



## A 2015/2016. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

### MATEMATIKA III. KATEGÓRIA (a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

#### Javítási-értékelési útmutató

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül** az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 19. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2015. november

A versenybizottság

#### 1. feladat

Mely  $ABC$  háromszögekhez léteznek olyan  $e$  és  $f$  egyenesek, hogy az  $A$  pontot  $e$ -re, majd a kapott pontot  $f$ -re tükrözve  $B$ -t kapjuk, viszont az  $A$ -t előbb  $f$ -re, majd a kapott pontot  $e$ -re tükrözve  $C$ -t kapjuk?

**Megoldás:** Tegyük fel először, hogy az  $ABC$  háromszöghöz található ilyen egyenesek. A két egyenes nem lehet párhuzamos, hiszen akkor  $A$ ,  $B$  és  $C$  kollineáris volna. (1 pont)

Legyen  $M$  az  $e$  és  $f$  metszéspontja. Az egymás után végzett két tükrözés  $M$  körüli elforgatással helyettesíthető, amelynek az irányát a két tükrözés sorrendje határozza meg: fordított sorrend esetén ellentétes irányú forgatást kapunk ugyancsak az  $M$  középpont körül. A forgatás szöge mindkét esetben ugyanakkora (történetesen az  $e$  és  $f$  által bezárt szög kétszeresével egyenlő). (2 pont)

Az  $A$  pontból  $B$ -t, illetve  $C$ -t  $M$  körüli ugyanakkora szögű forgatások származtatják, ezért  $AB = AC$ . Az  $ABC$  háromszög tehát olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek  $BC$  az alapja. (2 pont)

Megfordítva, ha az  $ABC$  háromszögben  $AB = AC$  teljesül, akkor  $e$ -nek és  $f$ -nek választhatjuk például a háromszög  $A$ -n áthaladó szimmetriatengelyét, illetve az  $AB$  oldal felező merőlegesét. (2 pont)

## 2. feladat

Milyen alapú számrendszer esetén létezik olyan 1-nél nagyobb pozitív egész, amely megegyezik a számjegyei összegének a négyzetével?

**Megoldás:** A 10-es számrendszerben a 81 szám ilyen, mert  $81 = (8 + 1)^2$ . (1 pont)

Ezt bármely  $b \geq 3$  alapú számrendszerre általánosíthatjuk: a  $b - 2$  és 1 számjegyekből álló kétjegyű  $b(b - 2) + 1 = (b - 1)^2$  szám jó, hiszen  $\overline{(b - 2)1}_b = (b - 2)b + 1 = ((b - 2) + 1)^2$ . (2 pont)

Megmutatjuk, hogy kettes alapú számrendszerben nincs ilyen szám, erre többféle megmondolást is adunk. Mindegyikben indirekt módon feltesszük, hogy egy  $k$ -jegyű  $n > 1$  számban  $S$  darab 1-es jegy szerepel és  $n = S^2$ .

(i) Egy négyzetszám 8-cal osztva csak 0, 1 vagy 4 maradékot adhat, ezért  $n$  utolsó három jegye 000, 001 vagy 100. (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy  $n$ -ben az egyesek száma legfeljebb  $k - 2$ , és így  $2^{k-1} \leq n = S^2 \leq (k - 2)^2$ . (1 pont)

Ez azonban nem lehet, mert teljes indukcióval belátjuk, hogy minden  $j = k - 2 \geq 0$ -ra  $2^{j+1} > j^2$ : ez  $j \leq 3$ -ra igaz, és  $j \geq 3$ -ról  $j + 1$ -re lépve a bal oldal a duplájára nő, a jobb oldal pedig az  $(1 + \frac{1}{j})^2 \leq (1 + \frac{1}{3})^2 < 2$ -szeresére. (2 pont)

(ii)  $S^2 = n \geq 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{S-1} = 2^S - 1$ . (1 pont)

Az előző részben látottakhoz hasonlóan teljes indukcióval adódik, hogy ez  $S \geq 5$ -re nem teljesül. (2 pont)

