Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2016/2017-es tanév

Kezdők és Haladók
(I., II. és III. kategória)

Feladatok és megoldások

A verseny az NTP-TV-15-0048 azonosító számú pályázat alapján a Nemzeti Tehetség Program, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, valamint az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő támogatásával valósult meg.

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

Bolyai János Matematikai Társulat

Kezdők I–II. kategória, I. forduló

Feladatok

1. Melyik 15-nek az a legkisebb pozitív többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakja csak a 0 és a 7 számjegyeket tartalmazza?

2. Hányféleképpen olvasható ki Arany Dániel neve az alábbi ábrából, ha az olvasás során csak jobbra és lefelé haladhatunk?

A	R	A	N					
R	A	N	Y					
A	N	Y	D	Á	N	I	E	L
			Á	N	I	E	L	
			N	I	E	L		
			I	E	L			
			E	L				
			L					

3. Egy osztályba 15 gyerek jár, és az osztálynak 4 társasjátéka van. Minden gyerek legalább 1 játékkal szeret játszani. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások között biztosan van igaz!

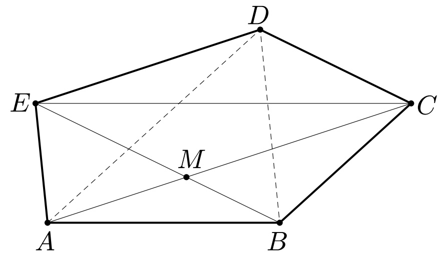
A. Legalább 3 olyan gyerek van, aki pontosan 4 játékkal szeret játszani.

B. Legalább 4 olyan gyerek van, aki pontosan 3 játékkal szeret játszani.

C. Legalább 5 olyan gyerek van, aki pontosan 2 játékkal szeret játszani.

D. Legalább 6 olyan gyerek van, aki pontosan 1 játékkal szeret játszani.

4. Az ábrán látható $ABCDE$ konvex ötszög minden átlója párhuzamos azzal az oldallal, amelyikkel nincs közös végpontja. Legyen az AC és a BE átlók metszéspontja M. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög területe egyenlő az EMC háromszög területével!



Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik 15-nek az a legkisebb pozitív többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakja csak a 0 és a 7 számjegyeket tartalmazza?

Megoldás. Mivel $15 = 3 \cdot 5$, továbbá a 3 illetve az 5 legnagyobb közös osztója 1, ezért a keresett szám osztható 3-mal és 5-tel is. 1 pont

Egy egész szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha 0-ra vagy 5-re végződik, tehát a keresett szám utolsó számjegye a 0. 2 pont

Mivel pozitív többszöröst keresünk, és a 3-mal való oszthatóság egyenértékű a számjegyek összegének 3-mal való oszthatóságával, ezért a 7-es jegyek számának 3-mal osztható pozitív egésznek kell lennie, így a keresett számban legalább három darab 7-es számjegy szerepel. 2 pont

Ezek alapján a keresett szám a 7770. 1 pont

2. Hányféleképpen olvasható ki Arany Dániel neve az alábbi ábrából, ha az olvasás során csak jobbra és lefelé haladhatunk?

A	R	A	N					
R	A	N	Y					
A	N	Y	D	Á	N	I	E	L
			Á	N	I	E	L	
			N	I	E	L		
			I	E	L			
			E	L				
			L					

Megoldás. Az olvasás során mindenképpen át kell haladnunk az egyetlen D betűn. 1 pont

A D betűig 10 különböző út vezet (ez megállapítható leszámlálással vagy a kombinációk számának megállapításával). 2 pont

Innen minden továbbhaladásnál szabadon dönthetünk, hogy jobbra vagy lefelé lépünk-e.

Mivel ezután még 5 lépést kell megtennünk, ezért a keresztnév kiolvasási lehetőségeinek száma: $2^5 = 32$. 2 pont

Így az összes esetek száma $10 \cdot 2^5 = 320$. 1 pont

3. Egy osztályba 15 gyerek jár, és az osztálynak 4 társasjátéka van. Minden gyerek legalább 1 játékkal szeret játszani. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások között biztosan van igaz!

A. Legalább 3 olyan gyerek van, aki pontosan 4 játékkal szeret játszani.

B. Legalább 4 olyan gyerek van, aki pontosan 3 játékkal szeret játszani.

C. Legalább 5 olyan gyerek van, aki pontosan 2 játékkal szeret játszani.

D. Legalább 6 olyan gyerek van, aki pontosan 1 játékkal szeret játszani.

Megoldás. Tegyük fel indirekt, hogy egyik állítás sem igaz. 1 pont

Vagyis

- legfeljebb 2 olyan gyerek van, aki pontosan 4 játékkal szeret játszani,
- legfeljebb 3 olyan gyerek van, aki pontosan 3 játékkal szeret játszani,
- legfeljebb 4 olyan gyerek van, aki pontosan 2 játékkal szeret játszani,
- legfeljebb 5 olyan gyerek van, aki pontosan 1 játékkal szeret játszani. 1 pont

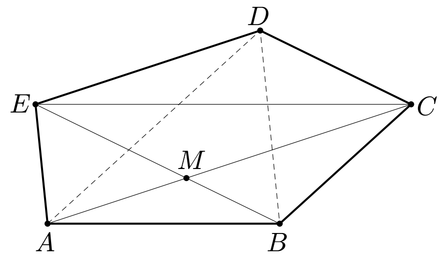
Mivel minden gyerek legalább 1 játékkal szeret játszani, ezért az összes gyereket csoportokba oszthatjuk aszerint, hogy pontosan 1, 2, 3, vagy 4 játékkal szeretnek játszani. 1 pont

Feltevésünk alapján ekkor legfeljebb $5+4+3+2=14$ gyerek lehet az osztályban. 1 pont

Mivel $14<15$, ezért ellentmondáshoz jutottunk. 1 pont

Tehát hamis volt az indirekt feltevésünk, vagyis az állítások között biztosan van igaz. 1 pont

4. Az ábrán látható $ABCDE$ konvex ötszög minden átlója párhuzamos azzal az oldallal, amelyikkel nincs közös végpontja. Legyen az AC és a BE átlók metszéspontja M. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög területe egyenlő az EMC háromszög területével!



Megoldás. Mivel AD párhuzamos BC-vel, ezért az ABC, illetve BCD háromszögek BC oldalhoz tartozó magasságai egyenlő hosszúak, tehát a területük egyenlő. 2 pont

Ugyanígy a BCD és az ECD háromszögekben is egyenlő a CD oldalhoz tartozó magasság hossza, (mivel EB párhuzamos DC-vel) tehát ezeknek a háromszögeknek is egyenlő a területe. Így korábbi megállapításaink alapján az ABC és az EDC háromszögek területe is egyenlő. 1 pont

Az $EMCD$ négyszög paralelogramma. 1 pont

Az $EMCD$ paralelogrammát átlói két-két egybevágó háromszögre osztják, tehát az EMC háromszög egybevágó (és így egyenlő területű) az EDC háromszöggel. 1 pont

Ezzel beláttuk, hogy az ABC és az EMC háromszögek területe egyenlő. 1 pont

A szabályos ötszög esetének helyes vizsgálata önmagában 1 pontot ér.

Kezdők I–II. kategória, II. forduló
Kezdők III. kategória I. forduló

Feladatok

1. Egy kört az AB átmérője két ívre osztja. Ezek közül az egyiken kijelöljük a C és D pontokat. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja P, az AD és BC egyeneseké pedig Q. Mekkora szöget zár be a PQ egyenes az AB átmérővel? (6 pont)

2. Legyen S a $H=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ halmaz olyan legalább kételemű részhalmaza, amelyre teljesül, hogy bármely két különböző elemének összegét képezve, csupa különböző számokat kapunk. Mennyi lehet az S elemei számának maximuma? (8 pont)

3. Igazoljuk, hogy egy egység sugarú kört tartalmazó háromszögnek egyik magassága legalább 3 egység hosszúságú. (8 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az x és y valós számok összege 2, akkor

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) \geqq 4. \qquad \text{(8 pont)}$$

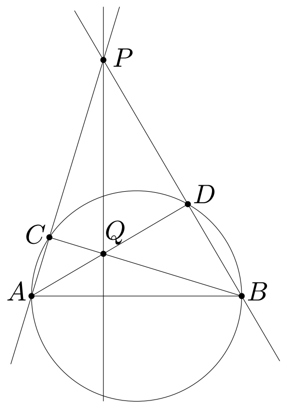
5. Egy szórakozott professzornak 2000 – 2000 db 20 és 50 Ft-osa van. Tartozik valakinek, de elfelejtette, hogy pontosan mennyivel. Csak arra emlékszik, hogy az összeg 50-re végződik, és a nála lévő pénzérmékkel húszféleképpen tudja kifizetni.

Mekkora a professzor adóssága? (10 pont)

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy kört az AB átmérője két ívre osztja. Ezek közül az egyiken kijelöljük a C és D pontokat. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja P, az AD és BC egyeneseké pedig Q. Mekkora szöget zár be a PQ egyenes az AB átmérővel? (6 pont)

Megoldás. a) Készítsünk ábrát!



1 pont

A Thalész-tétel miatt az $ACB\sphericalangle$ és az $ADB\sphericalangle$ derékszög. 2 pont

Ennek következtében az APB háromszögben AD és BC magasságvonalak. 1 pont

Így metszéspontjuk Q az APB háromszög magasságpontja. 1 pont

PQ a háromszög harmadik magasságvonala, azaz a PQ egyenes merőleges AB-re. 1 pont

Összesen: 6 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző *indoklás nélkül* (csak az ábra alapján) állapítja meg a merőlegességet, *2 pontot* kaphat.

2. Legyen S a $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz olyan legalább kételemű részhalmaza, amelyre teljesül, hogy bármely két különböző elemének összegét képezve, csupa különböző számokat kapunk. Mennyi lehet az S elemei számának maximuma? (8 pont)

Megoldás. Az $S = \{1; 2; 3; 5; 8\}$ ötelemű halmaz elemeiből képzett kéttagú összegek páronként különböző értékűek ($1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $1 + 5 = 6$, $1 + 8 = 9$, $2 + 3 = 5$, $2 + 5 = 7$, $2 + 8 = 10$, $3 + 5 = 8$, $3 + 8 = 11$, $5 + 8 = 13$). 3 pont

Tegyük fel, hogy létezik a feltételeknek megfelelő tulajdonságú hatelemű S halmaz is. Ekkor S elemeiből $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$-féle kéttagú összeg képezhető. 1 pont

A H elemeiből képezhető kéttagú összegek értéke 3-tól 17-ig terjed, azaz 15-féle lehet. 1 pont

Így ha a 6-elemű S halmaznál azt szeretnénk elérni, hogy minden páronkénti összeg értéke különböző legyen, akkor az eredmények között minden 3-tól 17-ig terjedő számnak elő kell fordulnia. 1 pont

Viszont a 3 és a 17 csak egyféleképpen adódhat összegként, mégpedig az $1 + 2 = 3$ és $8 + 9 = 17$ formában. Ez azt jelenti, hogy ekkor az 1, 2, 8, 9 számoknak mindenképpen elő kell fordulniuk az S halmaz elemei között. 1 pont

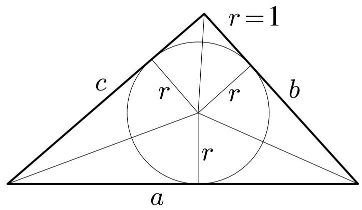
Ez viszont az $1 + 9 = 2 + 8$ egyenlőség alapján nem lehetséges.

A kapott ellentmondásból következik, hogy az S halmaz maximális elemszáma 5. 1 pont

Összesen: 8 pont

3. Igazoljuk, hogy egy egység sugarú kört tartalmazó háromszögnek egyik magassága legalább 3 egység hosszúságú. (8 pont)

1. megoldás. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit! A bizonyítást elég elvégezni arra az esetre, amikor a kör érinti a háromszög oldalait, mivel az egyéb esetekben létezik olyan, az eredetihez hasonló háromszög, amelynek oldalai párhuzamosak az eredeti háromszög oldalaival, érintik a megadott kört, és magasságai legfeljebb akkorák, mint az eredeti háromszögé. 1 pont



A háromszög területe az egyes háromszögek területének összege, azaz

$$T = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}.$$ 1 pont

Másrészt:

$$T = \frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2} = \frac{cm_c}{2},$$ 1 pont

ahonnan

$$a = \frac{2T}{m_a}, \quad b = \frac{2T}{m_b}, \quad c = \frac{2T}{m_c}. \qquad \text{2 pont}$$

Ezeket behelyettesítve a fenti kifejezésbe, és elvégezve az egyszerűsítéseket kapjuk, hogy

$$1 = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}. \qquad \text{1 pont}$$

Jelölje a háromszög leghosszabb magasságát m, ekkor

$$1 = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geqq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{3}{m}.$$

Ebből adódik a feladat állítása. 2 pont

Összesen: 8 pont

2. megoldás. Annak tárgyalása, hogy ha a beírt kört a háromszög oldalai nem érintik (ld. korábban). 1 pont

Tegyük fel, hogy a háromszög (egyik) legrövidebb oldala a (ebben az esetben hozzá tartozik a leghosszabb magasság). Ekkor 1 pont

$$T = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{am_a}{2}. \qquad \text{2 pont}$$

Becsüljük meg alulról a területet, és használjuk fel, hogy a kör egységsugarú.

$$\frac{am_a}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \geqq \frac{3ar}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Ebből $m_a \geqq 3$ adódik, tehát a feladat állítása teljesül. 4 pont

---

Összesen: 8 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az x és y valós számok összege 2, akkor

$$\left(x^2 + 1\right)\left(y^2 + 1\right) \geqq 4. \qquad \text{(8 pont)}$$

1. megoldás. Az egyenlőtlenség bal oldalán elvégezve a beszorzást:

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \geqq 4. \qquad \text{1 pont}$$

A középső két tag helyett egy összeg négyzetét kialakítva:

$$x^2y^2 + (x+y)^2 - 2xy + 1 \geqq 4. \qquad \text{2 pont}$$

Majd teljes négyzetté alakítva:

$$(xy-1)^2+(x+y)^2 \geqq 4. \qquad \text{2 pont}$$

Mivel $(x+y)^2=4$ és $(xy-1)^2 \geqq 0$, ezért a feladatban szereplő egyenlőtlenség teljesül. 2 pont

Az egyenlőség feltétele: $x+y=2$, $xy=1$, azaz $x=y=1$. 1 pont

Összesen: 8 pont

2. megoldás. A megadott feltételt felhasználva: $y=2-x$. 1 pont

A helyettesítést elvégezve:

$$\left(x^2+1\right)\left[(2-x)^2+1\right] \geqq 4. \qquad \text{1 pont}$$

A műveleteket végrehajtva:

$$\left(x^2+1\right)\left(5-4x+x^2\right) \geqq 4, \qquad \text{1 pont}$$

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+1 \geqq 0. \qquad \text{1 pont}$$

Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenség baloldalán egy teljes negyedik hatvány áll, ezért

$$(x-1)^4 \geqq 0.$$

Mivel egy negyedik hatvány értéke biztosan nemnegatív szám, ezért az egyenlőtlenség teljesül. 3 pont

Az egyenlőség feltétele: $x=y=1$. 1 pont

Összesen: 8 pont

3. megoldás. Alkalmazzuk az $x=1+a$ és $y=1-a$ helyettesítéseket. Ekkor 1 pont

$$\left[(1+a)^2+1\right]\left[(1-a)^2+1\right] \geqq 4. \qquad \text{1 pont}$$

A négyzetre emeléseket és az összevonásokat elvégezve:

$$\left(a^2+2+2a\right)\left(a^2+2-2a\right) \geqq 4. \qquad \text{2 pont}$$

A baloldalon az ismert nevezetes azonosság segítségével elvégezve a beszorzást:

$$\left(a^2+2\right)^2-(2a)^2 \geqq 4. \qquad \text{1 pont}$$

Ebből a rendezés után $a^4 \geqq 0$ adódik. 1 pont

Mivel egy negyedik hatvány értéke csak nemnegatív szám lehet, ezért az egyenlőtlenség tetszőleges a valós számra, és x, y-ra teljesül. 1 pont

Az egyenlőség feltétele: $a = 0$, azaz $x = y = 1$. 1 pont

Összesen: 8 pont

5. Egy szórakozott professzornak 2000 – 2000 db 20 és 50 Ft-osa van. Tartozik valakinek, de elfelejtette, hogy pontosan mennyivel. Csak arra emlékszik, hogy az összeg 50-re végződik, és a nála lévő pénzérmékkel húszféleképpen tudja kifizetni.

Mekkora a professzor adóssága? (10 pont)

Megoldás. A kifizetendő összegben az 50 Ft-osok száma biztosan páratlan, mert ha páros számú 50-essel törlesztenénk, akkor azok összege 00-ra végződne, és a fennmaradó részt 20 Ft-osokkal nem lehetne kifizetni, mivel az 50-re végződő számok nem oszthatók 20-szal.

Ugyanígy belátható, hogy a felhasznált 20 Ft-osok száma 5-tel osztható. 2 pont

A vizsgálatot több részre lehet osztani aszerint, hogy a rendelkezésre álló érmék száma (2000 – 2000 db.) korlátozza-e a lehetőségek számát vagy sem.

1. eset: A tartozás összege legfeljebb $2000 \cdot 20 + 50$ Ft = 40 050 Ft.

