Oktatási Hivatal

A 2016/2017. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

döntő forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Felírtuk egy táblára az $1, 2, 3, \ldots, 2015, 2016$ számokat. Egy lépésben két tetszőleges számot letörölve közülük, vagy az összegüket, vagy a különbségük abszolútértékét írjuk helyettük a táblára. Ilyen lépések sorozatával a táblán levő számok darabszáma csökken, végül egy szám marad a táblán.
   Lehet-e az utolsó szám
   a) 2017
   b) 2016?

Megoldás:

Kezdetben a számok összege a táblán a számtani sorozat összegképlete szerint

(1) $$S = \frac{1+2016}{2} \cdot 2016 = 2033136\,.$$

Eszerint a feladatban leírt lépések sorozatának végrehajtása előtt a táblán levő számok összege páros szám volt. 1* pont

Ha egy lépést végrehajtunk, és ennek során a törölt számok helyett az összegüket írjuk a táblára, akkor a táblán levő számok összege nyilvánvalóan egyenlő lesz a lépés végrehajtása előtti összeggel.

Ha pedig egy lépésben a törölt számok helyett a különbségük abszolútértékét írjuk a táblára, akkor a táblán levő számok összege a kisebb szám kétszeresével csökken a lépés előtti összeghez képest.

Tehát a megengedett lépések bármelyikének végrehajtásával a táblán maradó számok összege vagy változatlan marad, vagy páros számmal csökken. 2** pont

Mivel a lépéssorozat megkezdése előtt a számok összege páros volt, akkor ez azt jelenti, hogy a lépéssorozat végén a táblán utoljára megmaradt szám csak páros lehet, tehát 2017 nem maradhat a táblán. 1*** pont

A feladat b) részének megválaszolásához megadunk egy olyan konstrukciót, amely bizonyítani fogja, hogy a táblán az utoljára megmaradt szám lehet 2016.

A konstrukció megadásához először az $1, 2, 3, \dots, 2015, 2016$ számok közül olyan párokat képezünk, amelyek különbségének abszolútértéke 1008, ezek a számpárok:

$$(1, 1009);\ (2, 1010\ );\ (3, 1011); \dots; (1007, 2015);\ (1008, 2016),$$

ez pontosan 1008 darab számpár. 1 pont

A lépéssorozat első részében egy-egy lépés során ezeket a párokat töröljük és helyettük a különbségük abszolútértékét, vagyis 1008-at írunk a táblára.
Ezután 1008 darab 1008-as szerepel a táblán.

Az 1008 darab számból ismét párokat képezünk, ezzel a táblán pontosan 504-szer fog szerepelni az

$$(1008, 1008)$$

számpár. 2 pont

A következő lépéssorozatban az 504 számpárból 503 számpárt törlünk, és helyettük a különbségük abszolútértékét, azaz 0-t írunk a táblára.
Az utolsó

$$(1008, 1008)$$

számpárt szintén töröljük, de itt a két szám összegét írjuk a táblára. 1 pont

Ezzel azt értük el, hogy a táblán 503 darab 0 és egy darab 2016-os szám szerepel.

A táblán így megmaradt 504 darab számmal a megengedett lépések bármelyikét végrehajtva a táblán szereplő 0-ák mellett mindig pontosan egy darab 2016-os marad meg. 1 pont

A konstrukció tehát választ ad a feladat b) kérdésére; eszerint a megengedett lépések alkalmazásával a táblán utoljára megmaradó szám lehet 2016, és ez a fenti konstrukció alkalmazásával meg is valósul. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

A versenyző a feladat a) részében a *-gal megjelölt pontokat a következő indoklás esetén is megkapja:

A lépéssorozat megkezdése előtt a táblán 1008 darab páros és 1008 darab páratlan szám van. 1* pont

Vizsgáljuk a táblán levő páratlan számok számának változását.
Ha egy lépésben két páros számot törlünk le, akkor helyettük akár az összegüket, akár a különbségük abszolútértékét írjuk vissza a táblára, az szintén páros lesz, ezért táblán levő páratlan számok száma nem változik.

Ha egy páros és egy páratlan számot törlünk le, akkor bármelyik megengedett lépést választjuk, a táblára páratlan számot írunk vissza, tehát a páratlan számok száma szintén nem változik.

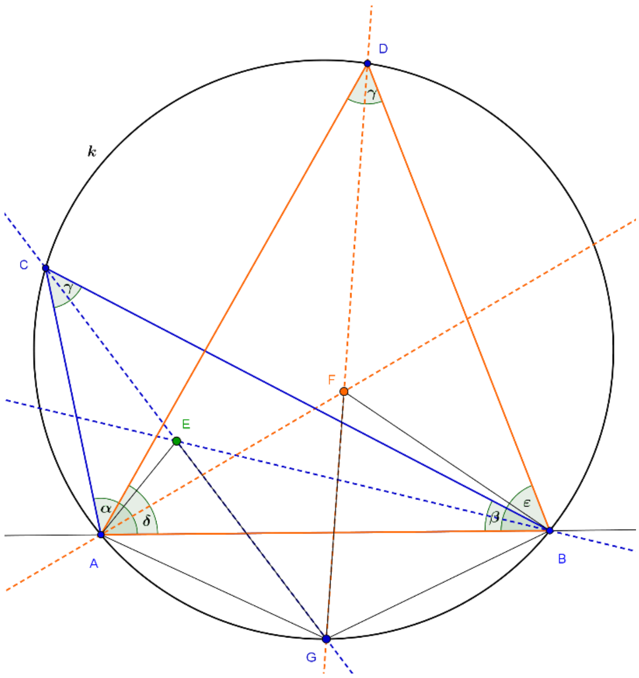
Végül, ha két páratlan számot törlünk le, akkor a táblára visszaírt szám csak páros lehet, ezért a páratlan számok száma kettővel csökken.