Így csak  $S \leq 4$ , azaz  $n = S^2 = 16, 9, 4$  jöhet szóba, azonban ezek sem teljesítik az  $n = S^2$  feltételt. (1 pont)

(iii) Ha  $n$  minden jegye 1, akkor  $2^k - 1 = n = S^2 = k^2$ , de itt a 4-gyel való osztási maradékok nem egyeznek. (1 pont)

Ha  $n$ -ben pontosan egy jegy 0, akkor  $2^k - 1 - 2^{k-2} \leq n = S^2 = (k - 1)^2$ , ha pedig  $n$ -ben legalább két jegy 0, akkor  $2^{k-1} \leq n = S^2 \leq (k - 2)^2$ , (1 pont)

azonban belátható (és belátandó), például teljes indukcióval, hogy az ellenkező irányú  $3 \cdot 2^{k-2} - 1 > (k - 1)^2$ , illetve  $2^{k-1} > (k - 1)^2$  egyenlőtlenségek állnak fenn. (2 pont)

(iv)  $2^{k-1} \leq n = S^2 \leq k^2$ , (1 pont)

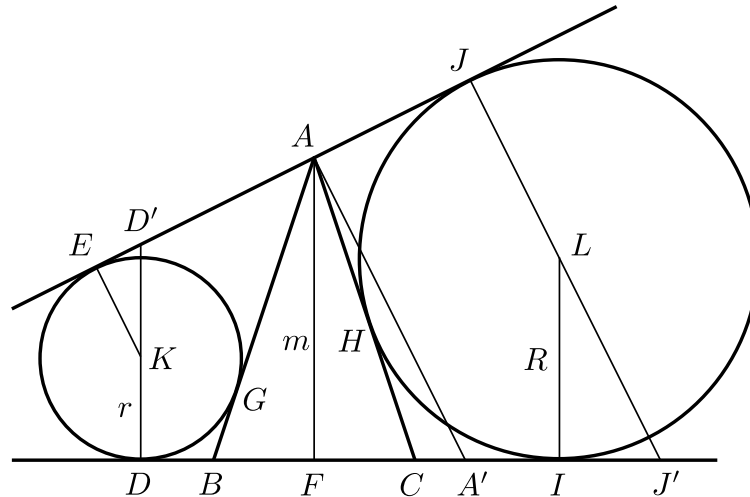
és indukcióval adódik, hogy ez  $k \geq 7$ -re nem teljesül. (1 pont)

Ekkor  $n = S^2 \leq k^2 \leq 36$ , azaz  $n = S^2 = 36, 25, 16, 9, 4$  jöhet szóba, azonban ezek sem teljesítik az  $n = S^2$  feltételt. (2 pont)

**3. feladat**

Adott a síkon két kör egymás külsejében, sugaraik  $r$  és  $R$ . Egy egyenlő szárú háromszög alapja az egyik külső közös érintőszakaszon fekszik, szemközti csúcsa a másik külső közös érintőszakaszra illeszkedik, szárjai pedig érintenek egyet-egyét a körök közül. Igazoljuk, hogy a háromszögnek az alaphoz tartozó magassága  $r + R$ .

**Első megoldás:** Ha  $r = R$ , akkor a körök középpontjaihoz tartozó szakaszfelező merőleges egyúttal a szóban forgó egyenlő szárú háromszögnek is szimmetriatengelye, emiatt ilyenkor az állítás magától értetődik. A továbbiakban feltesszük, hogy  $r < R$ , ekkor a két külső közös érintőegyenes metszi egymást.