Ekkor, ha a tartozás összege $k \cdot 100 + 50$ Ft $(k \in \mathbb{N}^+)$, akkor a felhasznált 50 Ft-osok száma bármely 1-től $2k + 1$-ig terjedő páratlan szám lehet (hiszen van elég érménk). 1 pont

Ez $k + 1$ lehetőség, vagyis $k = 19$ esetén van 20 lehetőségünk kifizetni a tartozást csak 20 és 50 Ft-osokkal. 1 pont

Tehát a tartozás összege lehet 1950 Ft. 1 pont

2. eset: A tartozás összege legalább 40 150, de legfeljebb 99 950 Ft.

Ekkor 1 db 50 Ft-ost felhasználva már nem lehet a fennmaradó összeget csak 20 Ft-osokkal kifizetni, de több 50 Ft-ost felhasználva, igen. Ebben az esetben a lehetőségek száma a felhasznált 20 Ft-osok lehetséges számával, azaz a 0-tól 2000-ig terjedő 5-tel osztható számok darabszámával egyenlő, ami a 401. Tehát a kifizetésre ekkor 19-nél több lehetőség adódik. 1 pont

3. eset: A tartozás összege legalább 100 050 Ft. Ez csak 50 Ft-osokkal nem fizethető ki.

Ekkor vizsgáljuk meg, hogy hányféle érmekombináció maradhat a professzornál. Ez egyértelműen meghatározza, hogy hányféle kombinációban történhet a törlesztés. Mivel ebben az esetben a professzornál kevesebb, mint 40 050 Ft marad, ezért az 1. részben leírtak értelmében ez az összeg csak 1950 Ft lehet ahhoz, hogy 20-féleképpen állhasson elő 20 és 50 Ft-osok összegeként. 3 pont

Tehát a tartozás összege $140\,000 - 1950 = 138\,050$ Ft is lehet. 1 pont

Összesen: 10 pont

Kezdők I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Valamely a, b, c prímszámokra és k pozitív egész számra teljesül a következő egyenlőség: $a^2 + b^2 + c^2 = 9k^2 + 13$. Adjuk meg k összes lehetséges értékét!

2. Egy szabályos sokszög alapú egyenes hasáb éleinek, lapátlóinak és testátlóinak száma valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő elemei. Hány lapja van ennek a hasábnak?

3. Az ABC és CDE szabályos háromszögekre teljesül, hogy C az AE szakasz egy belső pontja, a B és D csúcsok pedig az AE egyenes azonos oldalán helyezkednek el. Legyenek F és G a BC, illetve a DE oldalak felezőpontjai. Határozzuk meg az AFG háromszög területét, ha tudjuk, hogy az ABC háromszög területe 24 cm^2, a CDE háromszögé pedig 60 cm^2!

Megoldások és javítási útmutató

1. Valamely a, b, c prímszámokra és k pozitív egész számra teljesül a következő egyenlőség: $a^2 + b^2 + c^2 = 9k^2 + 13$. Adjuk meg k összes lehetséges értékét!

Megoldás. A jobb oldalon szereplő $9k^2 + 13$ kifejezés 3-mal vett osztási maradéka bármely k pozitív egész szám esetén 1, tehát a baloldalnak is 3-mal osztva 1 maradékot kell adnia. 2 pont

Mivel egy négyzetszám 3-mal osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat, 1 pont
és az $a^2 + b^2 + c^2$ összegnek 3-mal osztva 1 maradékot kell adnia, ezért az a^2, b^2, c^2 négyzetszámok közül kettő 3-mal osztható, egy pedig 3-mal osztva 1 maradékot ad. 1 pont

Mivel a 3 prímszám, ezért például a^2 pontosan akkor osztható 3-mal, ha a is osztható 3-mal. 1 pont

Mivel az a, b, c számok prímek, ezért ha kettő közülük 3-mal osztható, akkor ez a kettő 3-mal egyenlő, hiszen a 3 az egyetlen 3-mal osztható prímszám. Legyen például $a = b = 3$. 1 pont

Ekkor

$$\begin{aligned} c^2 + 18 &= 9k^2 + 13, \\ 5 &= 9k^2 - c^2, \\ 5 &= (3k - c)(3k + c). \end{aligned}$$

2 pont

Mivel $3k - c < 3k + c$ és $3k + c > 0$, ezért $3k - c = 1$ és $3k + c = 5$. 1 pont

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $k = 1$, $c = 2$, és ezek valóban teljesítik azt a két feltételt, hogy c prímszám és k pedig pozitív egész szám.

Tehát k egyetlen lehetséges értéke: $k = 1$. 1 pont

Megjegyzés: A megoldás próbálgatással történő megtalálásáért (a, b és c, valamint k értékének helyes megadásáért) legfeljebb *2 pont* adható.

2. Egy szabályos sokszög alapú egyenes hasáb éleinek, lapátlóinak és testátlóinak száma valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő elemei. Hány lapja van ennek a hasábnak?

Megoldás. Jelölje n a hasáb alapsokszögének oldalszámát ($n \geqq 3$, n egész). Ekkor a hasáb

– éleinek száma $3n$; 1 pont

– lapátlóinak száma $2 \cdot \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} + 2n = n^2 - n$; 1 pont

– testátlóinak száma $n \cdot (n-3) = n^2 - 3n$. 1 pont

A megfelelő hasábok megtalálásához, elég a növekvő számtani sorozatokkal foglalkoznunk. Mivel a lapátlók száma biztosan $2n$-nel nagyobb, mint a testátlók száma, ezért elegendő a következő 3 esetet vizsgálni:

1. eset: A számtani sorozat egymást követő elemei: $3n$, $n^2 - 3n$ és $n^2 - n$. Ekkor $d = 2n$. Innen $3n + 2n = n^2 - 3n$, ahonnan $n = 8$. 2 pont

2. eset: A számtani sorozat egymást követő elemei: $n^2 - 3n$, $3n$ és $n^2 - n$. Ekkor $d = n$. Innen $n^2 - 3n + n = 3n$, ahonnan $n = 5$. 2 pont

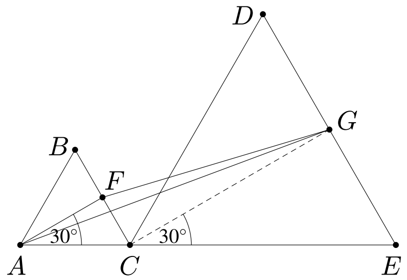
3. eset: A számtani sorozat egymást követő elemei: $n^2 - 3n$, $n^2 - n$ és $3n$. Ekkor $d = 2n$. Innen $n^2 - n + 2n = 3n$, ahonnan $n = 2$, ami nem lehet megoldás. 2 pont

Tehát két hasáb felel meg a feladat feltételeinek: a szabályos ötszög alapú, illetve a szabályos nyolcszög alapú. Előbbinek 7, utóbbinak 10 lapja van. 1 pont

Megjegyzés: Valamelyik megoldás próbálgatással történő megtalálásáért (egy konkrét hasáb éleinek, lapátlóinak, testátlóinak leszámlálásáért, illetve a lapok számának megállapításáért) legfeljebb *3 pont* adható.

3. Az ABC és CDE szabályos háromszögekre teljesül, hogy C az AE szakasz egy belső pontja, a B és D csúcsok pedig az AE egyenes azonos oldalán helyezkednek el. Legyenek F és G a BC, illetve a DE oldalak felezőpontjai. Határozzuk meg az AFG háromszög területét, ha tudjuk, hogy az ABC háromszög területe 24 cm^2, a CDE háromszögé pedig 60 cm^2!

Megoldás. Készítsünk ábrát.



1 pont

Egészítsük ki az ábrát a CG szakasszal. 2 pont

Ekkor az AF és CG szögfelezői az ABC és CDE háromszögeknek, így mindkét szakasz $30°$-os szöget zár be az AE egyenessel, ezért egymással párhuzamosak. 2 pont

Így a C és G pontok egyenlő távolságra vannak az AF egyenestől. 1 pont

Ez viszont azt jelenti, hogy az AFC és AFG háromszögeknek közös az AF oldala és azonos hosszúságú az AF oldalhoz tartozó magassága. Így a két háromszög területe megegyezik. 2 pont

Mivel az AF szakasz felezi az ABC háromszög területét, ezért 1 pont

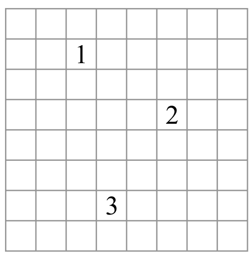
$$t(AFG) = t(AFC) = \frac{1}{2}t(ABC) = 12\ \mathrm{cm}^2.$$ 1 pont

Kezdők II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy 8×8-as négyzetrács (tábla) 1×1-es négyzeteibe (mezőibe) az $1, 2, \ldots, k$ ($k \leqq 64$) számokat írjuk valamilyen elrendezésben. Az $\{1, 2, \ldots, k\}$ mezőket együttesen útvonalnak nevezzük. Az útvonal teljes, ha $k = 64$, tehát az összes mező ki van töltve. Egy zebra lépked a tábla mezőin a következőképpen:

Tegyük fel, hogy a zebra az A mezőn áll. A fel, le, balra, jobbra irányok valamelyikében 2 mezőnyi távolságra mozdulva a táblán a zebra az A mezőből a B mezőbe érkezik, majd az első irányra merőlegesen a B-ből 3 mezőnyi távolságra elmozdulva a táblán a C mezőbe érkezik. Ekkor az A-ból C-be lépés a zebra egy szabályos lépése. Például az ábrán látható 1-es mezőből a 2-es mezőbe lépés egy szabályos zebra-lépés, a 2-es mezőből a 3-as mezőbe lépés egy újabb szabályos zebra-lépés.



Azt mondjuk, hogy az $\{1, 2, \ldots, k\}$ útvonal zebra-útvonal, ha a zebra az 1-es számú mezőből a 2-es számú mezőbe tud lépni szabályos zebra-lépéssel, az i-edik mezőből az $i + 1$-edikbe tud lépni szabályos zebra-lépéssel minden $1 \leqq i \leqq k - 1$-re.

Létezik-e a 8×8-as táblán teljes zebra-útvonal?

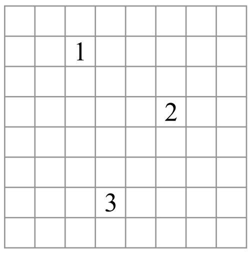
2. Legyen az $ABCDE$ olyan konvex ötszög, melynek oldalaira teljesül, hogy $AB + CD = BC + DE$, és az ötszöghöz található olyan k kör, melynek középpontja az AE oldalon van, és a kör az AB, BC, CD és DE oldalakat a P, Q, R, S pontokban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az AE és PS egyenesek párhuzamosak.

3. Legyen $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2017}$, ahol $1 \leqq n \leqq 2017$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Számítsuk ki az $a_1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2017}^2$ összeg pontos értékét.

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy 8×8-as négyzetrács (tábla) 1×1-es négyzeteibe (mezőibe) az $1, 2, \ldots, k$ ($k \leqq 64$) számokat írjuk valamilyen elrendezésben. Az $\{1, 2, \ldots, k\}$ mezőket együttesen útvonalnak nevezzük. Az útvonal teljes, ha $k = 64$, tehát az összes mező ki van töltve. Egy zebra lépked a tábla mezőin a következőképpen:



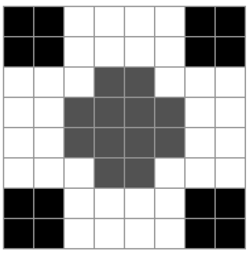
Tegyük fel, hogy a zebra az A mezőn áll. A fel, le, balra, jobbra irányok valamelyikében 2 mezőnyi távolságra mozdulva a táblán a zebra az A mezőből a B mezőbe érkezik, majd az első irányra merőlegesen a B-ből 3 mezőnyi távolságra elmozdulva a táblán a C mezőbe érkezik. Ekkor az A-ból C-be lépés a zebra egy szabályos lépése. Például az ábrán látható 1-es mezőből a 2-es mezőbe lépés egy szabályos zebra-lépés, a 2-es mezőből a 3-as mezőbe lépés egy újabb szabályos zebra-lépés.

Azt mondjuk, hogy az $\{1, 2, \ldots, k\}$ útvonal zebra-útvonal, ha a zebra az 1-es számú mezőből a 2-es számú mezőbe tud lépni szabályos zebra-lépéssel, az i-edik mezőből az $i + 1$-edikbe tud lépni szabályos zebra-lépéssel minden $1 \leqq i \leqq k - 1$-re.

Létezik-e a 8×8-as táblán teljes zebra-útvonal?

Megoldás. Nem létezik teljes zebra-útvonal. 1 pont

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy létezik teljes zebra-útvonal, és rögzítsünk egy ilyet 1 pont



Színezzük ki a táblát az ábrán látható módon fekete, fehér, és szürke színekkel 1 pont

A zebra fekete színű mezőről csak szürke színű mezőre tud lépni, és fekete színű mezőre csak szürke színű mezőről tud lépni. 1 pont

Mivel az útvonal teljes, ezért az összes négyzetet érintenie kell a zebrának. 1 pont

Képezzünk egy gráfot az útvonalból az alábbi módon: Legyenek az $1, 2, \ldots, 64$ mezők a pontok, és kössük össze az útvonal egymást követő mezőinek megfelelő pontokat egy éllel. Tehát az élek az $i-(i+1)$ mezők között haladnak minden $1 \leqq i \leqq 63$-ra. Színezzük ki a gráf pontjait a nekik megfelelő mező színével. A gráf minden pontjának kettő a foka, kivéve a két végpontot, ezeknek 1 a foka. 1 pont

Mivel 16 fekete mező van, ezért a fekete pontok halmazából összesen legalább $14 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 30$ él halad ki. 2 pont

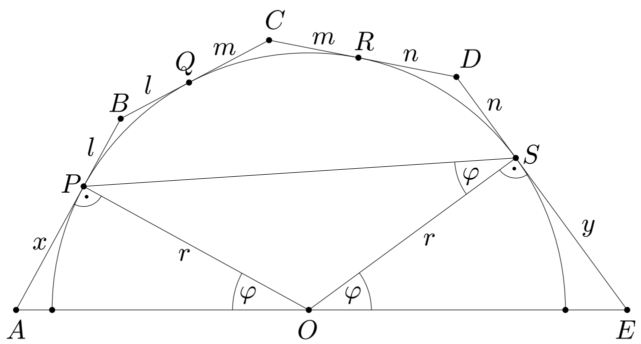
Mivel 12 szürke mező van, ezért a szürke pontok halmazába összesen legfeljebb $12 \cdot 2 = 24$ él haladhat be. 1 pont

Mivel a fekete pontokból csak a szürke pontok felé halad él, és $24 < 30$, ezért ellentmondáshoz jutottunk. 1 pont

Tehát feltevésünk nem volt igaz, vagyis nem létezik teljes zebra-útvonal.

2. Legyen az $ABCDE$ olyan konvex ötszög, melynek oldalaira teljesül, hogy $AB + CD = BC + DE$, és az ötszöghöz található olyan k kör, melynek középpontja az AE oldalon van, és a kör az AB, BC, CD és DE oldalakat a P, Q, R, S pontokban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az AE és PS egyenesek párhuzamosak.

Megoldás.



Helyes ábra: 1 pont

Használjuk fel, hogy egy pontból adott körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúságúak. Ez alapján:

$$BP = BQ = l,$$
$$CQ = CR = m,$$
$$DR = DS = n.$$ 1 pont

Bevezetve az $AP = x$, $ES = y$ jelöléseket, az $AB + CD = BC + DE$ egyenlőséget az érintőszakaszok segítségével felírva: $x + l + m + n = l + m + n + y$, amiből $x = y$, azaz $AP = ES$. 2 pont

Jelöljük a k kör középpontját O-val. Mivel az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért $OPA\sphericalangle = OSE\sphericalangle = 90°$. 1 pont

Továbbá $OP = OS = r$ miatt $OPA\triangle \cong OSE\triangle$, mivel két-két oldaluk és a nagyobbikkal szemközti szögük azonos. 1 pont

Ezt felhasználva: $AOP\sphericalangle = EOS\sphericalangle = \varphi$ és $POS\sphericalangle = 180° - 2\varphi$. 2 pont

Az OSP egyenlőszárú háromszögben

$$OSP\sphericalangle = \frac{180° - POS\sphericalangle}{2} = \varphi, \quad SOE\sphericalangle = OSP\sphericalangle = \varphi. \qquad \text{1 pont}$$

Így az említett szögek váltószögek, szögszáraik párhuzamosak, ami éppen azt jelenti, hogy az AE és PS egyenesek párhuzamosak. 1 pont

3. Legyen $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2017}$, ahol $1 \leqq n \leqq 2017$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Számítsuk ki az $a_1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2017}^2$ összeg pontos értékét.

Megoldás. Egy többtagú összeg négyzete egyenlő: a tagok négyzeteinek összege + + az összes lehetséges kéttényezős szorzatok kétszereseinek az összege.

Elvégezzük a négyzetre emeléseket, majd először a négyzetes tagokat, utána pedig a kétszeres szorzatokat számoljuk össze.

