területének nagyobb hányadát.

Összesen 7 pont

3. A pozitív egész számok körében négy egymást követő páratlan szám négyzetének az összegét vizsgáljuk. Hány ilyen számnégyes van 1 és 100 között, amelyeknél ez a négyzetösszeg 36-tal osztható?

Megoldás: A szóban forgó számok jelöléseit úgy választjuk, hogy négyzetösszegük viszonylag egyszerű kifejezés legyen. Tehát a számok:

$$2n-3, \quad 2n-1, \quad 2n+1, \quad 2n+3.$$

Ezek négyzetösszege

$$(2n-3)^2+(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2=16n^2+20=4(4n^2+5). \qquad \text{1 pont}$$

Ez akkor és csakis akkor osztható $36=4\cdot 9$-cel, ha $4n^2+5$ osztható 9-cel. Viszont

$$4n^2+5=4n^2+5+4-4=4(n^2-1)+9=4(n+1)(n-1)+9,$$

ez pedig akkor osztható 9-cel, ha $(n+1)(n-1)$ is osztható. 2 pont

$n+1$ és $n-1$ különbsége 2, ezért csak egyikük lehet 3-mal osztható, ezért $(n+1)(n-1)$ csak akkor osztható 9-cel, ha a tényezők valamelyike osztható, ha tehát $n+1=9k$ vagy $n-1=9k$ (k pozitív egész), azaz

$$n=9k-1 \quad \text{vagy} \quad n=9k+1. \qquad \text{2 pont}$$

Az első esetben a számnégyes kezdő száma $18k-5$ alakú, a feladat feltételének a 13, 31, 49, 67, 85 kezdőszámok felelnek meg. A második esetben a kezdő szám alakja $18k-1$, a feltételeknek a 17, 35, 53, 71, 89 kezdőszámok tesznek eleget, tehát összesen 10 számnégyes elégíti ki a feltételeket. 2 pont

Összesen 7 pont

4. A 11.a osztály sakkozni szerető diákjai körmérkőzéses sakktornát rendeztek egymás között. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. Az eredmények érdekesen alakultak: a résztvevők közül bármely kettőhöz van legalább egy olyan, akit mindketten legyőztek a tornán. Legalább hányan szeretnek sakkozni a 11.a-ban?

Megoldás: Tekintsük az egyik versenyzőt, legyen A. Van olyan, akit legyőzött, legyen közülük az egyik B. Van olyan, akit A és B is legyőzött, legyen C. Van, akit A és C is legyőzött, ez nem lehet B, legyen D. Azt kaptuk, hogy tekintve egy tetszőleges versenyzőt, esetünkben A-t, található hozzá három olyan másik, akiket legyőzött. Ezek voltak A-hoz B, C és D. 2 pont

Így n résztvevő esetén legalább $3n$ mérkőzés volt. Másrészt a mérkőzések száma összesen $\frac{n(n-1)}{2}$, azaz

$$3n \le \frac{n(n-1)}{2},$$

amiből az adódik, hogy a résztvevők száma legalább 7. 2 pont

7 résztvevő esetén megadhatóak az eredmények a feladat feltételeinek megfelelően. Ültessük le a 7 embert egy kerek asztal köré és mindenki győzze le a jobb oldali szomszédját, a jobb oldali másodszomszédját és a bal oldali harmadszomszédját. Ha a versenyzők a

kör mentén sorban A, B, C, D, E, F és G, akkor pl. A legyőzte B-t, C-t és E-t, a többi mérkőzés ennek mintájára forgásszimmetrikusan adódik. Ha két ember szomszédos, pl A és B, akkor mindketten legyőzték C-t. Ha másodszomszédosak, pl A és C, akkor mindketten legyőzték E-t. Ha harmadszomszédosak, pl A és D, akkor mindketten legyőzték E-t. A forgásszimmetria miatt minden lehetőséget végignéztünk, valóban teljesülnek a feladat feltételei. 3 pont

Összesen 7 pont

Megjegyzés: Ha a dolgozatban 7 sakkozó esetén más módon (pl táblázat, gráf, stb) megadja az eredményeket, de nem ellenőrzi, hogy teljesülnek a feladat feltételei, akkor legfeljebb 6 pont adható.

5. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x 2-nél nagyobb természetes szám:

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2015\cdot(2x+1)}{2x}.$$

Megoldás: A bal oldalon az első gyökjel alatti szám $\frac{49}{36}$, amiből kényelmesen gyököt lehet vonni. 1 pont

Vizsgáljuk a bal oldal egy általános tagját:

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{\left(\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right)^2}$$

2 pont

A gyökvonást elvégezve és tovább alakítva:

$$\sqrt{\left(\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right)^2}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$ 2 pont

Ekkor egyenletünk így írható fel:

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)=\frac{2015\cdot(2x+1)}{2x}.$$

A bal oldali összeg úgynevezett teleszkópikus összeg, rendezés után megmarad belőle $x-2$ darab 1-es, a törtek közül pedig az $+\frac{1}{2}$ és a $-\frac{1}{x}$. Így egyenletünk:

$$x-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{x}=\frac{2015\cdot(2x+1)}{2x}.$$

Mivel $x>2$ beszorozhatunk $2x$-szel és így a

$$(2x+1)(x-2)=2015(2x+1)$$

egyenlethez jutunk, amelynek az $x>2$ feltételt kielégítő egyetlen gyöke az $x=2017$.

2 pont

Összesen 7 pont