Használjuk az ábra szerinti jelöléseket:  $A, B, C$  a háromszög csúcsai,  $F$  az alap felezőpontja, a körök középpontjai  $K$  és  $L$ , az érintési pontok  $D, E, G, H, I$  és  $J$ . Az  $A$ -ból,  $B$ -ből, illetve  $C$ -ből húzott érintőszakaszok egyenlőségét, valamint az  $AB = AC$  és  $BF = FC$  egyenlőségeket felhasználva

$$AE - AJ = AG - AH = CH - BG = CI - BD = FI - FD$$

következik. Emiatt  $A$  és  $F$  ugyanakkora részzszakaszokra osztja az egymással egyenlő  $EJ$ , illetve  $DI$  szakaszokat. Tehát  $AJ = DF$  (és hasonlóan  $AE = FI$ ). (3 pont)

A megoldást innen többféleképpen lehet folytatni, itt kétféle befejezést ismertetünk.

(i) Hosszabbítsuk meg az ábra szerint a  $DK$  szakaszt  $K$ -n túl, valamint a  $JL$  szakaszt  $L$ -en túl, hogy messék a másik közös érintőegyenes a  $D'$ , illetve  $J'$  pontban. Állítsunk merőlegest az  $EJ$  egyenesre az  $A$  pontban, és jelölje  $A'$  ennek a merőlegesnek a metszéspontját a  $DI$  egyenessel. Az így keletkező  $KD'E$ ,  $LJ'I$  és  $AA'F$  derékszögű háromszögek hasonlóak, hiszen  $K$ -nál,  $L$ -nél, illetve  $A$ -nál levő szögük egyenlő a két kör külső közös érintőinek, azaz a  $DI$  egyenesnek és az  $EJ$  egyenesnek a hajlásszögével. A hasonlóság miatt

$$\frac{KD'}{KE} = \frac{AA'}{AF} = \frac{LJ'}{LI},$$

jelöljük  $\lambda$ -val ezeknek az arányoknak a közös értékét. Ezzel  $DD' = (1+\lambda)r$ ,  $JJ' = (1+\lambda)R$ , valamint  $AA' = \lambda m$ , ahol  $m$  jelöli az  $AF$  magasságot. (2 pont)

Az  $FAD'D$  és  $JJ'A'A$  derékszögű trapézok magassága ( $DF$ , illetve  $AJ$ ) egyenlő, és a trapézok szögei is egyenlők. Ezért a két trapézban az alapok különbsége egyenlő:

$$m - (1 + \lambda)r = (1 + \lambda)R - \lambda m$$

Ebből átrendezve és  $(1 + \lambda)$ -val osztva a kívánt  $m = r + R$  egyenlőség adódik. (2 pont)

(ii) Legyen a két külső közös érintő közti szög  $2\alpha$ , metszéspontjuk pedig  $O$ . Ekkor

$$r + R = (OD + OI) \operatorname{tg} \alpha. \quad (1 \text{ pont})$$

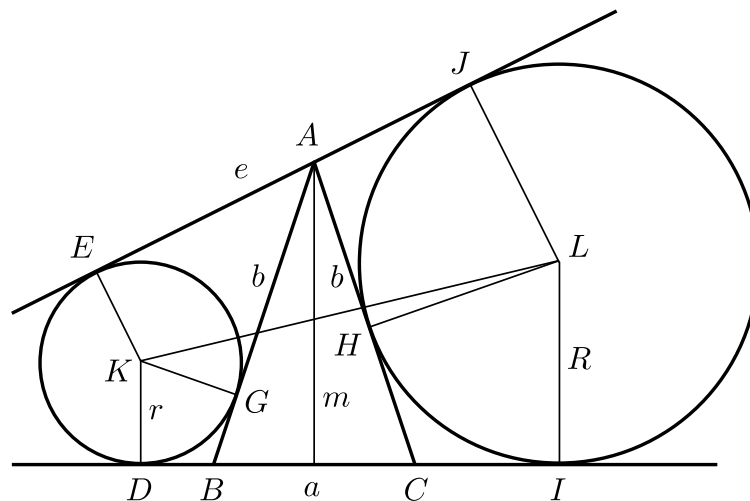
A korábban megállapított  $DF = AJ$  egyenlőség alapján

$$OD + OI = (OD + DF) + (OI - DF) = OF + (OJ - AJ) = OF + OA, \quad (1 \text{ pont})$$

tehát

$$r + R = (OF + OA) \operatorname{tg} \alpha = (\cos 2\alpha + 1)OA \operatorname{tg} \alpha = 2 \cos^2 \alpha OA \operatorname{tg} \alpha = OA \sin 2\alpha = m. \quad (2 \text{ pont})$$