A négyzetes tagok összege:

Az $\frac{1}{k^2}$-es tag k-szor fog szerepelni (a_1-től a_k-ig vett tagok négyzetében), így ezek összege $\frac{1}{k^2} \cdot k = \frac{1}{k}$. 2 pont

Ezeknek az összege az összes k-ra 1-től 2017-ig $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2017} = a_1$. 1 pont

A kétszeres szorzatok összege:

Legyen $i < j$. Ekkor a $2 \cdot \frac{1}{ij}$ azokban az a_k^2-ekben fordul elő, ahol $k \leqq i$, így ezeknek az összege $i \cdot 2 \cdot \frac{1}{ij} = \frac{2}{j}$. Adott j-hez $j - 1$ darab olyan i van, amelyre $i < j$, ezért a rögzített j-hez tartozó lehetséges $\frac{2}{ij}$ alakú számok összege $(j-1) \cdot \frac{2}{j} = 2 - \frac{2}{j}$. 4 pont

Ha az összes j-re kiszámítjuk az összeget, akkor a következőt kapjuk:

$$\left(2 - \frac{2}{1}\right) + \left(2 - \frac{2}{2}\right) + \left(2 - \frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(2 - \frac{2}{2017}\right) =$$

$$= 2 \cdot 2017 - 2 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2017}\right) = 4034 - 2a_1. \qquad \text{2 pont}$$

Ezért $a_1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2017}^2 = a_1 + a_1 + 4034 - 2a_1 = 4034$. 1 pont

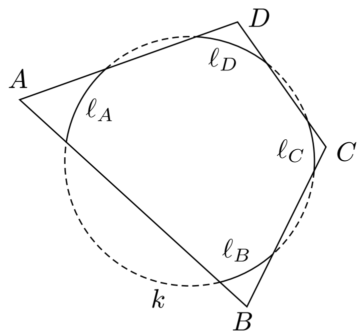
Kezdők III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Dia 37 napon át, minden nap legalább egy feladatot megoldva készült az Arany Dániel matematikaverseny döntőjére. Bizonyítsuk be, hogy volt néhány szomszédos nap, melyeken összesen 13 feladatot oldott meg, ha tudjuk, hogy legfeljebb 60 feladatot csinált meg összesen.

2. Hányféleképpen lehet úgy kiválasztani egy $n \times n$-es táblázat néhány mezőjét, hogy semelyik két sorban ne egyezzen meg a kiválasztott mezők száma és semelyik két oszlopban se egyezzen meg a kiválasztott mezők száma?

3. Tegyük fel, hogy $ABCD$ húrnégyszög, és a k olyan kör, mely a húrnégyszög minden oldalát két pontban metszi. Tekintsük, az ábrán látható módon, az $ABCD$ belsejében létrejövő ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D íveket. Bizonyítsuk be, hogy az ℓ_A és ℓ_C ívek hosszának összege egyenlő az ℓ_B és ℓ_D ívek hosszának összegével.



Megoldások és javítási útmutató

1. Dia 37 napon át, minden nap legalább egy feladatot megoldva készült az Arany Dániel matematikaverseny döntőjére. Bizonyítsuk be, hogy volt néhány szomszédos nap, melyeken összesen 13 feladatot oldott meg, ha tudjuk, hogy legfeljebb 60 feladatot csinált meg összesen.

1. megoldás. Jelölje a_i $(i = 1, 2, \ldots, 37)$ az i. napon megoldott feladatok számát. Tudjuk, hogy $a_i \geqq 1$. Használjuk fel, hogy ha az a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ egész számokból képezzük az $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ számokat, akkor ezek valamelyike vagy a skatulya elv miatt valamely kettő különbsége osztható n-nel, hiszen n darab számunk van, ami megegyezik a lehetséges maradékok számával. 3 pont

Tekintsük az első 13 napon megoldott feladatok számából képzett összegeket!

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{13},$$

ekkor ezen összegek valamelyike vagy közülük valamely kettő különbsége osztható 13-mal. Ha valamely elem vagy a különbség éppen 13, akkor készen vagyunk, ha nem ennyi, akkor legalább 26. 2 pont

Tekintsük most az

$$a_{14}, \quad a_{14} + a_{15}, \quad \ldots, \quad a_{14} + a_{15} + \ldots + a_{26}$$

összegeket. Az előbbi állítást alkalmazva, erre ugyanúgy igaz, hogy ezen összegek valamelyike vagy közülük valamely kettő különbsége osztható 13-mal. Ha valamely elem vagy a különbség éppen 13, akkor készen vagyunk, ha nem ennyi, akkor legalább 26. 1 pont

Nézzük most a fennmaradó elemeket: a_{27}, a_{28}, $\ldots$, a_{37}. Mivel $a_1 + a_2 + \ldots + a_{37} \leqq 60$, és ha fennállnak az eddig elmondottak, akkor

$$a_{27} + a_{28} + \ldots + a_{37} \leqq 60 - 2 \cdot 26 = 8.$$

Ez viszont nem lehetséges, mivel Dia minden nap legalább egy feladatot megoldott. 3 pont

Így valamely korábbi elem vagy különbség éppen 13 kell, hogy legyen. Ezzel a feladat állítását igazoltuk. 1 pont

2. megoldás. Jelölje s_i $(i = 1, 2, \ldots, 37)$ az első i napon Dia által összesen megoldott feladatok számát. Ekkor a feltételek alapján

$$1 \leqq s_1 < s_2 < \ldots < s_{37} \leqq 60.$$ 2 pont

Az egyenlőtlenséglánchoz 13-at hozzáadva kapjuk, hogy

$$14 \leqq s_1 + 13 < s_2 + 13 < \ldots < s_{37} + 13 \leqq 73.$$ 2 pont

Mivel 1-től 73-ig 73 db pozitív egész szám van és az s_1, s_2, s_{37}, $s_1 + 13$, $s_2 + 13$, $\ldots$, $s_{37} + 13$ számok felsorolásakor az $[1; 73]$-ból 74 db pozitív egész számot írunk fel, ezért a skatulyaelv miatt a számok között kell lennie legalább 2 azonosnak. 3 pont

Vegyünk két egyenlő elemet az $\{s_1, s_2, \ldots, s_{37}, s_1 + 13, s_2 + 13, \ldots, s_{37} + 13\}$ halmazból. Ezekre nem állhat fönn az $s_i = s_j$ vagy $s_i + 13 = s_j + 13$ egyenlőség $i \neq j$ esetén, mivel az $s_i < s_j$, ha $i < j$ az s_i-k definíciója miatt. Azaz az (s_n) sorozat szigorúan monoton növekvő. 1 pont

Tehát $s_i = s_j + 13$ kell, hogy teljesüljön valamely $1 \leqq i \neq j \leqq 37$ esetén. Ismét csak az (s_n) sorozat szigorúan monoton növekedése miatt $j < i$ kell, legyen. 1 pont

Tekintsük tehát a $j < i$ esetén fennálló $s_i = s_j + 13$ esetet. Ekkor $s_i - s_j = 13$, ami éppen azt jelenti, hogy Dia a $(j + 1)$., $(j + 2)$., $\ldots$, i. egymást követő napokon összesen 13 feladatot oldott meg. Ezzel az állítást beláttuk. 1 pont

2. Hányféleképpen lehet úgy kiválasztani egy $n \times n$-es táblázat néhány mezőjét, hogy semelyik két sorban ne egyezzen meg a kiválasztott mezők száma és semelyik két oszlopban se egyezzen meg a kiválasztott mezők száma?

Megoldás. Tekintsünk egy megfelelő kiválasztást.

Egy sorból kiválasztott mezők száma $0, 1, 2, \ldots, n$ lehet, ami összesen $n+1$ lehetőség, vagyis pontosan egy olyan lesz közülük, amit nem kapunk meg, legyen ez i. Az oszlopoknál ugyanez teljesül, legyen j az az egyetlen 0 és n közé eső egész szám, amely egyik oszlopban sem adja meg az onnan kiválasztott mezők számát. A táblázatból összesen kiválasztott mezők száma egyrészt $1+2+\ldots+n-i$, másrészt $1+2+\ldots+n-j$, ezért $i=j$, vagyis ugyanaz az érték hiányzik a soroknál és az oszlopoknál. 2 pont

Ha van üres sor, akkor nem lehet teljes (n kiválasztott elemet tartalmazó) oszlop, így $i=j$ értéke csak 0 vagy n lehet. 1 pont

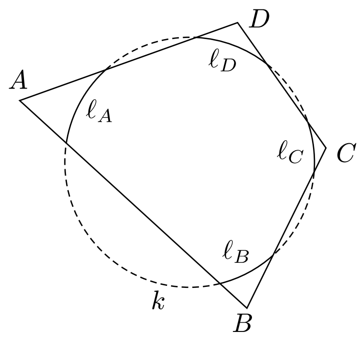
Az így kapott két esetben ugyanannyi megfelelő kiválasztás létezik, hiszen egy olyan kiválasztásnál, ahol a hiányzó érték $i=j=0$, a különböző sorokból (oszlopokból) *nem* kiválasztott mezők száma éppen $0, 1, \ldots, n-1$, vagyis a *nem* kiválasztott mezőkre szintén teljesül a feltétel, csak a hiányzó érték az n (és ugyanez megfordítva is igaz.) 1 pont

Vizsgáljuk mondjuk azt az esetet, amikor a kiválasztott mezők száma $1, 2, \ldots, n$ valamilyen sorrendben (a sorokban és az oszlopokban is).

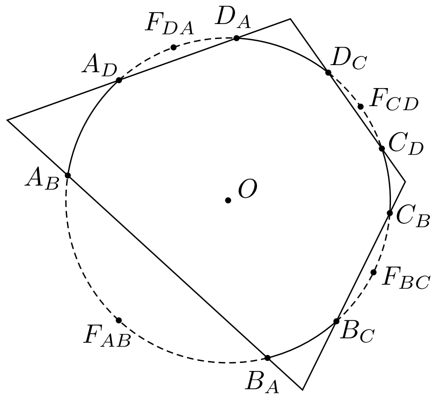
A sorok és az oszlop sorrendjét cserélgetve elérhető, hogy az i. sorban és az i. oszlopban legyen pontosan i kiválasztott mező minden $i=1,2,\ldots,n$ esetén. Megmutatjuk n-re vonatkozó teljes indukcióval, hogy ekkor pontosan egyféle jó kiválasztás létezik. Ez $n=1$-re nyilvánvaló, folytassuk az indukciós lépés igazolásával: tegyük fel, hogy $n=k-1$-ig már igazoltuk az állítást, most belátjuk $n=k$-ra is. A k-adik sorból és a k-adik oszlopból minden mezőt ki kell választanunk. Pontosan akkor kapunk megfelelő kiválasztást, ha az első $k-1$ sor és az első $k-1$ oszlop által meghatározott $(k-1)\times(k-1)$-es táblázat i-edik sorából és oszlopából is pontosan $i-1$ mezőt választunk ki. Az indukciós feltevés szerint ezt pontosan egyféleképpen lehet megtenni (használva korábbi észrevételünket, miszerint ugyanannyi jó kiválasztás van, ha a hiányzó érték a 0, mint ha k). Ezzel az indukciós lépést igazoltuk. 4 pont

Világos, hogy ebben az előbbi esetben ugyanannyi jó kiválasztás van, mint az összes többi sorrend esetében: a soroknál és az oszlopoknál is $n!$ féle sorrend lehetséges, így összesen $(n!)^2$ féle lehetőség van. Tehát a megfelelő kiválasztások száma $2(n!)^2$. 2 pont

3. Tegyük fel, hogy $ABCD$ húrnégyszög, és a k olyan kör, mely a húrnégyszög minden oldalát két pontban metszi. Tekintsük, az ábrán látható módon, az $ABCD$ belsejében létrejövő ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D íveket. Bizonyítsuk be, hogy az ℓ_A és ℓ_C ívek hosszának összege egyenlő az ℓ_B és ℓ_D ívek hosszának összegével.



Megoldás.



Bevezetünk néhány jelölést a megoldás során előforduló pontokra. Az $ABCD$ és k metszéspontjait jelölje A_B, B_A, B_C, C_B, C_D, D_C, D_A, A_D, ahol X_Y az XY oldalon X-hez közelebbi metszéspont. Jelölje továbbá F_{AB}, F_{BC}, F_{CD} és F_{DA} a k kör $ABCD$-n kívüli íveinek felezőpontját. Valamint legyen O a k kör középpontja.

Ezeket a jelöléseket foglaljuk össze az ábrán.

1 pont: ábra, jelölések

Legyen L_A az ℓ_A-t tartalmazó F_{DA}–F_{AB} ív, L_B az ℓ_B-t tartalmazó F_{AB}–F_{BC} ív, L_C az ℓ_C-t tartalmazó F_{BC}–F_{CD} ív, L_D pedig az ℓ_D-t tartalmazó F_{CD}–F_{DA} ív. Mivel az F_{AB}, F_{BC}, F_{CD} és F_{DA} pontok az $ABCD$-n kívüli ívek felezőpontjai, elegendő belátni, hogy az L_A és az L_C ívek hosszösszege egyenlő az L_B és L_D ívek hosszösszegével:

$$|L_A| + |L_C| = |\ell_A| + |\ell_C| + \frac{h}{2}, \quad \text{illetve} \quad |L_B| + |L_D| = |\ell_B| + |\ell_D| + \frac{h}{2},$$

ahol h az $ABCD$-n kívüli ívek hosszösszege.

2 pont: áttérés nagyobb ívekre

Továbbá, ha r a k kör sugara, akkor

$$\begin{aligned}
|L_A| &= \frac{2r\pi \cdot F_{DA}OF_{AB}\sphericalangle}{360^\circ},\\
|L_B| &= \frac{2r\pi \cdot F_{AB}OF_{BC}\sphericalangle}{360^\circ},\\
|L_C| &= \frac{2r\pi \cdot F_{BC}OF_{CD}\sphericalangle}{360^\circ},\\
|L_D| &= \frac{2r\pi \cdot F_{CD}OF_{DA}\sphericalangle}{360^\circ},
\end{aligned}$$

így elegendő a szögekre vonatkozó

$$(*) \qquad F_{DA}OF_{AB}\sphericalangle + F_{BC}OF_{CD}\sphericalangle = F_{AB}OF_{BC}\sphericalangle + F_{CD}OF_{DA}\sphericalangle$$

egyenlőséget belátni. Az $ABCD$ húrnégyszög A-nál, B-nél, C-nél és D-nél levő szögeit rendre α-val, β-val, γ-val és δ-val jelölve állítjuk, hogy

$$F_{DA}OF_{AB}\sphericalangle = 180^\circ - \alpha, \tag{1}$$

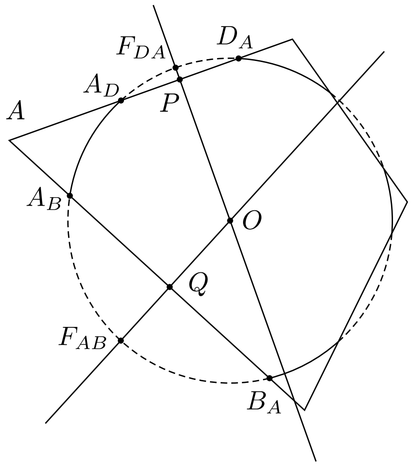
$$F_{AB}OF_{BC}\sphericalangle = 180^\circ - \beta, \tag{2}$$

$$F_{BC}OF_{CD}\sphericalangle = 180^\circ - \gamma, \tag{3}$$

$$F_{CD}OF_{DA}\sphericalangle = 180^\circ - \delta. \tag{4}$$

Ekkor a szögekre vonatkozó $(*)$ egyenlőség következni fog abból a húrnégyszögekre vonatkozó ismert tételből, mely szerint $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$.

3 pont: áttérés szögekre



A feladatban kitűzött állítás bizonyításához tehát most már csak az (1)–(4), egyenlőségeket kell igazolnunk, ehhez nyilván elég (1)-et megmutatni, (2)–(4) ugyanúgy következnek. Az OF_{DA} egyenes messe DA-t a P pontban, az OF_{AB} pedig messe AB-t a Q pontban.

Egyelőre tegyük fel, hogy O az $ABCD$ belsejében fekszik.

Mivel OF_{DA} a D_AA_D szakasz szakaszfelező merőlegese, OF_{AB} pedig az A_BB_A szakasz szakaszfelező merőlegese, az $OPAQ$ négyszögben a P és Q csúcsoknál derékszög van. Ekkor

$$F_{DA}OF_{AB}\sphericalangle = POQ\sphericalangle = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha,$$

ezzel (1) bizonyítása kész.

Fontos kiegészítés, hogy az O pont nem szükségszerűen fekszik az $ABCD$ négyszög belsejében. Az általános esetet irányított szögekkel számolva intézhetjük el: az AB irányított egyenes 90°-os elforgatottja az $F_{AB}O$ irányított egyenes, míg az AD irányított egyenes 90°-os elforgatottja az OF_{DA} irányított egyenes. Így az $F_{AB}OF_{DA}$ szög kiegészítő szöge éppen α, amiből (1) nyilván következik.

Ezzel a bizonyítás készen van.

(4 pont: ha a megoldás általában is működik; 2 pont: ha a megoldás csak $ABCD$-beli O-ra működik.)

Haladók – I. kategória, első (iskolai) forduló

Feladatok

1. A karácsonyi vásárra a 9.c-sek diós és mákos kifliket készítettek. Mindből kicsit és nagyot is. A karácsonyi vásár végén megmaradt kiflik számairól a következő megállapításokat tették:

$a)$ Összesen 57 darab kifli maradt meg.
$b)$ A mákos kiflik száma osztható 11-gyel.
$c)$ A nagy mákos kiflik száma egyenlő a diós kiflik számával.
$d)$ A legkevesebb a kis diós kifliből van.
$e)$ Minden kifli száma prím.

Határozzuk meg, hogy melyik kifli típusból hány darab maradt meg!

2. Az ABC háromszög csúcsait a köré írt kör O középpontjára tükrözve kapjuk az A', B', C' pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az $AC'BA'CB'$ hatszög oldalainak négyzetösszege egyenlő a középpontnak a háromszög oldalaitól mért távolságai négyzetösszegének nyolcszorosával.

