A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
harmadik, döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA

Javítási–értékelési útmutató

1. Jelölje a pozitív egész k utolsó jegyét $u(k)$, például $u(2016) = 6$. Egy számsorozat tagjainak képzési szabálya a következő: a pozitív egész a_0 adott, továbbá $n > 0$ esetén

$$a_n = a_{n-1} + u(a_{n-1}) - 1.$$

Milyen a_0 számok esetén tartalmaz a sorozat végtelen sok 3-hatványt?

Megoldás: Ha $u(a_0)$=1, akkor a sorozat konstans, tehát a sorozat csak akkor tartalmazhat 3-hatványt, ha maga a_0 egyre végződő 3 hatvány, pl. 81. Ekkor a sorozatnak minden eleme 3-hatvány lesz, de a 3-hatványok közül csak egy fajta szerepel a sorozatban. 1 pont

A sorozat képzési szabályát tekintve a_i és $u(a_i)$ azonos paritású, ezért $i > 0$ esetén a_i páratlan. Ha $u(a_i)$=3, akkor a sorozat következő elemei és azok utolsó jegye:

$a_{i+1} = a_i + 2$	$a_{i+2} = a_i + 6$	$a_{i+3} = a_i + 14$	$a_{i+4} = a_i + 20$	$a_{i+5} = a_i + 22$
$u(a_{i+1}) = 5$	$u(a_{i+2}) = 9$	$u(a_{i+3}) = 7$	$u(a_{i+4}) = 3$	$u(a_{i+5}) = 5$

A táblázatból kiderül, hogy a végződések periodikusan ismétlődnek és a periódus hossza négy (3, 5, 9, 7, 3, 5, 9, 7, ...), továbbá ha a_i páratlan, akkor $a_{i+4} = a_i + 20$. Esetünkben, azaz ha $u(a_i)$=3, akkor a sorozatban szereplő további számok éppen az $a_i + 20k$, $a_i + 2 + 20k$, $a_i + 6 + 20k$, $a_i + 14 + 20k$ alakú számok ($k = 0, 1, 2, ...$). 2 pont

A 3-hatványok 20-as maradékai négyes periódusban rendre 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, ... Ebből az következik, hogy az $\{a_i\}$ sorozatban pontosan akkor lesz végtelen sok 3-hatvány, ha tagjai között szerepel egy olyan szám, amelynek 20-as maradéka 1, 3, 7 vagy 9. 1 pont

Jelölje a_0 20-as maradékát m, végignézzük a lehetőségeket:

Ha $m = 1$, $m = 6$, $m = 11$ vagy $m = 16$, akkor a sorozat minden tagja egyenlő lesz a_1-gyel.

Ha $m = 0$, akkor $a_2 = 20k + 7$ alakú, így az a_{2+4n} tagok között lesz az összes a_0-nál nagyobb 7-re végződő 3-hatvány. A további m értékeknél ennek mintájára megadjuk a sorozatnak egy olyan tagját, amelynek 20-as maradéka a 3, 7, 9 valamelyike és ez már garantálni fogja, hogy végtelen sok 3-hatványt tartalmazzon a sorozat. Az alábbi táblázatban mindig az m érték alá írtuk a sorozat egy megfelelő maradékú tagját.

$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=7$
$a_1=20k+3$	$a_4=20k+3$	$a_1=20k+7$	$a_1=20k+9$	$a_4=20k+7$

$m=8$	$m=9$	$m=10$	$m=12$	$m=13$
$a_3=20k+7$	$a_4=20k+9$	$a_1=20k+9$	$a_4=20k+7$	$a_3=20k+7$

$m=14$	$m=15$	$m=17$	$m=18$	$m=19$
$a_2=20k+3$	$a_2=20k+7$	$a_1=20k+3$	$a_2=20k+9$	$a_1=20k+7$

Azt kaptuk, hogy amennyiben a_0 1-re, vagy 6-ra végződik, akkor a sorozat nem tartalmazhat végtelen sok különböző 3-hatványt. Amennyiben a_0 éppen egy 1-re végződő 3-hatvány, vagy egy ilyennél éppen 5-tel kisebb szám, akkor a sorozat minden a_i $(i \geq 1)$ tagja ez a 3-hatvány. Ha pedig a_0 végződése nem 1, vagy 6, akkor a sorozat biztosan tartalmaz végtelen sok 3-hatványt. 3 pont

Összesen 7 pont

2. A négyzetrácson adott az $ABCD$ konvex rácsnégyszög úgy, hogy mind a négy csúcsa, mind pedig átlóinak M metszéspontja rácspont (azaz olyan pont, melynek mindkét koordinátája egész). Jelölje t az $ABCD$ négyszög, t_1 pedig az ABM háromszög területét. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget és állapítsuk meg, mikor lehet egyenlőség:

$$\sqrt{t} \geq \sqrt{t_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

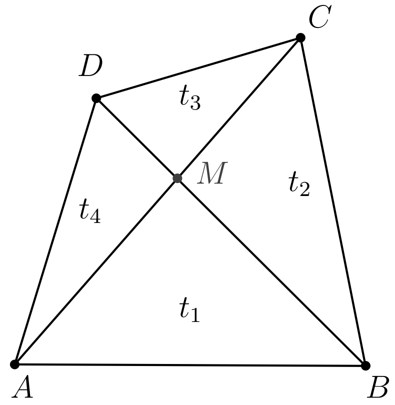
Megoldás: Jelölje a BMC, CMD és DMA háromszögek területét rendre t_2, t_3 és t_4. A t_1 és t_2 háromszögek B csúcsához tartozó magassága azonos, így területük aránya