**Második megoldás:** Használjuk most is az első megoldásban bevezetett  $A, B, C, D, E, G, H, I, J, K, L, m$  jelöléseket, továbbá jelölje  $a = BC$  az  $ABC$  háromszög alapját,  $b = AB = AC$  a szárát,  $e = DI = EJ$  pedig a külső közös érintőszakaszok hosszát.



Az  $A$ -ból,  $B$ -ből és  $C$ -ből húzott érintőszakaszok egyenlőségéből összeadással adódik, hogy az  $ABC$  háromszög kerülete  $2e$ -vel egyenlő. (3 pont)

Tekintsük a  $DILJEK$  hatszöget, és írjuk fel a területét kétféleképpen. Egyrészt a  $KL$  szimmetriatengely a hatszöget két egybevágó derékszögű trapézra vágja, amelyek területe külön-külön  $(r + R)e/2$ -vel egyenlő. (1 pont)

Másrészt a hatszög feldarabolható az  $ABC$  háromszögre és négy darab deltoidra, ezek  $DBGK$ ,  $KGAE$ ,  $CILH$  és  $HLJA$ . A deltoidok közül az első kettőnek a területösszege a  $BAK$  háromszög területének a kétszeresével ( $br$ -rel), a második kettőnek az összege pedig az  $ACL$  háromszög területének a kétszeresével ( $bR$ -rel) egyenlő. (1 pont)

A terület kétféle felírásából a

$$2 \cdot \frac{(r+R)e}{2} = \frac{am}{2} + br + bR$$

egyenlet adódik, ahonnan  $2e = a + 2b$  figyelembe vételével átrendezéssel a kívánt  $m = r + R$  formula következik. (2 pont)

#### 4. feladat

Legyenek az  $n$  pozitív egésznél nem nagyobb prímelek  $p_1, \dots, p_r$ . Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^r \lfloor \log_{p_i} n \rfloor = \sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor + 3 \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \right\rfloor - \dots,$$

ahol  $\lfloor x \rfloor$  az  $x$  szám (alsó) egészrészét jelenti.

**Megoldás:** Az egyenlőséget az adja, hogy valamit kétféleképpen is megszámloltunk, egyszerűen (ez a bal oldal) és bonyolultan (ez a jobb oldal). (1 pont)

Észrevesszük, hogy a bal oldal az  $n$ -nél nem nagyobb (prímelek és) prímpotenciák száma. (2 pont)

A jobb oldalon az első összegben a  $p_1, p_2, \dots, p_r$  többszöröseit számloltuk össze, a több  $p_i$ -vel oszthatókat annyiszor vettük figyelembe, ahány különböző prímosztójuk volt. A második összeg hasonlóan a prímpárokkal oszthatók száma stb. Világos, hogy a (prímelek és) prímpotenciák csak az első összegben jutnak szerephez. (1 pont)

Be kell még látni, hogy a  $t \geq 2$  különböző prímosztóval rendelkező,  $n$ -nél nem nagyobb számokat a jobb oldalon összességében 0-szor vesszük figyelembe. Valóban, ezek az egyes összegeknél  $t$ -szer,  $\binom{t}{2}$ -szer,  $\dots$ ,  $\binom{t}{t}$ -szer szerepelnek, azaz összesen

$$\sum_{j=1}^t (-1)^{j-1} j \binom{t}{j} = t \sum_{j=1}^t (-1)^{j-1} \binom{t-1}{j-1} = t(1-1)^{t-1} = 0\text{-szor.} \quad (3 \text{ pont})$$

#### 5. feladat

Egy 2016 csúcsú teljes gráf csúcsaiba versenybolhákat ültetünk, éleit pedig megszámozzuk az  $1, 2, \dots, \binom{2016}{2}$  természetes számokkal. A számokat ezután növekvő sorrendben felolvassuk. Minden egyes szám felolvasása után a számhoz tartozó él két végén ülő bolha helyet cserél. A verseny győztese a legtöbb helycserét végző bolha. (Holtverseny esetén több győztes is lehet.)