3. Határozzuk meg a következő függvény szélsőértékét a $[-2017; 2016]$ intervallumon:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 24}{3x^2 + 8}.$$

4. Adott az $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = k$ egyenlet, ahol k rögzített valós szám. Mutassuk meg, hogy az egyenletnek minden valós k-ra van megoldása, és az egyik megoldás mindig 1 és 2 közé esik!

5. $a)$ Seholsincs országban 5 város van. Az országban háromféle közlekedési eszközzel lehet utazni, busszal, vonattal és repülővel. Bármely két város között pontosan egy közlekedési eszköz használható közvetlenül. Igaz-e, hogy mindenképp kiválasztható két város és egy közlekedési eszköz úgy, hogy az egyik városból a másik nem elérhető, még átszállásokkal sem, ha csak a kiválasztott eszközt használjuk?

$b)$ Mi volna a helyzet 6 város esetén?

Megoldások és javítási útmutató

1. A karácsonyi vásárra a 9.c-sek diós és mákos kifliket készítettek. Mindből kicsit és nagyot is. A karácsonyi vásár végén megmaradt kiflik számairól a következő megállapításokat tették:

$a)$ Összesen 57 darab kifli maradt meg.

$b)$ A mákos kiflik száma osztható 11-gyel.

$c)$ A nagy mákos kiflik száma egyenlő a diós kiflik számával.

$d)$ A legkevesebb a kis diós kifliből van.

$e)$ Minden kifli száma prím.

Határozzuk meg, hogy melyik kifli típusból hány darab maradt meg!

Megoldás. Jelöljük a kis diós kifliket d-vel, a nagy diós kifliket D-vel, a kis mákos kifliket m-mel, és a nagy mákos kifliket M-mel.

Az $a)$ állítás szerint $d + D + m + M = 57$.

Mivel 57 páratlan, így van páros számú kifli. 1 pont

Mivel az $e)$ állítás szerint minden kifli száma prímszám, és csak egyetlen páros prím van, és a $d)$ állítás szerint a kis diós kifliből van a legkevesebb, így $d = 2$. 1 pont

Ezért $D + m + M = 55$. A $b)$ állítás szerint $m + M$ osztható 11-gyel. Mivel 55 is osztható 11-gyel, így D is osztható 11-gyel. 1 pont

De mivel D is prím, így $D = 11$. 1 pont

A $c)$ állítás miatt $M = d + D = 2 + 11 = 13$. 1 pont

Mivel $D = 11$, így $m + M = 44$. Mivel $M = 13$, így $m = 31$. 1 pont

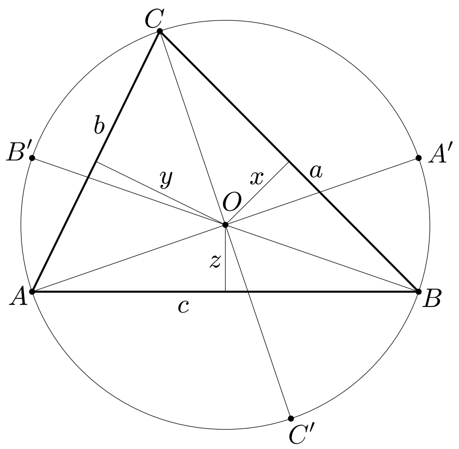
Tehát kis diós kifliből 2, nagy diós kifliből 11, kis mákos kifliből 31, nagy mákos kifliből 13 darab van. Ezek valóban kielégítik az állítás feltételeit. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a tanuló indoklás nélkül közli a kiflik számát, akkor arra legfeljebb 3 pont adható.

2. Az ABC háromszög csúcsait a köré írt kör O középpontjára tükrözve kapjuk az A', B', C' pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az $AC'BA'CB'$ hatszög oldalainak négyzetösszege egyenlő a középpontnak a háromszög oldalaitól mért távolságai négyzetösszegének nyolcszorosával.

Megoldás.



Használjuk az ábra jelöléseit és legyen r a háromszög köré írt kör sugara!

CAC', $C'BC$, ABA', $A'CA$, BCB', $B'AB$ szögek Thalész tétele értelmében derékszögek. 1 pont

A tükrözés miatt $AB' = A'B$, $AC' = A'C$ és $BC' = B'C$. 1 pont

A megfelelő derékszögű háromszögekben felírjuk Pitagorasz tételét:

$$(AC')^2 = (A'C)^2 = 4r^2 - b^2;$$
$$(BC')^2 = (B'C)^2 = 4r^2 - a^2;$$
$$(AB')^2 = (A'B)^2 = 4r^2 - c^2.$$
2 pont

Így a hatszög oldalainak négyzetösszege: $24r^2 - 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$. 1 pont

Szintén Pitagorasz tétele alapján:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} + r^2 - \frac{b^2}{4} + r^2 - \frac{c^2}{4}.$$
1 pont

Ekkor: $8\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 24r^2 - 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$. 1 pont

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Összesen: 7 pont

3. Határozzuk meg a következő függvény szélsőértékét a $[-2017; 2016]$ intervallumon:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 24}{3x^2 + 8}.$$

Megoldás.

$$f(x) = \frac{6x^2 - 24}{3x^2 + 8} = \frac{2(3x^2 + 8)}{3x^2 + 8} - \frac{40}{3x^2 + 8} = 2 - \frac{40}{3x^2 + 8}.$$ 2 pont

Vizsgálandó a $3x^2 + 8$ kifejezés, melynek minimuma van, így a törtnek maximuma lesz, 1 pont
s a különbségnek, f-nek minimuma lesz. 1 pont

A $3x^2 + 8$ a minimumát az $x = 0$-ban veszi fel. 1 pont

A megadott zárt intervallumon a függvény a $[-2017; 0]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, illetve a $[0; 2016]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, 1 pont
így a megadott intervallumon a függvénynek a két végpontban lokális maximuma van.

Az abszolút maximumát $x = -2017$-ben veszi fel. Ennek értéke $\dfrac{6 \cdot 2017^2 - 24}{3 \cdot 2017^2 + 8}$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

4. Adott az $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = k$ egyenlet, ahol k rögzített valós szám. Mutassuk meg, hogy az egyenletnek minden valós k-ra van megoldása, és az egyik megoldás mindig 1 és 2 közé esik!

Megoldás. Az egyenlete alaphalmaza: $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ $(x \neq 1; 2)$. 1 pont

Ha $k = 0$, akkor az egyenlet az $x - 1 = -(x - 2)$ elsőfokú egyenletre vezet, ennek megoldása $x = \dfrac{3}{2}$, megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

Ha $k \neq 0$, akkor az $\mathbb{R}\setminus\{1; 2\}$ halmazon az eredeti egyenlet ekvivalens a

$$kx^2 - x(3k + 2) + 2k + 3 = 0$$

másodfokú egyenlettel. 1 pont

Ennek diszkriminánsa $k^2 + 4$ minden valós k esetén nagyobb 0-nál, így az egyenletnek mindig van megoldása. 1 pont

A másodfokú kifejezés értéke $x = 1$ esetén minden k-ra $+1$, $x = 2$ esetén -1, így az alaphalmazon kívüli 1 és 2 soha nem gyöke az egyenletnek. 1 pont

A másodfokú függvény folytonossága miatt viszont $+1$ és -1 között fel kell vennie a függvénynek a 0-t is. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek biztosan van gyöke az $]1; 2[$-ben. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

5. $a)$ Seholsincs országban 5 város van. Az országban háromféle közlekedési eszközzel lehet utazni, busszal, vonattal és repülővel. Bármely két város között pontosan egy közlekedési eszköz használható közvetlenül. Igaz-e, hogy mindenképp kiválasztható két város és egy közlekedési eszköz úgy, hogy az egyik városból a másik nem elérhető, még átszállásokkal sem, ha csak a kiválasztott eszközt használjuk?

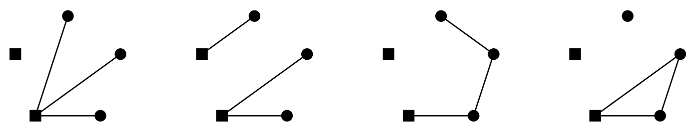
$b)$ Mi volna a helyzet 6 város esetén?

Megoldás. $a)$ Igen, mindig kiválasztható két város és egy közlekedési eszköz a kívánt módon.

Összesen $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ közlekedési útvonal van. 1 pont

Ha minden közlekedési eszközt legalább négy útvonalon használnánk, akkor az útvonalak száma legalább $3 \cdot 4 = 12$ lenne. Ez több, mint 10, tehát van olyan eszköz, amit legfeljebb 3 útvonalon használhatunk. 1 pont

Megmutatjuk, hogy még 3 útvonal esetén is van két város, amik között ezen eszközzel nem lehet utazni. A 3 út csak 4 lényegesen különböző módon helyezkedhet el és könnyen látszik, hogy egyik sem megfelelő. Például a négyzettel jelölt városok között nincs lehetőség utazásra.

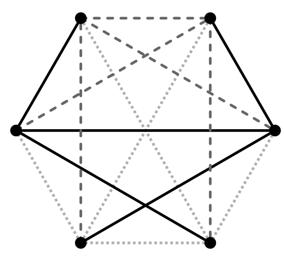


2 pont

Egy másik mód ezen rész megmutatására: Gondoljunk arra, hogy egyesével felépítjük a három útvonalat. Kezdetben öt csoportban vannak a városok úgy, hogy egyikből sem lehet elérni a többit. Ha két csoport közé építünk egy utat, akkor azok összeolvadnak, és a csoporton belül elérhetővé válnak a városok. Mivel csak három utat építünk föl, a végén még mindig van legalább két csoport. Mivel a két csoport között nem vezet út, nem lehet eljutni az egyikből a másikba.

$b)$ 6 város esetén lehetséges, hogy nincs megfelelő választás. 1 pont

A következő ábrán mutatunk egyet a lehetséges ellenpéldák közül. A három szín a három közlekedési eszközt mutatja.



Helyes ellenpélda mutatása. 2 pont

Összesen: 7 pont

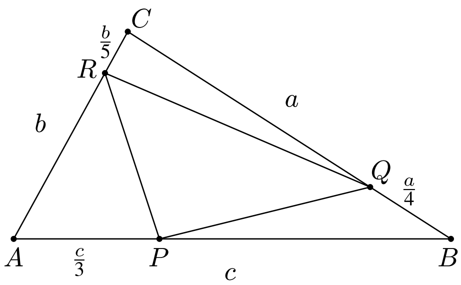
Haladók I. kategória, 2. forduló

Feladatok

1. Melyek azok az $(a;b)$ egész számpárok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$a^2+7b^2 \leqq 4ab+6b?$$

2. Adott az ABC háromszög. Legyen P az AB oldal harmadoló pontja, Q a BC oldal negyedelő pontja, valamint R a CA oldal ötödölő pontja az ábrán látható módon. Határozzuk meg a PQR és az ABC háromszögek területének arányát.



3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}\,.$$

4. Adott egy 8×8-as táblázat. Nevezzük főátlónak az a_1-h_8 átlót. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egészeket írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor-, illetve oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy az $1,2,3,\dots,16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

$b)$ Ha egy 7×7-es táblánk van, akkor lehetséges-e, hogy az $1,2,3,\dots,14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

8								
7								0
6							0	0
5						0	0	0
4					0	0	0	0
3				0	0	0	0	0
2			0	0	0	0	0	0
1		0	0	0	0	0	0	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyek azok az $(a;b)$ egész számpárok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$a^2 + 7b^2 \leqq 4ab + 6b?$$

Megoldás. Rendezzünk nullára, és alakítsunk teljes négyzetté:

$$(a-2b)^2 + 3b^2 - 6b \leqq 0.$$ 1 pont

Adjunk hozzá hármat és alakítsunk teljes négyzetté:

$$(a-2b)^2 + 3(b-1)^2 \leqq 3.$$ 1 pont

Mivel $(a-2b)^2$, és $(b-1)^2$ négyzetszámok, ezért $(b-1)^2 \in \{0,1\}$. 1 pont

1. Ha $b-1=-1$, $b=0$, akkor $a-2b=0$, azaz $a=0$. 1 pont

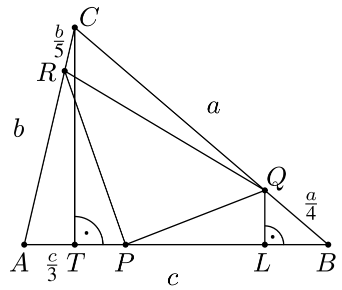
2. Ha $b-1=0$, $b=1$, akkor $a-2b=-1$ vagy $a-2b=0$ vagy $a-2b=1$ lehetséges, ekkor a-ra az alábbi értékeket kapjuk: $a=1$, $a=2$, $a=3$. 1 pont

3. Ha $b-1=1$, $b=2$, akkor $a-2b=0$, azaz $a=4$. 1 pont

Tehát a megoldások: $(0;0)$; $(1;1)$; $(2;1)$; $(3;1)$; $(4;2)$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Adott az ABC háromszög. Legyen P az AB oldal harmadoló pontja, Q a BC oldal negyedelő pontja, valamint R a CA oldal ötödölő pontja az ábrán látható módon. Határozzuk meg a PQR és az ABC háromszögek területének arányát.



Megoldás. A keresett területet (T_{PQR}) az eredeti háromszög területéből a PBQ, QCR és az RAP háromszögek területének kivonásával kaphatjuk meg. 1 pont

A PBC háromszög területe az eredeti ABC háromszög területének a $2/3$-a, mivel azonos magasságúak és az alapok aránya $2/3 : 1$. 1 pont

QLB és CTB háromszögek hasonlóak, mert oldalaik párhuzamosak, a hasonlóság aránya $1:4$. 1 pont

A PBQ háromszög területe a PBC háromszög területének a negyede, mivel alapjaik azonosak, s magasságuk aránya 1 : 4. 1 pont

Így a PBQ háromszög területe: $T_{PBQ} = T_{ABC} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$. 1 pont

(Vagy egyszerűbben: $T_{PBQ} = \frac{\frac{2c}{3} \cdot \frac{m_c}{4}}{2} = \frac{1}{6} \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{1}{6} T_{ABC}$.)

A további háromszögek területe hasonlóan adódik.

$$T_{QCR} = T_{ABC} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}, \quad T_{RAP} = T_{ABC} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}.$$ 1 pont

A keresett terület: $T_{PQR} = T_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) = T_{ABC} \cdot \frac{5}{12}$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}.$$

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a $\sqrt{x + \sqrt{x}}$ kifejezéssel:

$$\left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^2 - \sqrt{x - \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}.$$ 1 pont

Nevezetes azonosság alkalmazása után:

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2} \sqrt{x}.$$ 1 pont

A kapott egyenletet elosztjuk $\sqrt{x}$-szel ($x = 0$ nem lehetséges a tört nevezője miatt):

$$\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x - 1} = \frac{3}{2}.$$ 1 pont

Az átrendezés után kapott egyenlet $\left(\text{pl. } \sqrt{x} = \frac{1}{2} + \sqrt{x - 1}\right)$ mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$x = \frac{1}{4} + \sqrt{x - 1} + x - 1.$$ 1 pont

Újabb rendezés $\left(\frac{3}{4} = \sqrt{x - 1}\right)$ és négyzetre emelés után: $\frac{9}{16} = x - 1$. 1 pont

Ebből: $x = \frac{25}{16}$. 1 pont

A kapott megoldás eleget tesz a feladat feltételeinek. 1 pont

(Ha ellenőrzés helyett értelmezési tartomány és értékkészlet vizsgálatot végez, az utóbbi 1 pont akkor is adható.)

Összesen: 7 pont

4. Adott egy 8×8-as táblázat. Nevezzük főátlónak az $a_1 - h_8$ átlót. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egészeket írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor-, illetve oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy az $1, 2, 3, \ldots, 16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

b) Ha egy 7×7-es táblánk van, akkor lehetséges-e, hogy az $1, 2, 3, \ldots, 14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

8								
7								0
6							0	0
5						0	0	0
4					0	0	0	0
3				0	0	0	0	0
2			0	0	0	0	0	0
1		0	0	0	0	0	0	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

Megoldás.

15	2	2	2	2	2	2	2	1
14	2	2	2	2	2	2	2	0
11	2	2	2	2	2	1	0	0
10	2	2	2	2	2	0	0	0
7	2	2	2	1	0	0	0	0
6	2	2	2	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0	0
	16	**13**	**12**	**9**	**8**	**5**	**4**	**1**

Elérhető a kívánt kitöltés. Írjunk minden mezőbe 2-est. Majd a főátlóban álló kettesek közül minden másodikat cseréljünk le egyesekre. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez egy megfelelő kitöltés. 3 pont

Megjegyzés: Bármilyen helyes kitöltés megadása 3 pontot ér.

b) A kívánt kitöltés nem valósítható meg. Indirekten fogunk bizonyítani, tegyük fel, hogy a kívánt kitöltés megvalósítható. 1 pont

Adjuk össze a 7 sorösszeget, illetve a 7 oszlopösszeget, legyen ez az összeg S. S-et úgy is megkaphattuk volna, ha a négyzetben szereplő minden számot pontosan kétszer adjuk össze. 1 pont

Tehát S egy páros szám. 1 pont

Az indirekt feltevésünk szerint az oszlop- és sorösszegek valamilyen sorrendben az $1, 2, \ldots,$ 14 számok. Azaz $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 14 = 105$. Ez ellentmond S párosságának, így ellentmondásra jutottunk. Tehát az eredeti állításunkat beláttuk. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az $ABCD$ konvex négyszöget az AC átlója két egyenlő területű háromszögre osztja. Az AC átlón felvett M (belső) ponton át az AB oldallal párhuzamosan húzott egyenes a BC oldalt a P pontban, az M ponton átmenő és a CD-vel párhuzamos egyenes az AD oldalt a Q pontban metszi. Hogyan kell az M pontot megválasztani, hogy az MPC és az MQA háromszögek területeinek összege minimális legyen?