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{AM}{MC}.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$\frac{t_3}{t_4} = \frac{MC}{AM}$$

e kettőt összevetve $t_1 t_3 = t_2 t_4$. 1 pont



Ezt és a számtani mértani közepek közötti egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \geq t_1 + t_3 + 2\sqrt{t_2 t_4} = t_1 + t_3 + 2\sqrt{t_1 t_3}. \qquad \text{2 pont}$$

Mivel CMD egy rácsháromszög, ezért területe legalább $\frac{1}{2}$, így az imént kapott becslést folytatva

$$t \geq t_1 + t_3 + 2\sqrt{t_1 t_3} \geq t_1 + \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{t_1}{2}} = \left(\sqrt{t_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, így gyököt vonhatunk és megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

2 pont

Egyenlőség akkor lehet, ha a számtani és mértani közepek közötti becslésnél is egyenlőség volt, azaz $t_2 = t_4$. Ez azt jelenti, hogy $t_4 + t_1 = t_2 + t_1$, azaz a BAD és BAC háromszögek terület ugyanakkora. Mivel AB közös alapjuk, így a C és D-hez tartozó magasságuk ugyanakkora, így a négyszög trapéz. A becslés során felhasználtuk, hogy $t_3 \geq \frac{1}{2}$, itt is egyenlőségnek kell állnia. Azt kaptuk, hogy egyenlőség esetén $ABCD$ olyan trapéz, melynek párhuzamos oldalai AB és CD továbbá a CMD háromszög területe $\frac{1}{2}$.

2 pont

Összesen 7 pont

3. Egy társaság n tagból áll, közülük néhányan ismerik egymást, az ismeretség kölcsönös. Bármely két, egymást nem ismerő embernek pontosan két közös ismerőse van. Amennyiben két ember ismeri egymást, nekik nincs közös ismerősük. Igazoljuk, hogy a társaság minden tagjának ugyanannyi ismerőse van.

Megoldás: Legyen a társaság egy tetszőlegesen választott tagja T, az ő ismerősei $A_1, A_2, ..., A_m$, akiket pedig nem ismer $B_1, B_2, ..., B_k$. A feladat feltételei szerint $i \neq j$ esetén A_i és A_j nem ismerhetik egymást, hiszen T közös ismerősük. Viszont T-n kívül minden ilyen A_i, A_j párnak van további közös ismerőse, és az csak B_s lehet, valamely s-re. Tekintve B_s-t és T-t, nekik pontosan két közös ismerősük van, az imént említett A_i, A_j. Tehát a különböző A_i, A_j párokhoz, a B-vel jelöltek közül is különböző tartozik, ebből pedig következik, hogy

$$\binom{m}{2} \leq k. \qquad \text{2 pont}$$

Másrészt minden i-re a T, B_i párnak van két közös ismerőse az A-val jelöltek közül és $i \neq j$ esetén a T, B_i és T, B_j párhoz tartozó A-beli párok is szükségképpen különbözőek. Ebből viszont az következik, hogy

$$k \leq \binom{m}{2}.$$ 2 pont

Azt kaptuk, hogy $k = \binom{m}{2}$. A társaság tagjai T, az A-val és a B-vel jelölt tagok, ezek száma együtt

$$1 + m + \binom{m}{2} = n$$

ahol m és n pozitív egészek. 1 pont

Ha $n = 1$, az állítás semmitmondó, $n = 2$-re a két embernek ismerni kell egymást, így mindenkinek 1 ismerőse van. Ha $n \geq 3$, akkor az iménti egyenletet átalakítva $m^2 + m + 2 - 2n = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. A gyökök szorzata $2 - 2n$ negatív, így csak egy pozitív gyök tartozhat n-hez, T választásától függetlenül. 2 pont

Megjegyezzük, hogy például $m = 2$-re $n = 4$. A feladat feltételeinek megfelel, ha a négy tag A, B, C, D és a következő négy pár ismeri egymást: AB, BC, CD és DA. További m értékekre vizsgálva $m = 3$ és $m = 4$ nem ad megoldást. $m = 5$-re jó konstrukció, ha a társaságot szemléltető gráf csúcsai egy négy dimenziós egységkocka csúcsai (a négy koordináta mindegyike 0, vagy 1). Egy ilyen számnégyes "ismerősei": a kocka négy szomszédos csúcsa, amelyek csupán egyetlen koordinátában térnek el, illetve a testátló másik végpontja. Például a (0;1;1;0) pont 5 "ismerőse": (1;1;1;0), (0;0;1;0), (0;1;0;0;), (0;1;1;1), és (1;0;0;1).

Általában a feladat feltételeinek megfelelő gráfok az úgynevezett erősen reguláris gráfok $(n, k, 0, 2)$ paraméterekkel.

Összesen 7 pont