(a) Legfeljebb hány helycserét végezhet egy győztes bolha?

(b) Legalább hány helycserét kell végeznie egy győztes bolhának?

**Megoldás:** Amikor két bolha helyet cserél, úgy képzeljük, hogy mindkettő végigmegy – ellenkező irányban – a megfelelő csúcsokat összekötő élen. A verseny során minden egyes bolha egymás után csatlakozó élek egy sorozatát járja be, így a győztes bolha is. (1 pont)

Tetszőlegesen választva különböző, egymáshoz csatlakozó élek egy sorozatát, vagyis a gráf egy *vonalt*, ha ezek az élek kapják sorban az 1, 2, stb. sorszámokat, akkor a vonal kezdőpontján eredetileg ülő bolha pontosan ezeket az éleket fogja bejárni. Következésképpen a válasz az (a) kérdésre a 2016 csúcsú teljes gráfban található leghosszabb vonalnak a hossza. (1 pont)

A gráfban egy vonal kezdő- és végpontja kivételével minden más csúcs a vonalnak páros sok éléhez tartozik. A vonalon legfeljebb 2016 csúcs van. Ezek közül az első és az utolsó a vonalnak legfeljebb 2015 éléhez tartozhat, a többi legfeljebb 2014 csúcs mindegyike pedig legfeljebb 2014-hez. Így a vonalon található élek száma legfeljebb

$$\frac{2 \cdot 2015 + 2014 \cdot 2014}{2} = \binom{2016}{2} - \frac{2014}{2},$$

hiszen a számlálóban az éleket kétszer (a két végpont felől) számoltuk meg. (1 pont)

Ilyen hosszú vonal létezik is a 2016 csúcsú teljes gráfban. Ehhez felhasználjuk azt a jól ismert tényt, hogy egy összefüggő gráf éleit akkor és csak akkor lehet bejárni egy vonallal, ha a gráf minden csúcsának, kettő kivételével, páros a foka. Számozzuk meg a teljes gráf csúcsait 1-től 2016-ig, és hagyjuk el a 3 és 4, az 5 és 6, stb., a 2015 és 2016 sorszámú csúcsok közötti élt. A megmaradt gráfban az 1 és 2 számú csúcsok foka páratlan, az összes többi csúcs foka páros, így a gráfot egyetlen vonallal be lehet járni, amelynek a hosszát éppen a fenti kifejezés adja meg. (1 pont)

A feladat (b) részének megoldásához vegyük észre, hogy minden egyes él felsorolásakor két bolha mozgott. Összesen  $\binom{2016}{2}$  él és 2016 bolha van, tehát valamelyik bolhának – és így a győztesnek is – legalább

$$\frac{2 \cdot \binom{2016}{2}}{2016} = 2015$$

helycserét kellett végeznie. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy a csúcsokat fel lehet sorolni olyan sorrendben, hogy minden bolha pontosan 2015 helycserét végezzen, így a válasz a (b) kérdésre 2015.

A bolhák „fordulóiban” végzik a helycserét. Minden bolha minden fordulóban pontosan egy helycserét végez, és 2015 forduló lesz, ami a kívánt végeredményt adja. A fordulók szervezéséhez helyezük el a 2016 csúcsot a következőképpen. Közülük 2015-öt helyezünk el egy szabályos 2015-szög csúcsaiban, az utolsót pedig tegyük a sokszög középpontjába. Az  $i$ -edik fordulóban az  $i$ -edik csúcsban ülő bolha helyet cserél a középpontban ülővel, a többi bolha pedig az erre az egyenesre merőleges átlók mentén végzi a helycserét. (2 pont)