2. Felírtuk egy táblára a számokat 1-től 10-ig. Egy lépésben kiválasztunk kettőt, és elosztjuk őket egymással úgy, hogy a hányados legalább 1 legyen. A két kiválasztott számot letöröljük, és felírjuk helyette a hányados egészrészét. Legfeljebb mekkora lehet az utolsónak maradt szám?

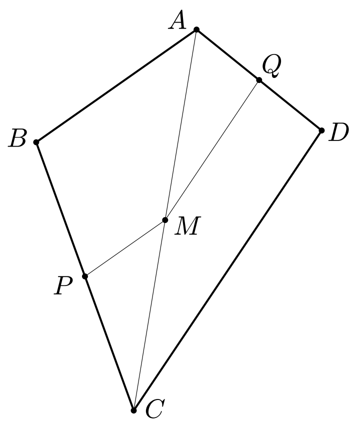
3. Egy n pozitív egész szám esetén jelölje $f(n)$ azt a legkisebb pozitív egész k számot, amelyre igaz, hogy $k!$ osztható n-nel. Igazoljuk, hogy végtelen sok n esetén teljesül, hogy

$$\frac{f(n)}{f(n+1)} > 1{,}99!$$

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ konvex négyszöget az AC átlója két egyenlő területű háromszögre osztja. Az AC átlón felvett M (belső) ponton át az AB oldallal párhuzamosan húzott egyenes a BC oldalt a P pontban, az M ponton átmenő és a CD-vel párhuzamos egyenes az AD oldalt a Q pontban metszi. Hogyan kell az M pontot megválasztani, hogy az MPC és az MQA háromszögek területeinek összege minimális legyen?

Megoldás.



$ABC\triangle \sim MPC\triangle$ és $ACD\triangle \sim AMQ\triangle$, mert két-két szögük páronként egyenlő. A hasonlóság miatt a megfelelő oldalak aránya egyenlő. 1 pont

Legyen $MC = \lambda \cdot AC$. Ekkor a hasonlóság miatt $MP = \lambda \cdot AB$ és $MQ = (1-\lambda) \cdot CD$. 1 pont

Jelöljük az ABC és a CDA háromszögek területét t-vel ($t_{ABC} = t_{CDA}$).

$$(3) \qquad \frac{t_{MPC}}{t} = \left(\frac{MP}{AB}\right)^2 = \lambda^2 \quad (0 < \lambda < 1) \quad \text{és}$$

$$(4) \qquad \frac{t_{MQA}}{t} = \left(\frac{MQ}{CD}\right)^2 = (1-\lambda)^2.$$ 1 pont

(3)-at és (4)-et rendezve, összeadva
$$t_{MPC} + t_{MQA} = t\big(\lambda^2 + (1-\lambda)^2\big). \qquad \text{1 pont}$$
Teljes négyzetté kiegészítést végzünk
$$t_{MPC} + t_{MQA} = t\left(2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right). \qquad \text{1 pont}$$
Mivel $2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$, ezért $t_{MPC} + t_{MQA} \geqq \frac{t}{2}$.

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\lambda = \frac{1}{2}$, azaz $\frac{MP}{AB} = \frac{1}{2}$. 1 pont

Ekkor az M pont az AC átló felezőpontja, a keresett minimum értéke $\frac{t}{2}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Felírtuk egy táblára a számokat 1-től 10-ig. Egy lépésben kiválasztunk kettőt, és elosztjuk őket egymással úgy, hogy a hányados legalább 1 legyen. A két kiválasztott számot letöröljük, és felírjuk helyette a hányados egészrészét. Legfeljebb mekkora lehet az utolsónak maradt szám?

Megoldás. Mivel a hányados legalább 1, ezért mindig a nagyobb számot osztjuk el a nem kisebbel. 2 pont

Másrészt mindig legalább eggyel osztunk, ezért mindig legfeljebb a két szám maximumát írhatjuk fel a táblára. Tehát az elérhető maximum legfeljebb 10. 2 pont

Ez el is érhető. Töröljük le először a 2–3, 4–5, 6–7, 8–9 párokat. Ekkor lesz néhány egyesünk és egy tizesünk. Ekkor az egyeseket párosítva a 10-essel, mindig 10 marad. Tehát elérhető, hogy 10 maradjon a táblán. 3 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Bármilyen olyan törlési sorrend megadása 3 pontot ér, amely végén 10 marad a táblán.

3. Egy n pozitív egész szám esetén jelölje $f(n)$ azt a legkisebb pozitív egész k számot, amelyre igaz, hogy $k!$ osztható n-nel. Igazoljuk, hogy végtelen sok n esetén teljesül, hogy
$$\frac{f(n)}{f(n+1)} > 1{,}99!$$

Megoldás. Legyen $n = p$, ahol $p > 3$ prím. Mivel p felbonthatatlan, ezért p-nek szerepelnie kell a tényezők között, azaz $f(p) = p$. 2 pont

Térjünk át $f(p+1)$-re: Mivel $p+1$ tényezői között szerepel a 2 és a $\dfrac{p+1}{2}$ és ezek különbözőek, így $\left(\dfrac{p+1}{2}\right)!$ osztható $p+1$-gyel, tehát $f(p+1) \leqq \dfrac{p+1}{2}$. 2 pont

$$\frac{f(p)}{f(p+1)} \geqq \frac{p}{\frac{p+1}{2}} > 1{,}99,$$ 1 pont

$$0{,}01p > 1{,}99,$$

$$p > 199.$$ 1 pont

Azaz az egyenlőtlenség minden 199-nél nagyobb prímre teljesül, azaz végtelen sokszor. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók – II. kategória, első (iskolai) forduló

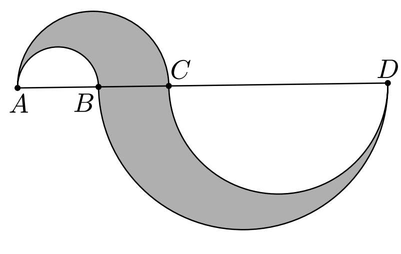
Feladatok

1. A k valós paraméter értékétől függően hány valós megoldása van a következő egyenletnek?

$$\Big|\big||x|-1\big|-2\big|-3\Big| = x-k.$$

2. Határozzuk meg az összes olyan négyjegyű négyzetszámot, amelynek számjegyeit eggyel megnövelve a kapott négyjegyű szám szintén négyzetszám lesz!

3. Az AB, AC, BD és CD szakaszok, mint átmérők felé félköríveket rajzoltunk az *ábrán* látható módon. Fejezzük ki a színezett rész területét a és b segítségével, ha $AD = a$ és $BC = b$!



4. El lehet-e helyezni egy asztalon egy síkban (a pénzérmék egymásra helyezése nélkül)

$a)$ 2016
$b)$ 2017

egyforma, kör alakú pénzérmét úgy, hogy mindegyik pénzérme három másik pénzérmét érintsen? Ha el lehet helyezni, akkor egy lehetséges elhelyezést kérünk indoklással; ha nem lehet, akkor indoklást, hogy miért nem!

5. Tekintsük a következő 99 darab egyenletből álló 99 változós egyenletrendszert!

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1, \\ a_2 + a_3 = 2, \\ a_3 + a_4 = 3, \\ \quad\vdots \quad \vdots \\ a_{98} + a_{99} = 98, \\ a_{99} + a_1 = 99. \end{cases}$$

Mennyi a következő összeg pontos értéke?

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \ldots + a_{97} - a_{98} + a_{99}.$$

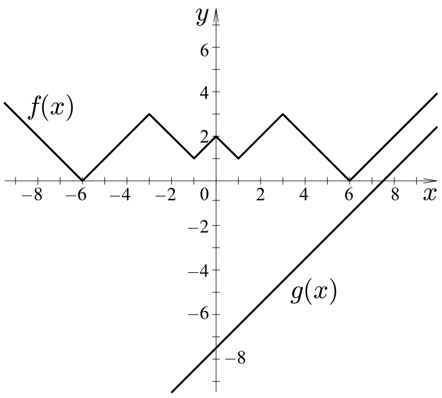
Megoldások és javítási útmutató

1. A k valós paraméter értékétől függően hány valós megoldása van a következő egyenletnek?

$$\Big|\big||x| - 1\big| - 2\big| - 3\Big| = x - k.$$

Megoldás. Grafikus megoldás:

A baloldali függvény ábrázolása: $f(x) = \Big|\big||x| - 1\big| - 2\big| - 3\Big|$. 2 pont



A jobboldali függvényt, $g(x) = x - k$, az előző ábrára illesztve és önmagával párhuzamosan eltolva, a két grafikon metszéspontjainak száma adja az egyenlet megoldásainak számát. 1 pont

Ha $k = -6$ vagy $k = -2$ vagy $k = 0$ vagy $k = 6$, akkor a $g(x) = x - k$ egyenese illeszkedik az $f(x)$ függvény egy-egy szakaszára, ezért ezeknél a k értékeknél az egyenletnek végtelen sok megoldása van. 1 pont

Ha $k \in]-\infty; -6[$ vagy $k \in]-6; -2[$ vagy $k \in$ $\in]-2; 0[$ vagy $k \in]0; 6[$, 1 pont

akkor az egyenletnek pontosan egy megoldása van. 1 pont

Ha $k \in]6; \infty[$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozzuk meg az összes olyan négyjegyű négyzetszámot, amelynek számjegyeit eggyel megnövelve a kapott négyjegyű szám szintén négyzetszám lesz!

Megoldás. Ebben az esetben a két szám különbsége 1111, tehát az $x^2 - y^2 = 1111$ egyenletet kell megoldanunk, ahol x és y pozitív egész számok. 2 pont

Ezt átalakítva:

$$(x - y) \cdot (x + y) = 1111. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel a prímtényezős felbontás: $1111 = 11 \cdot 101$, ezért az 1111-nek négy pozitív osztója van, 1, 11, 101, 1111. Így a lehetőségek: 1 pont

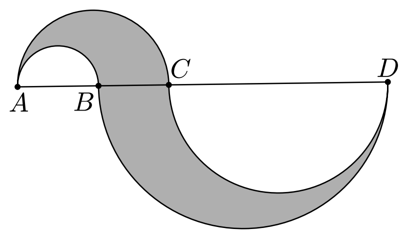
$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = 1111 \end{array}\right\}$ ebből $x = 556$, $y = 555$. Ez nem megoldás. 1 pont

$\left.\begin{array}{l} x - y = 11 \\ x + y = 101 \end{array}\right\}$ ebből $x = 56$, $y = 45$. Ez jó megoldás. 1 pont

Tehát a keresett négyjegyű szám a 2025. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az AB, AC, BD és CD szakaszok, mint átmérők felé félköríveket rajzoltunk az *ábrán* látható módon. Fejezzük ki a színezett rész területét a és b segítségével, ha $AD = a$ és $BC = b$!



Megoldás. Jelölje r_{BD} a BD, r_{CD} a CD, r_{AC} az AC, e_{AB} az AB átmérőkhöz tartozó sugarat.

Ekkor a keresett terület:

$$T = \frac{r_{BD}^2\pi}{2} - \frac{r_{CD}^2\pi}{2} + \frac{r_{AC}^2\pi}{2} - \frac{r_{AB}^2\pi}{2}. \qquad \text{2 pont}$$

Alakítsuk át a területet, mivel a sugár az átmérő fele, és a közös π-t és a nevezőben lévő 2-t kiemelhetjük:

$$T = \frac{\pi}{8}\left(BD^2 - CD^2 + AC^2 - AB^2\right). \qquad \text{1 pont}$$

Legyen $AB = x$. Ekkor

$$T = \frac{\pi}{8}\left((a - x)^2 - (a - b - x)^2 + (x + b)^2 - x^2\right). \qquad \text{1 pont}$$

Végezzük el a négyzetre emeléseket, és vonjunk össze; vagy az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot felhasználva hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$T = \frac{\pi}{8}\Big(\big(a-x-(a-b-x)\big)\big(a-x+(a-b-x)\big)+(x+b-x)(x+b+x)\Big),$$

$$T = \frac{\pi}{8}\big(b(2a-2x-b)+b(2x+b)\big),$$

$$T = \frac{\pi}{8}(2ab),$$ 2 pont

azaz a keresett terület $T = \dfrac{ab\pi}{4}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. El lehet-e helyezni egy asztalon egy síkban (a pénzérmék egymásra helyezése nélkül)

$a)$ 2016

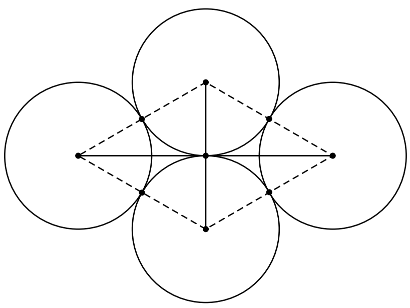
$b)$ 2017

egyforma, kör alakú pénzérmét úgy, hogy mindegyik pénzérme három másik pénzérmét érintsen? Ha el lehet helyezni, akkor egy lehetséges elhelyezést kérünk indoklással; ha nem lehet, akkor indoklást, hogy miért nem!

Megoldás. Először vizsgáljuk a $b)$ kérdést. Ha 2017 darab pénzérme mindegyike három másik érmét érint, akkor a $2017 \cdot 3 = 6051$ szorzat eredménye páratlan. Ez azonban lehetetlen, mivel itt minden érintési pontot kétszer számoltunk meg. 1 pont

Minden érintési pontot kétszer számolunk meg, így nem lehet páratlan az összeg. 1 pont

Tehát 2017 darab pénzérmét nem lehet elhelyezni egy síkban. 1 pont



$a)$ A $2016 \cdot 3 = 6048$ érintési pont esetén a szorzat páros, így most nem áll fent az előző eset. Ekkor valóban elhelyezhetőek a pénzérmék, például az alábbi módon. Képezzünk négy pénzérméből az ábra szerinti alakzatot. Ekkor a belső érmék 3-3 másik pénzérmét érintenek. 2 pont

Majd mivel $2016 : 4 = 504$, ezért 504 darab ilyen négyest helyezzünk el körben, mintha a két szélső körlap középpontjait összekötő szakasz egy 504 szög egy oldala lenne. 1 pont

Így az első és utolsó pénzérme is három másik pénzérmét fog érinteni. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Bármely más, de helyes konstrukció mutatása és a konstrukció helyességének magyarázata is 4 pont. Ha nincsen magyarázat a konstrukció mellett, akkor arra legfeljebb 2 pont adható.

5. Tekintsük a következő 99 darab egyenletből álló 99 változós egyenletrendszert!

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1, \\ a_2 + a_3 = 2, \\ a_3 + a_4 = 3, \\ \quad\vdots \quad \vdots \\ a_{98} + a_{99} = 98, \\ a_{99} + a_1 = 99. \end{cases}$$

Mennyi a következő összeg pontos értéke?

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \ldots + a_{97} - a_{98} + a_{99}.$$

Megoldás. Vonjuk ki rendre a párosadik sorszámú egyenletekből az előző egyenleteket!

A második egyenletből kivonva az elsőt adódik:

$$a_3 - a_1 = 1 \;\rightarrow\; a_3 = a_1 + 1.$$

A negyedik egyenletből kivonva a harmadikat adódik:

$$a_5 - a_3 = 1 \;\rightarrow\; a_5 = a_3 + 1 = a_1 + 2.$$

$$\vdots$$

A 98-adik egyenletből kivonva a 97-ediket:

$$a_{99} - a_{97} = 1 \;\rightarrow\; a_{99} = a_{97} + 1 = a_{95} + 2 = \ldots = a_3 + 48 = a_1 + 49.$$

Majd hasonlóan vonjuk ki rendre a páratlanadik sorszámú egyenletekből az előző egyenleteket!

A harmadik egyenletből kivonva a másodikat adódik:

$$a_4 - a_2 = 1 \;\rightarrow\; a_4 = a_2 + 1.$$

Az ötödik egyenletből kivonva a negyediket adódik:

$$a_6 - a_4 = 1 \;\rightarrow\; a_6 = a_4 + 1 = a_2 + 2.$$

$$\vdots$$

A 97-edik egyenletből kivonva a 96-odikat:

$$a_{98} - a_{96} = 1 \;\rightarrow\; a_{98} = a_{96} + 1 = a_{94} + 2 = \ldots = a_4 + 47 = a_2 + 48.$$

Végül a 99-edik egyenletből kivonva a 98-adikat:

$$a_1 - a_{98} = 1 \;\rightarrow\; a_1 = a_{98} + 1.$$

Innen adódik (az előző eredményeket összekapcsolva), hogy az a_i-k 99 egymást követő szám: 3 pont

$$a_{99} = a_{97} + 1 = a_{95} + 2 = \ldots = a_3 + 48 = a_1 + 49 = a_{98} + 50 = a_{96} + 51 =$$
$$= a_{94} + 52 = \ldots = a_4 + 97 = a_2 + 98.$$

Kiszámoljuk a_1, a_{99} pontos értékét. $a_{99} + a_1 = 99$, és $a_{99} = a_1 + 49 \;\rightarrow\; a_1 = 25$, $a_{99} = 74$.

Innen a többi a_i is adódik: -24-től 74-ig az egész számok. 2 pont

(Bármilyen módon a helyesen megoldott egyenletrendszer (akár megsejtve a megoldást, és leellenőrizve) 5 pontot érjen!)

A kérdéses összeg sokféleképpen megadható, például:

$$S = (a_{99} - a_{98}) + (a_{97} - a_{96}) + \ldots + (a_3 - a_2) + a_1 = 50 + 50 + \ldots + 50 + a_1 =$$
$$= 49 \cdot 50 + 25 = 50^2 - 25 = 2475.$$

(Itt azt használtuk ki, hogy az egy zárójelben lévő két szám között az egyenletrendszer megoldása alapján mindig 50 *a különbség.)* 2 pont.

Vagyis a kérdéses S összeg értéke: $S = 2475$.

Összesen: 7 pont

Haladók II. kategória, 2. forduló

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy az $x!(x+4)! = y^2$ egyenletnek nincs megoldása, ha x és y pozitív egész számok!

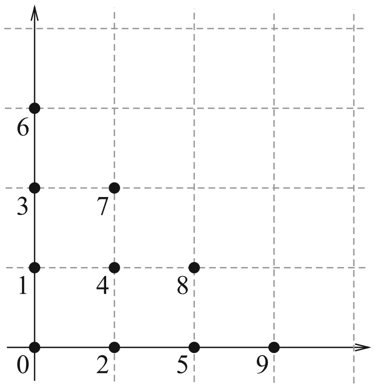
2. Egy kör AB átmérőjén úgy vesszük fel a C és D pontokat, hogy azok a kör középpontjától egyenlő távolságra legyenek. Bizonyítsuk be, hogy ha P a körvonal tetszőleges pontja, akkor a $CP^2 + DP^2$ állandó.

3. Legyen a, b és c egy háromszög három oldalának hossza. Bizonyítsuk be, hogy

$$3(ab + ac + bc) \leqq (a + b + c)^2 < 4(ab + ac + bc).$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

4. A derékszögű koordináta-rendszer I. negyedének rácspontjaiba az ábrán látható módon átlósan beírjuk az egymást követő természetes számokat. (A 0 az origóba kerül.)



$a)$ Milyen koordinátájú pontban van a 2017?

$b)$ Milyen szám szerepel a $P(54; 72)$ koordinátájú pontban?

Megoldások és javítási útmutató

1. Igazoljuk, hogy az $x!(x+4)! = y^2$ egyenletnek nincs megoldása, ha x és y pozitív egész számok!

Megoldás. Végezzük el az alábbi átalakítást:

$$(x!)^2(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = y^2.$$ 1 pont

Mivel a bal oldal első tényezője és a jobb oldal négyzetszám, ezért az

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

szorzatnak is négyzetszámnak kell lennie. 2 pont

Szorozzuk az első tényezőt a negyedikkel és a két középsőt egymással, ekkor a következőt kapjuk: $\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)$. 2 pont

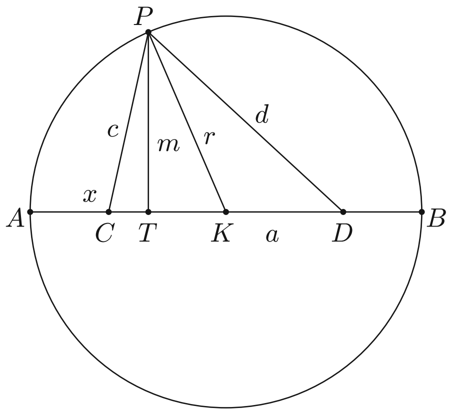
Jelöljük x^2+5x+4-et n-nel, ekkor a két tényező szorzata $n(n+2) = n^2+2n$. 1 pont

Ez nem lehet négyzetszám, hiszen két egymást követő négyzetszám: n^2 és $(n+1)^2$ közé esik $n > 0$ miatt. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy kör AB átmérőjén úgy vesszük fel a C és D pontokat, hogy azok a kör középpontjától egyenlő távolságra legyenek. Bizonyítsuk be, hogy ha P a körvonal tetszőleges pontja, akkor a $CP^2 + DP^2$ állandó.

Megoldás.



Használjuk az ábra jelöléseit, ahol T a P pont AB szakaszra eső merőleges vetülete és x jelöli az AT távolságot! Legyen továbbá $KC = KD = a$.

Szimmetria okokból elegendő, azt vizsgálnunk, ha a T pont az AK szakaszra esik. 1 pont

A KTP, CTP és DTP derékszögű háromszögekben felírjuk Pitagorasz tételét:

$$m^2 + (r-x)^2 = r^2, \tag{1}$$
$$m^2 + \big(a-(r-x)\big)^2 = c^2, \tag{2}$$
$$m^2 + \big(a+(r-x)\big)^2 = d^2. \tag{3}$$

1 pont

Az egyenleteket átalakítva:

$$m^2 + x^2 - 2rx = 0, \tag{1}$$
$$m^2 + x^2 - 2rx = c^2 - a^2 - r^2 + 2ar - 2ax, \tag{2}$$
$$m^2 + x^2 - 2rx = d^2 - a^2 - r^2 - 2ar + 2ax. \tag{3}$$

1 pont

Így az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$c^2 - a^2 - r^2 + 2ar - 2ax = 0, \tag{2}$$
$$d^2 - a^2 - r^2 - 2ar + 2ax = 0. \tag{3}$$

1 pont

Az egyenleteket összeadva:

$$c^2 + d^2 - 2a^2 - 2r^2 = 0,$$
$$c^2 + d^2 = 2a^2 + 2r^2.$$

A kívánt állításhoz jutunk. 2 pont

Amennyiben a T pont a CK szakaszon kívülre esik, akkor (2) a következő alakra módosul:

$$m^2 + \big((r-x)-a\big)^2 = c^2.$$

Mivel ez ekvivalens az eredetivel, ezért ugyanazt az eredményt kapjuk. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Amennyiben a versenyző felhasználja az alábbi tétel: Bármely háromszögben igaz az a oldalhoz tartozó súlyvonalra az alábbi összefüggés $b^2 + c^2 = 2s_a^2 + \frac{a^2}{2}$*, de a tételt nem bizonyítja, legfeljebb 2 pontot kaphat. (A tétel sem a központi tantervekben, sem a függvénytáblázatban nem szerepel.) Amennyiben bizonyítja is a tételt, a maradék 5 pont az útmutató pontszámainak megfelelően bontható.*

3. Legyen a, b és c egy háromszög három oldalának hossza. Bizonyítsuk be, hogy

$$3(ab+ac+bc) \leqq (a+b+c)^2 < 4(ab+ac+bc).$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás. A háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség alapján $|a-b| < c$, $|a-c| < b$ és $|b-c| < a$. 1 pont

Mivel az egyenlőtlenségek mindegyik oldala nem negatív, ezért négyzetre emelhetőek és összeadhatóak:

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 < c^2 + b^2 + a^2.$$ 1 pont

Mindkét oldalból vonjunk le $a^2 + b^2 + c^2$-t és adjunk hozzá $4(ab+ac+bc)$-t. 1 pont

Ezzel az $\left(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\right) < 4(ab+ac+bc)$ egyenlőtlenséghez jutunk, ami éppen megfelel a bizonyítandó állítás jobb oldalának. 1 pont

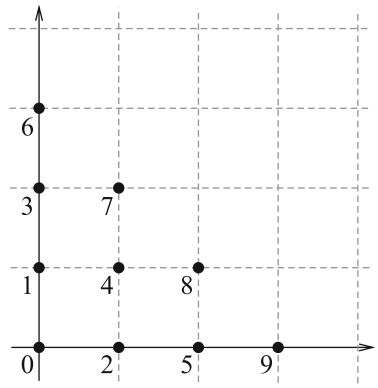
A baloldali egyenlőtlenség bizonyításához használjuk az $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geqq 0$ mindig teljesülő egyenlőtlenséget. 1 pont

A négyzetre emelést elvégezve, a negatív tagokat a másik oldalra rendezve és kettővel osztva adjunk mindkét oldalhoz $2(ab+ac+bc)$-t, így a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk. 1 pont

A bizonyításból látszik, hogy egyenlőség az $a = b = c$ esetben (azaz szabályos háromszög esetén) van. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. A derékszögű koordináta-rendszer I. negyedének rácspontjaiba az ábrán látható módon átlósan beírjuk az egymást követő természetes számokat. (A 0 az origóba kerül.)



$a)$ Milyen koordinátájú pontban van a 2017?

$b)$ Milyen szám szerepel a $P(54; 72)$ koordinátájú pontban?

Megoldás. $a)$ Mivel az egyes átlókban lévő pontok száma az egymást követő természetes számoknak felel meg, 1 pont az y tengely $(0; n)$ koordinátájú pontjába írt számot a 0-tól n-ig vett számok összege adja meg. 1 pont

Annak a ferde sornak, amelyen a 2017 is rajta van, az y tengelyen lévő pontjának n koordinátájára igaznak kell lenni az $\frac{n(n+1)}{2} \leqq 2017$, a következő sorra pedig az

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} > 2017$$

egyenlőtlenségnek. 1 pont

Az első egyenlőtlenségből $n \leqq 63{,}01$, a másodikból $n > 62{,}01$. Így $n = 63$ lehet csak. 1 pont

1-től 63-ig a számok összege 2016. Így a 2017 koordinátája: $(1; 62)$ 1 pont

$b)$ Az adott pont a $(0; 72 + 54 = 126)$ koordinátájú pontból induló ferde soron van. Az erre a pontra írt szám 126-ig a számok összege, azaz 8001. 1 pont

Innen még 54 lépést kell megtenni lefelé az adott pontig, így erre a pontra írt szám a

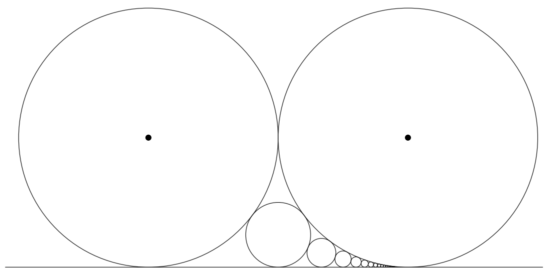
$$8001 + 54 = 8055.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Két egységsugarú kör – k_0 és k_1 – érinti egymást és egy egyenest. Berajzoltuk azt a legnagyobb k_2 kört, amelyik a k_0-t és k_1-et is, és az egyenest is érinti. Majd berajzoltuk a k_1, k_2 és az egyenes közé rajzolható legnagyobb k_3 kört. És így folytatjuk tovább. Mekkora a k_{2017} sugara?



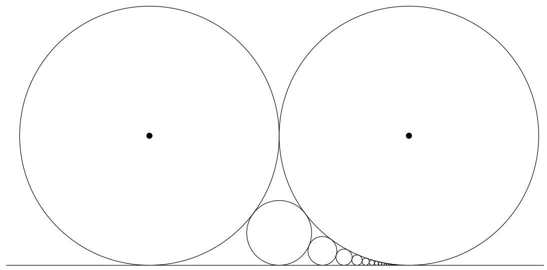
2. Adott egy ötelemű halmaz, a halmaz elemei különböző egész számok. Vegyük minden részhalmaza esetén a részhalmaz elemeinek összegét. Maximum hányszor fordulhat elő a 7 az ilyen összegek között?

3. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

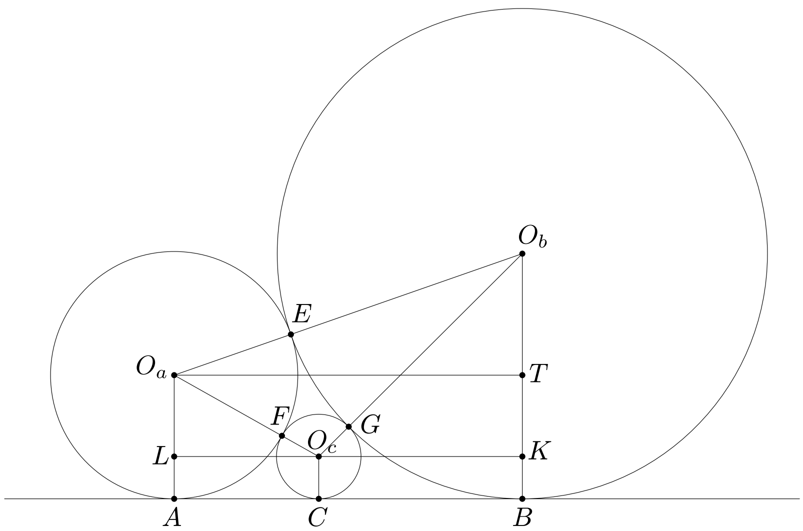
$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Megoldások és javítási útmutató

1. Két egységsugarú kör – k_0 és k_1 – érinti egymást és egy egyenest. Berajzoltuk azt a legnagyobb k_2 kört, amelyik a k_0-t és k_1-et is, és az egyenest is érinti. Majd berajzoltuk a k_1, k_2 és az egyenes közé rajzolható legnagyobb k_3 kört. És így folytatjuk tovább. Mekkora a k_{2017} sugara?



Megoldás. Először általánosan nézzük meg, hogy két egymást és egy közös egyenest érintő körök közé mekkora sugarú legnagyobb kör írható be. A kör sugara akkor a legnagyobb, ha érinti a két kört, és az egyenest.



Legyen az ábra jelöléseit használva O_a középpontú kör sugara a, O_b középpontú kör sugara b, a keresett O_c középpontú kör sugara c.

Legyenek az O_a, O_b és O_c középpontok merőleges vetületei az egyenesen rendre A, B és C. O_a-ból és O_c-ből bocsássunk merőlegeseket AO_a-ra, és BO_b-re.

A középpontokat összekötve az érintési pontokon áthaladó szakaszokat kapunk.

A keletkezett LO_aO_c, KO_cO_b és O_aTO_b derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel segítségével kifejezhető az egyenessel párhuzamos oldal:

$$LO_c = \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2} = 2\sqrt{ac},$$
$$KO_c = \sqrt{(b+c)^2 - (b-c)^2} = 2\sqrt{bc},$$
$$O_aT = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2} = 2\sqrt{ab},$$
$$O_aT = KO_c + LO_c.$$
1 pont

Behelyettesítve kapjuk:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{bc} + \sqrt{ac}.$$
1 pont

Majd $\sqrt{abc}$-vel leosztva:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}.$$
1 pont

Azaz $r_0 = 1$ és $r_1 = 1$-et behelyettesítve:

$$\frac{1}{\sqrt{r_2}} = 1 + 1 = 2,$$
$$r_2 = \frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1} = 3,$$
$$r_3 = \frac{1}{9}.$$
1 pont

Az első néhány eset után a sejtés, hogy $r_n = \frac{1}{n^2}$. 1 pont

Tegyük fel, hogy n-re igaz, és vizsgáljuk meg $(n+1)$-re:

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} + \frac{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} + 1 = n + 1.$$

Azaz $r_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, az állítást igazoltuk. 1 pont

Tehát $r_{2017} = \frac{1}{2017^2}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Adott egy ötelemű halmaz, a halmaz elemei különböző egész számok. Vegyük minden részhalmaza esetén a részhalmaz elemeinek összegét. Maximum hányszor fordulhat elő a 7 az ilyen összegek között?

Megoldás. 1 db egyelemű ilyen halmaz lehet.

Ha két ilyen kételemű halmaznak egy közös eleme lenne, akkor az összegfeltétel miatt a két elem megegyezne ($a + b = b + c = 7$ esetén $a = c$ lenne).

Tehát diszjunkt kételemű halmazok kellenek, ilyenekből 2 van. 1 pont

Háromelemű halmazok max. 1 elemben egyezhetnek meg az összegfeltétel miatt ($a+b+c = = d + b + c = 7$ esetén $a = d$ lenne).

Ezért max. 2 háromelemű halmaz lehetséges egy közös elemmel. A harmadik háromelemű halmaznak valamelyikkel legalább kettő közös eleme lenne.

Két négyelemű halmazunk max. két elemben egyezhet meg, ezért 5 elemű alaphalmaznál egy 4 elemű halmaz van csak.

Ötelemű halmazból legfeljebb 1 van, tehát összesen max. $1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$ ilyen részhalmaz lehet. 1 pont

Akkor kaphatnánk 7 részhalmaz elemeinek összegeként 7-et, ha lenne 1 darab ötelemű, 1 db négyelemű és 2 darab háromelemű 7 összegű halmazunk.

$a + b + c + d + e = 7$ és $a + b + c + d = 7$-ből $e = 0$ következik. 1 pont

A háromelemű halmazok nem lehetnek $\{a; b; c; d\}$ részhalmazai, mert ekkor az összeg nem lehet 7. Ezért a két háromelemű közös eleme a 0 és a, b, c, d közül egyik is tartalmaz kettő elemet (például a, b), a másik a maradék kettő elemet (például c, d). 1 pont

De ez lehetetlen, mert ekkor $a + b + c + d = 14$ lenne, tehát nem lehet 7, legfeljebb csak 6 megfelelő részhalmaz. 1 pont

Egy ötelemű halmaz, melynek 6 db 7 összegű részhalmaza van például a $\{-3; 0; 3; 4; 7\}$. 1 pont

A megfelelő részhalmazok: $\{7\}$, $\{0; 7\}$, $\{3; 4\}$, $\{-3; 3; 7\}$, $\{0; 3; 4\}$ és $\{-3; 0; 3; 7\}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Megoldás. A bal oldalon szereplő nevező miatt $x > 0$ feltételnek kell teljesülnie. A jobb oldalon lévő gyök alatti másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív, ezért a kifejezés minden x-re pozitív. 1 pont

Alakítsuk át a bal oldalt úgy, hogy a számlálóban lévő összeg mindkét tagját osztjuk $\sqrt{x}$-szel:

$$3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} = 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$ 1 pont

Tudjuk (a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján), hogy egy pozitív számnak és reciprokának összege mindig $\geqq 2$, így az egyenlet bal oldala mindig nagyobb-egyenlő 6-nál. 2 pont

Az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha ez a jobb oldalra is igaz, azaz

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \geqq 2.$$ 1 pont

Mivel mindkét oldal és a nevező is nem negatív, ezért beszorozhatunk és négyzetre emelhetünk. 1 pont

Kapjuk: $x^2+2x+1 \geqq 4x^2-4x+4$, rendezve: $0 \geqq 3x^2-6x+3 = 3(x-1)^2$. Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha $x=1$. 1 pont

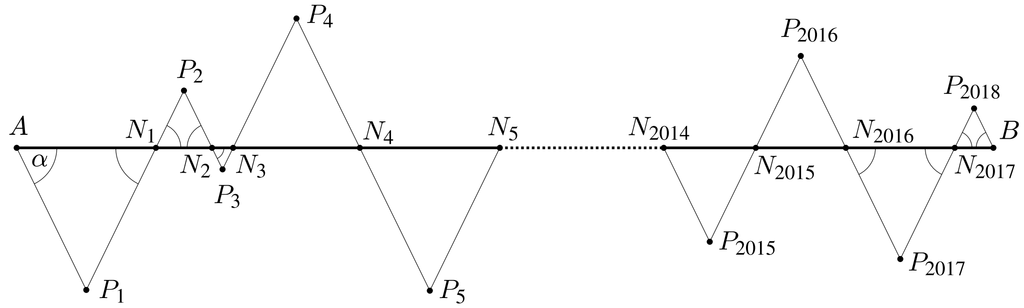
Behelyettesítéssel megmutatjuk, hogy ez valóban megoldása az egyenletnek. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók III. kategória, 1. forduló

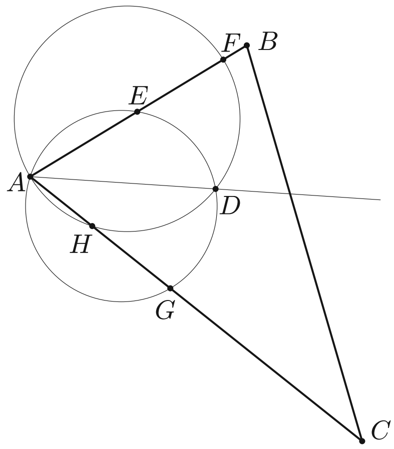
Feladatok

1. Adott egy AB szakasz, s rajta tetszőlegesen 2017 pont. A szakaszra az ábrán látható módon adott α szögű egyenlőszárú háromszögeket rajzolunk.



$a)$ Hogyan vegyük fel a pontokat, hogy ezen háromszögek területeinek összege minimális legyen?

$b)$ Hogyan vegyük fel a pontokat, hogy az $AP_1N_1P_2N_2 \ldots P_{2018}B$ töröttvonal hossza a legnagyobb legyen?



2. A $BAC\sphericalangle$ belső szögfelezőjének egyik – A-tól különböző – pontja D. Bizonyítsuk be, hogy ha két kör közös metszéspontja A és D, akkor a $BAC\sphericalangle$ szög szárainak (AB és AC félegyenesek) a két kör közé eső szakasza ugyanolyan hosszú! Diszkutáljuk a feladatot!

3. 10 egymást követő egész szám közül magányosnak nevezzük azokat, amelyek relatív prímek az összes többihez. Igazoljuk, hogy 10 egymást követő egész között mindig lesz legalább egy, ami magányos!

$b)$ Mutassunk példát 10 szomszédos egészre, amelyek között pontosan egy magányos szám van!

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

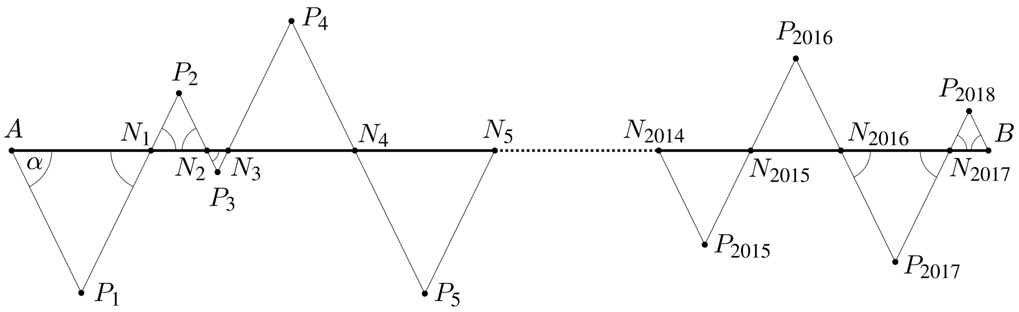
$$\begin{cases} \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=1, \\ (x^2+y-2)(y^2+x-2)=-2. \end{cases}$$

5. Ramszesznek, a fáraó írnokának van néhány egyforma nagyságú búzalepénye. Vallási előírásokból, ha egy lepényt felvágnak, akkor legfeljebb hét darab egyforma nagyságú részre kell vágni, és az egyszer már több részre osztott lepény darabjai tovább már nem oszthatóak.

Igazoljuk, hogy ha Ramszesznek legalább 18 egyforma lepénye van, akkor szét tudja osztani olyan adagokra, hogy az egyiptomi holdhónap mind a 28 napjára egyforma mennyiségű lepény jusson!

Megoldások és javítási útmutató

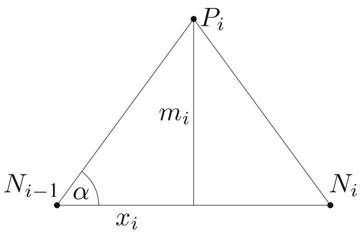
1. Adott egy AB szakasz, s rajta tetszőlegesen 2017 pont. A szakaszra az ábrán látható módon adott α szögű egyenlőszárú háromszögeket rajzolunk.



$a)$ Hogyan vegyük fel a pontokat, hogy ezen háromszögek területeinek összege minimális legyen?

$b)$ Hogyan vegyük fel a pontokat, hogy az $AP_1N_1P_2N_2 \ldots P_{2018}B$ töröttvonal hossza a legnagyobb legyen?

Megoldás.



$a)$ Legyen $A = N_0$ és $B = N_{2018}$. Írjuk fel egy kis háromszög területét.

A háromszög magassága: $m_i = x_i \cdot \operatorname{tg} \alpha$, így a területe $T_{N_{i-1}N_iP_i} = x_i^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$, 1 pont

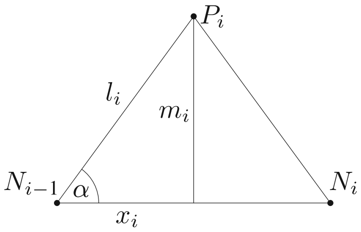
$$T = \sum_{i=1}^{2018} T_{N_{i-1}N_iP_i} = \sum_{i=1}^{2018} x_i^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sum_{i=1}^{2018} x_i^2 = \qquad \text{1 pont}$$

A négyzetes és a számtani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$= 2018 \operatorname{tg} \alpha \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{2018} \frac{x_i^2}{2018}} \right)^2 \geqq 2018 \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\sum x_i}{2018} \right)^2 = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{AB^2}{2018} = \text{állandó.} \qquad \text{2 pont}$$

Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, amikor a pontok egyenletesen helyezkednek el. 1 pont

$b)$ Egy tetszőleges háromszög két szára:



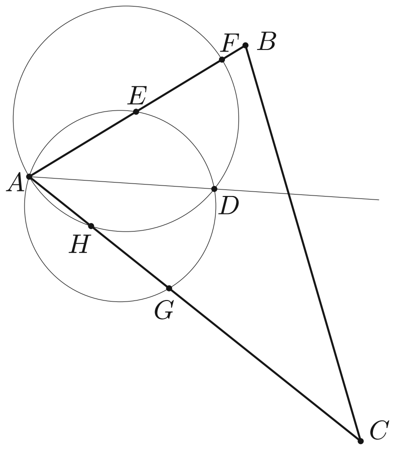
$$2l_i = \frac{2x_i}{\cos \alpha},$$

$$S = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2018} l_i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2018} \frac{x_i}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha} \cdot \sum_{i=1}^{2018} x_i =$$

$$= \frac{2AB}{\cos \alpha} = \text{áll.} \qquad \text{1 pont}$$

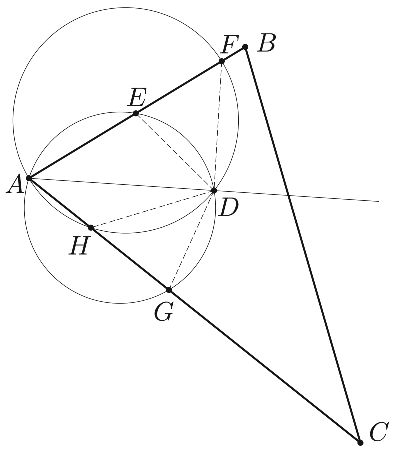
A töröttvonal hossza állandó a pontok helyének megválasztásától függetlenül. 1 pont

Összesen: 7 pont



2. A $BAC\sphericalangle$ belső szögfelezőjének egyik – A-tól különböző – pontja D. Bizonyítsuk be, hogy ha két kör közös metszéspontja A és D, akkor a $BAC\sphericalangle$ szög szárainak (AB és AC félegyenesek) a két kör közé eső szakasza ugyanolyan hosszú! Diszkutáljuk a feladatot!

Megoldás.



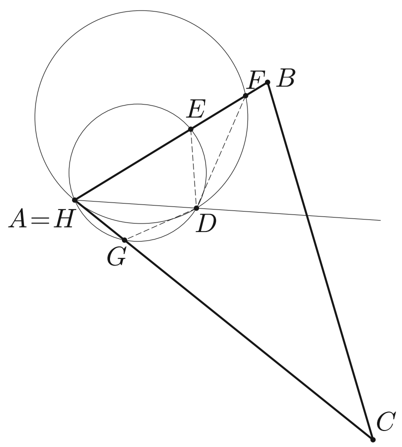
Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor A nem esik egybe a kérdéses szakaszok egyik végpontjával (azaz E-vel, F-fel, H-val vagy G-vel).

A feltételből tudjuk, hogy $BAD\sphericalangle = DAC\sphericalangle$.

Azonos nagyságú kerületi szögekhez azonos hosszúságú húrok tartoznak, így $DE = DG$, illetve a másik körön $FD = DH$. 1 pont

Az $EDG\sphericalangle = FDH\sphericalangle$, mert mindkettő szög az $AEDG$, illetve az $AFDH$ húrnégyszögben az $EAH\sphericalangle$-gel szemközti szöge. 1 pont

Mivel $EDH\sphericalangle$ közös, ezért $EDF\sphericalangle = HDG\sphericalangle$. Tehát a $DFE\triangle$ és a $DGH\triangle$ egybevágó, mivel két oldalukban és a közbezárt szögükben megegyeznek. Így $EF = GH$. 1 pont



Ha A egybeesik H, G, E vagy F valamelyikével, úgy a fenti bizonyításban szereplő húrnégyszögek egyike nem alakul ki.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $A = H$.
A többi analóg ezzel.

Ebben az esetben AG az A, D, F pontokat tartalmazó kör érintője lesz. Így az érintőszárú és kerületi szögek tételéből $GAD\sphericalangle = AFD\sphericalangle$.

Így AFB háromszög egyenlőszárú, mivel két szöge megegyezik, azaz $AD = DF$. 1 pont

Hasonlóan az előzőekhez, a $BAD\sphericalangle = DAC\sphericalangle$ feltételből $DE = DG$.

$AEDG$ húrnégyszög $AED\sphericalangle$ kiegészítő szöge pedig megegyezik $AGD\sphericalangle$-gel. 1 pont

Így ebben az esetben is megkapjuk, hogy a $DFE\triangle$ és a $DGA\triangle$ egybevágó, mivel szögeikben és 2 oldalukban is megegyeznek. Így $EF = GH$. 1 pont

Abban az esetben, amikor $E = H = A$ (ekkor mindkét szögszár érintője 1-1 körnek), a megfelelő szakaszok egyenlősége szimmetria miatt nyilvánvaló. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. 10 egymást követő egész szám közül magányosnak nevezzük azokat, amelyek relatív prímek az összes többihez. Igazoljuk, hogy 10 egymást követő egész között mindig lesz legalább egy, ami magányos!

$b)$ Mutassunk példát 10 szomszédos egészre, amelyek között pontosan egy magányos szám van!

Megoldás. Legyen x és y két egész szám, amelyek közös osztója d. Ekkor $d \mid x - y$. Tehát, ha a 10 egymást követő szám közül kettő nem relatív prím, akkor biztosan közös osztójuk a 2; 3; 5 és 7 számok valamelyike. 2 pont

A számok között pontosan öt páratlan szám van. Ezek közül legfeljebb kettő osztható 3-mal, és legfeljebb egy-egy osztható 5-tel, illetve 7-tel. Azaz legfeljebb $2 + 1 + 1$ páratlan szám lehet osztható a 3; 5; 7 számok valamelyikével. Így biztosan marad olyan szám, ami nem osztható a fenti számok egyikével sem. Ez a szám biztosan magányos lesz. 2 pont

$b)$ Az a célunk, hogy a 10 szám közül 9 osztható legyen a 2; 3; 5 és 7 számok valamelyikével, illetve ezek a prímek legalább két számot osszanak a 10 közül.

Próbálgatással találhatunk, olyan oszthatósági feltételeket, amelyek ezt teljesítik. Ezt az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
$2 \mid$		$2 \mid$		$2 \mid$		$2 \mid$		$2 \mid$	
$3 \mid$			$3 \mid$			$3 \mid$			$3 \mid$
$5 \mid$					$5 \mid$				
	$7 \mid$							$7 \mid$	

2 pont

Tehát olyan a_1-et keresünk, amely osztható 30-cal és a 7-es maradéka 6. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 90 egy jó választás.

Tehát az alábbi 10 szám olyan lesz, amelyben csak egy magányos szám van:

90; 91; 92; 93; 94; 95; 96; **97**; 98; 99. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Bármilyen helyes példa megadása (megfelelő indoklással együtt) 3 pontot ér.

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$\begin{cases} \left(x-\sqrt{x^2+1}\,\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\,\right)=1, \\ (x^2+y-2)(y^2+x-2)=-2. \end{cases}$$

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy az első $\left(x-\sqrt{x^2+1}\,\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\,\right)=1$ egyenletből következik, hogy $y=-x$.

(A fenti észrevételért – bizonyítás nélkül – : 1 pont)

Ehhez az első egyenlet baloldalának mindkét tényezőjét szorozzuk (-1)-gyel:

$$(1') \qquad \left(\sqrt{x^2+1}-x\,\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\,\right)=1.$$

Itt nyilván $y=-x$ esetén teljesül az egyenlet, megmutatjuk, hogy más esetben nem. Ezt úgy mutatjuk meg, hogy igazoljuk, hogy a $b(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ függvény szigorúan monoton csökkenő. Ebben az esetben nyilván legfeljebb egyetlen x esetén vehet fel bármely értéket, így ha pl. y-t paraméterként rögzítjük, akkor az $(1')$ paraméteres egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet, de egy megoldás (jelesül $x=-y$) mindig van is.

(A szigorú monotonitás észleléséért: 1 pont)

A szigorú monoton csökkenés pontosan azt jelenti, hogy ha $x_1<x_2 \to b(x_1)>b(x_2)$.

Legyen először $x_1<x_2\leqq 0$! Ekkor mivel $\sqrt{x_1^2+1}>\sqrt{x_2^2+1}$, és $(-x_1)>(-x_2)$ az x_1, x_2 választása miatt, ezért ekkor a csökkenés triviális.

Legyen most $0\leqq x_1<x_2$! Átalakítva kissé $b(x)$-t (a szokásos $\sqrt{x^2+1}+x$ konjugált-bővítéssel):

$$b(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Most a nevezőt vizsgálva adódik, hogy $\sqrt{x_1^2+1}<\sqrt{x_2^2+1}$, és $x_1<x_2$ miatt a nevező szigorúan növekvő, és pozitív, de akkor az egész tört szigorúan csökkenő.

És végül (mivel a 0-t mindkét esetben felvehette x_1, illetve x_2) adódik, hogy bármely $x_1<x_2$ esetén $b(x_1)>b(x_2)$. Ezzel a szigorú monoton csökkenést beláttuk.

(A szigorú monotonitás bizonyításáért: 2 pont)

Mivel $y=(-x)$ a második egyenlet átírható a következő alakba:

$$(2') \qquad (x^2-x-2)(x^2+x-2)=-2.$$

Innen adódik:

$$(2') \qquad \begin{aligned}(x^2-x-2)(x^2+x-2)&=\left((x^2-2)-x\right)\left((x^2-2)+x\right)=\\ &=(x^2-2)^2-x^2=x^4-5x^2+4=-2.\end{aligned}$$

Innen: $0=x^4-5x^2+6=(x^2-2)(x^2-3)$. Vagyis x lehetséges értékei: $x_1=\sqrt{2}$; $x_2=-\sqrt{2}$; $x_3=\sqrt{3}$; $x_4=-\sqrt{3}$.

(A második egyenlet megoldásáért: 2 pont)

Azaz a négy lehetséges $(x; y)$ megoldás:

$$\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right); \quad \left(\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right); \quad \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right); \quad \left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right).$$

(A négy megoldáspár felsorolásáért: 1 pont)

Összesen: 7 pont

5. Ramszesznek, a fáraó írnokának van néhány egyforma nagyságú búzalepénye. Vallási előírásokból, ha egy lepényt felvágnak, akkor legfeljebb hét darab egyforma nagyságú részre kell vágni, és az egyszer már több részre osztott lepény darabjai tovább már nem oszthatóak.

Igazoljuk, hogy ha Ramszesznek legalább 18 egyforma lepénye van, akkor szét tudja osztani olyan adagokra, hogy az egyiptomi holdhónap mind a 28 napjára egyforma mennyiségű lepény jusson!

Megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy elegendő, ha egy lepényt csupán négy, vagy hét részre vághatunk. Ilyen osztásokkal is igazságosan szétosztható 28 egyenlő részre n darab lepény minden $n > 17$ szám esetén. 1 pont

Először is megmutatjuk, hogy bármely $n > 17$ egész előáll $n = 4a + 7b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ alakban. (*Ez az ismert Frobenius-féle pénzosztási probléma speciális esete.*)

– Ha $n = 18 = 4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 \ \rightarrow \ a = 1;\ b = 2.$

– Ha $n = 19 = 4 \cdot 3 + 7 \cdot 1 \ \rightarrow \ a = 3;\ b = 1.$

– Ha $n = 20 = 4 \cdot 5 + 7 \cdot 0 \ \rightarrow \ a = 5;\ b = 0.$

– Ha $n = 21 = 4 \cdot 0 + 7 \cdot 3 \ \rightarrow \ a = 0;\ b = 3.$

Innentől minden további szám előáll az előzőekhez „néhány” 4-est adva.

(*Pl.* $n = 43$ *esetén* $43 - 19 = 24 = 4 \cdot 6 \ \rightarrow \ 43 = 4 \cdot (3 + 6) + 7 \cdot 1 \ \rightarrow \ a = 9;\ b = 1.$)

Vagyis valóban minden $n > 17$ egész előáll $n = 4a + 7b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ alakban. 3 pont

Ezek után bármely $n > 17$ mennyiségű lepény esetén a kívánt felosztás 28 egyenlő részre könnyen megtehető a következő módon:

Írjuk fel n-t $n = 4 \cdot a + 7 \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ alakban.

Ezután $4 \cdot a$ lepény mindegyikét osszuk fel egyenként 7-7 (összesen $7 \cdot 4 \cdot a = 28 \cdot a$) egyenlő darabra.

Majd $7 \cdot b$ lepény mindegyikét osszuk fel egyenként 4-4 (összesen $4 \cdot 7 \cdot b = 28 \cdot b$) egyenlő darabra. Minden napra a darab 7-ed, és b darab 4-ed lepényt félretéve mind a 28 napra azonos, vagyis $\frac{a}{7} + \frac{b}{4}$ mennyiségű lepény jut.

Ezzel a felosztást megvalósítottuk. 3 pont

Összesen: 7 pont

Haladók III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az ABC háromszög hegyesszögű. Minden magasságszakaszán felvesszük a csúcstól távolabbi harmadolópontokat, legyenek ezek rendre A', B', C'. Igazoljuk, hogy az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek hasonlóak.

2. A H halmazt hívjuk *izgalmas* halmaznak, ha olyan véges, valós számokból álló halmaz, hogy minden $x \in H$ esetén $x^2 - x \in H$ is teljesül.

Hány elemű az a G halmaz, amely az összes lehetséges 2017-elemű izgalmas H halmazok uniója?

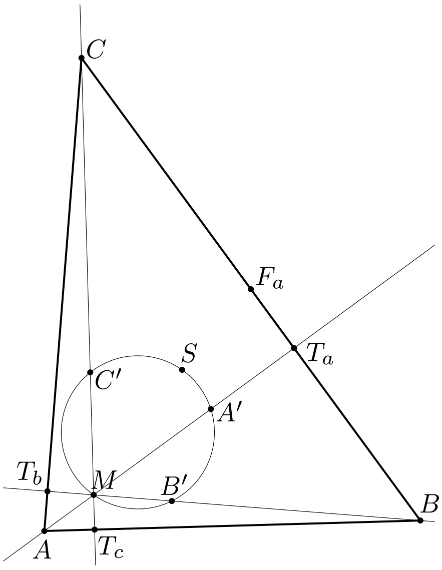
3. Adott egy 8×8-as sakktábla. Nevezzük főátlónak az $a1$–$h8$ átlót. Az átló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív négyzetszámokat írunk. A kitöltés után megvizsgáljuk a sor-, illetve oszlopösszegeket. Legkevesebb hány különböző szám lehet a 16 összeg között?

8								
7								0
6							0	0
5						0	0	0
4					0	0	0	0
3				0	0	0	0	0
2			0	0	0	0	0	0
1		0	0	0	0	0	0	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

Megoldások és javítási útmutató

1. Az ABC háromszög hegyesszögű. Minden magasságszakaszán felvesszük a csúcstól távolabbi harmadolópontokat, legyenek ezek rendre A', B', C'. Igazoljuk, hogy az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek hasonlóak.

Megoldás.



Magasságok harmadolópontjai

Használjuk az ábrán látható jelöléseket (S a súlypont, M a magasságpont).

S harmadolja az AF_a súlyvonalat, míg az A' harmadolja a magasságvonalat ($AS = \frac{2}{3} \cdot AF_a$, illetve $AA' = \frac{2}{3} \cdot AT_a$). Mivel az $AA'S\triangle$ és $AT_aF_a\triangle$ A-nál lévő szögei is megegyeznek, ezért a két háromszög hasonló, tehát az SA' szakasz párhuzamos a BC oldallal. 2 pont

Tehát az $SA'M$ háromszög derékszögű. Hasonló állítás igaz a másik két harmadolópontra is. Így az A', B', C' pontok az MS, mint átmérő fölé emelt körön vannak. 2 pont

Mivel a pontok egy körön vannak, ezért a $C'B'A'\sphericalangle = C'MA'\sphericalangle$ (mindkét szög a $C'A'$ ívhez tartozik). A $C'MA'\sphericalangle$-et már könnyen tudjuk számolni. Mivel $MT_aC\triangle$ és $CT_cB\triangle$ derékszögű, ezért

$$C'B'A'\sphericalangle = C'MA'\sphericalangle = 90^\circ - T_aCT_c\sphericalangle = 90^\circ - (90^\circ - ABC\sphericalangle) = ABC\sphericalangle.$$ 2 pont

Az $A'B'C'$ háromszög másik két szögére is hasonló módon igazolhatjuk a megfelelő egyenlőséget. Tehát a két háromszög szögei páronként megegyeznek, azaz a két háromszög hasonló. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

2. A H halmazt hívjuk *izgalmas* halmaznak, ha olyan véges, valós számokból álló halmaz, hogy minden $x \in H$ esetén $x^2 - x \in H$ is teljesül.

Hány elemű az a G halmaz, amely az összes lehetséges 2017-elemű izgalmas H halmazok uniója?

Megoldás. Legyen $f(x) = x^2 - x$. Ha $y = f(x)$, akkor azt fogom mondani, hogy y szám x szám képe, míg x szám y őse.

Először megmutatjuk, hogy ha $2 < x \in H$, vagy $-1 > x \in H$, akkor H halmaz nem véges, és így nem izgalmas.

Ha $2 < x \longrightarrow x^2 - x = x(x-1) > x(2-1) = x$, vagyis minden ilyen $x \in H$ esetén van olyan $x' > x$, hogy $x' \in H$, azaz H nem véges.

Ha $-1 > x \longrightarrow x^2 - x = x(x-1) > (-1)\big((-1) - 1\big) = 2$, vagyis ilyen x-ek képe 2-től nagyobb, innen az előző sor miatt H nem lehet véges. 1 pont

Most nézzük meg, hogy mi van, ha $0 < x < 1$! Ha $0 < x < 1$, akkor

$$f\big(f(x)\big) = \big(x^2 - x\big)^2 - \big(x^2 - x\big) = x(x-1)\big(x^2 - x - 1\big) = x(1-x)\big(1 + x - x^2\big).$$

Mivel a pozitív tagú (ezért kellett az utolsó lépésben az előbb $(-1)\cdot(-1)$-gyel szorozni) számtani-és-mértani-közepek közötti összefüggés miatt

$$0 < M^2\big(1-x; 1+x-x^2\big) = (1-x)\big(1+x-x^2\big) \leqq \left(\frac{(1-x)+(1+x-x^2)}{2}\right)^2 =$$

$$= S^2\big(1-x; 1+x-x^2\big),$$

és

$$\left(\frac{(1-x)+(1+x-x^2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2-x^2}{2}\right)^2 < 1.$$

Vagyis ha $0 < x < 1$, akkor $0 < f\big(f(x)\big) < x$, de akkor megintcsak nem lehet H véges, és így izgalmas sem. 1 pont

Most nézzük meg, van-e az $f(x) = x^2 - x$ függvénynek fixpontja, vagyis olyan c szám, hogy $f(c) = c$.

Az $x^2 - x = x$ egyenletet megoldva adódik, hogy a két lehetséges fixpont: $x_1 = 2$, és $x_2 = 0$.

Ezek, és csak ezek azok a számok, amelyek bevétele a H halmazba nem vonja maga után egy másik szám bevételét H-ba (vagyis saját maguk képei, illetve ősei).

Most nézzük meg, mely számok a 0, és a 2 számok további ősei!

Megoldva $x^2 - x = 2$ egyenletet adódik, hogy 2 másik őse a -1, míg megoldva $x^2 - x = 0$ egyenletet adódik, hogy 0 másik őse az 1.

Most vizsgáljuk meg, hogy ezeknek az új számoknak mik a további ősei! Mivel

$$f(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

ezért:

- ha $y = -\frac{1}{4}$, akkor pontosan egy őse van $\left(x = \frac{1}{2}\right)$,
- ha $y > -\frac{1}{4}$, akkor pontosan két őse van, míg
- ha $y < -\frac{1}{4}$, akkor nincsen egyetlen őse sem.

Emiatt a -1-nek nincsen őse, az 1-nek viszont két őse is van. Vizsgáljuk az 1 őseit!

Megoldva az $x^2 - x = 1$ egyenletet adódik, hogy 1 ősei: $p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\approx 1{,}618 > \frac{5}{4}\right)$, illetve $q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

A továbbiakban fellépő ősöket aszerint, hogy pozitívak (p_i), vagy negatívak (q_i) jelölésben megkülönböztetem, illetve p_k őseit fogom p_{k+1}-gyel, illetve q_{k+1}-gyel jelölni! Az is világos, hogy egy szám őseinek az összege (mivel $f(x)$ szimmetriatengelye $x = \frac{1}{2}$) éppen $+1$. 1 pont

Mivel $f(x)$ az $x > 1$ esetén szigorúan monoton nő, ezért p_1 pozitív p_2 ősére $\frac{5}{4} < p_1 < p_2$ és hasonlóan valamennyi k esetén $\frac{5}{4} < p_k < p_{k+1}$. Emiatt persze a fellépő további ősök valóban negatívak (hiszen egy y két ősének összege pontosan $+1$), sőt minden k-ra $q_k = 1 - p_k < < 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$.

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy egyetlen q_k-nak sincsen őse! 1 pont

Most vizsgáljuk meg, hogy mi a helyzet, ha $1 < x < 2$ és olyan az x, hogy két szomszédos p_k, p_{k+1} közé esik, vagyis $1 < p_k < x < p_{k+1} < 2$!

Ekkor mivel $f(x)$ az $1 < x < 2$ esetén szigorúan monoton nő,

$$p_{k-1} = f(p_k) < f(x) < f(p_{k+1}) = p_k.$$

Ezt k-szor alkalmazva $0 < f\Big(f\Big(f \dots \big(f(x)\big) \dots \Big)\Big) < 1$. Vagyis ilyen $x \in H$ esetén van olyan $x' \in H$ is, amelyre $0 < x' < 1$, de ez (a korábban leírtak miatt) azt jelenti, hogy a H nem véges, és így nem is izgalmas!

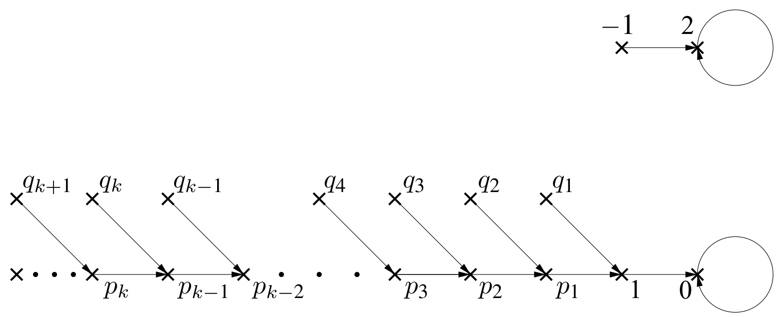
Ha $-1 < x < 0$, és x nem egyezik meg semelyik q_k-val sem, akkor a fenti észrevétel ugyanígy megismételhető; ilyen $x \in H$ esetén sem lesz véges H. 1 pont

Vagyis H végessége miatt H elemei csak a -1; 2 (ezek ketten külön „csoportot képeznek”), illetve a

$$0;\ 1;\ p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ p_2;\ q_2;\ p_3;\ q_3;\ \dots;\ p_k;\ q_k;\ \dots$$

(ebben a „csoportban” végtelen sok lehetséges tag van) közül kerülhetnek ki, méghozzá az alábbi irányított gráfnak megfelelően.

(*Az ábrában a nyilak/irányított élek azt jelentik, hogy az adott x bevétele esetén mely másik számot muszáj bevennünk H-ba.*)



Ha az alsó ábrában a lehető legnagyobb indexű olyan p_i-t akarom belevenni H-ba, hogy H még lehessen 2017 elemű, akkor ez a p_{2015} lesz, mert ennek a belevétele az összes tőle kisebb indexű p_i bevételét magával vonja, valamint az 1-t, és a 0-t is. Nyilván a legnagyobb indexű q_i, amit belevehetek az a q_{2015} szintén, és triviális, hogy bármely kisebb indexű

($1 \leqq i \leqq 2014$) p_i-re, vagy q_i-re tudunk csinálni olyan izgalmas 2017 elemű H halmazt, hogy az adott p_i, vagy q_i eleme legyen, vagyis ezeket a $p_i; q_i$-ket (és csak ezeket!) tartalmazni fogja a G halmazom, valamint tartalmazni fogja rendre a $-1; 0; 1; 2$ négy egész számot is.

Azaz G elemszáma: $|G| = 2 \cdot 2017 = 4034$. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Adott egy 8×8-as sakktábla. Nevezzük főátlónak az $a1$–$h8$ átlót. Az átló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív négyzetszámokat írunk. A kitöltés után megvizsgáljuk a sor-, illetve oszlopösszegeket. Legkevesebb hány különböző szám lehet a 16 összeg között?

8								
7								0
6							0	0
5						0	0	0
4					0	0	0	0
3				0	0	0	0	0
2			0	0	0	0	0	0
1		0	0	0	0	0	0	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

Megoldás. A h oszlop összege a $h8$ mezőn álló szám. Ez azonban szerepel a nyolcadik sor összegében (más számokal együtt). Ez a két összeg nem lehet azonos, így legalább kétféle szám szerepel az összegek között. 1 pont

Ezt el is lehet érni. Ha a tábla 2×2-es, akkor minden olyan kitöltés megfelelő, aminek a két szélső mezőjében azonos szám áll. Mutatunk egy kitöltést a 4×4-es négyzetben is (ld. 1. ábra). 1 pont

1	9	25	169
9	16	144	
25	144		
169			

1. ábra. 4×4-es négyzet kitöltése (a nem jelölt négyzetekben 0-ák állnak)

Tegyük fel, hogy egy $n \times n$-es táblázatot már sikerült kitölteni úgy, hogy a teljes sor és oszlop kivételével mindenhol máshol a számok összege A, míg a teljes sorban és oszlopban B. További feltételünk, hogy A páratlan legyen.

	B	A	A	A	A	
B	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	A	y
A	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	x	
A	$\star$	$\star$	$\star$	x		
A	$\star$	$\star$	x			
A	A	x				
	y					

2. ábra. Átlóval bővítünk egy megfelelő kitöltést

Egészítsük ki a $n \times n$ négyzetet egy átlóval, használjuk az 2. ábra jelöléseit. Célunk, hogy az utolsó n sor és oszlop összege azonos legyen. Ehhez az alábbi összegeket kell egyenlővé tennünk:

$$A + x = \ldots = A + x = y.$$

Azaz olyan x és y számokat válasszunk, amire igaz, hogy $y - x = A$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $x = \left(\frac{A-1}{2}\right)^2$ és $y = \left(\frac{A+1}{2}\right)^2$ megfelelő választás. 2 pont

Így kaptunk egy kitöltést a $(n+1) \times (n+1)$-es esetre. A teljes sor és oszlop összege $B' = B + \left(\frac{A+1}{2}\right)^2$, míg a többi sor, illetve oszlop összege $A' = \left(\frac{A+1}{2}\right)^2$.

Mivel A egy páratlan négyzetszám, ezért néggyel osztva 1 maradékot ad, így $A = 4k + 1$. Emiatt $A' = \left(\frac{(4k+1)+1}{2}\right)^2 = 2k + 1$, azaz A' szintén egy páratlan szám lesz. 2 pont

Az indukciós lépésünk működik, így eljuthatunk a 8×8-as négyzet megfelelő kitöltéséhez. Tehát létezik olyan kitöltés, amely sor- és oszlopösszegei között csak kétféle szám szerepel. 1 pont

---

Összesen: 7 pont