Eszerint a lépéssorozat bármely lépése a táblán levő páratlan számok számát vagy változatlanul hagyja, vagy kettővel csökkenti. 2** pont

Mivel a lépéssorozat megkezdése előtt a páratlan számok száma páros volt, akkor ez azt jelenti, hogy a lépéssorozat végén a táblán utoljára megmaradt szám csak páros lehet, ezért 2017 nem maradhat a táblán. 1*** pont

2. A síkon a C és D pontok az AB szakasz által meghatározott egyenes ugyanazon oldalára esnek úgy, hogy az ABC és ABD háromszögek körülírt köre azonos.
Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja E, az ABD háromszög beírt körének középpontja F, a C és D pontokat nem tartalmazó AB ív felezőpontja G.
Bizonyítsa be, hogy az A, B, E, F pontok egy G középpontú körön helyezkednek el!

<u>1. Megoldás:</u>
Készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát, amelyen legyenek az ABC háromszög belső szögei $CAB\measuredangle = \alpha$, $ABC\measuredangle = \beta$ és $BCA\measuredangle = \gamma$ (1. ábra).
Nem sérti az általánosságot, ha feltesszük, hogy az ABC háromszög k körülírt körén az A pontból negatív irányban haladva a pontok $A; C; D; B$ sorrendben követik egymást.
Az ABD háromszög D csúcsából a feltételek miatt az AB szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint a C pontból, ezért $BDA\measuredangle = \gamma$. 1 pont



1. ábra

Legyen az ABD háromszög másik két belső szöge $DAB\measuredangle = \delta$ és $ABD\measuredangle = \varepsilon$.

Az E és F pontok rendre az ABC és ABD háromszögek beírt köreinek középpontjai, tehát a két háromszög belső szögfelezőinek metszéspontjai.

Az ABC háromszögben ezért a CE egyenes felezi a γ szöget, és így felezi a γ szöghöz tartozó, a C és D pontokat nem tartalmazó AB ívet, azaz a CE egyenesre illeszkedik a G pont.

Mivel azonban a C és D pontok az AB egyenes ugyanazon oldalán vannak és

$$BCA\measuredangle = BDA\measuredangle = \gamma,$$

ezért az ABD háromszög DF szögfelezője ugyancsak áthalad a G ponton, vagyis a CE és DF egyenesek az ABC és ABD háromszögek közös körülírt körének G pontjában metszik egymást. 1 pont

Egy körben azonos nagyságú kerületi szögekhez azonos nagyságú ívek és azonos hosszúságú húrok tartoznak, ezért az előző eredményünk azt is jelenti, hogy

(1) $$GA = GB\,.$$ 1 pont

Az ACE háromszögben

$$EAC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}, \qquad ACE\sphericalangle = \frac{\gamma}{2},$$

és mivel a $GEA\sphericalangle$ az ACE háromszög külső szöge, ezért

(2) $$GEA\sphericalangle = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

A kerületi szögek tétele miatt $CGA\sphericalangle = CBA\sphericalangle = \beta$, és így $EGA\sphericalangle = \beta$ is teljesül, ezért a GAE háromszögben

$$GAE\sphericalangle = 180° - \beta - \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

de az ABC háromszögben $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, és így $180° - \beta = \alpha + \gamma$, ebből egyszerű számolással kapjuk, hogy

(3) $$GAE\sphericalangle = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$ 2 pont

A (2) és (3) eredmények szerint a GAE háromszög egyenlő szárú, tehát

(4) $$GA = GE\,.$$ 1 pont

A BDF háromszögben

$$FBD\sphericalangle = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad BDF\sphericalangle = \frac{\gamma}{2},$$

továbbá a $GFB\sphericalangle$ az BDF háromszög külső szöge, ezért

(5) $$GFB\sphericalangle = \frac{\varepsilon + \gamma}{2}.$$

A kerületi szögek tételének alkalmazásával adódik, hogy $DGB\sphericalangle = DAB\sphericalangle = \delta$, ezzel $FGB\sphericalangle = \delta$ is fennáll, így a GBF háromszögben

$$GBF\sphericalangle = 180° - \delta - \frac{\varepsilon + \gamma}{2},$$

ugyanakkor az ABD háromszögben $\delta + \varepsilon + \gamma = 180°$, ezért $180° - \delta = \varepsilon + \gamma$, ebből pedig azt kapjuk, hogy

(6) $$GBF\sphericalangle = \frac{\varepsilon + \gamma}{2}.$$ 2 pont

Az (5) és (6) eredmények együttesen azt jelentik, hogy a GBF háromszög is egyenlő szárú, ezért

(7) $$GB = GF\,.$$ 1 pont

Az (1), (4) és (7) összefüggések szerint

$$GA = GB = GE = GF,$$

vagyis a C és D pontokat nem tartalmazó AB ív G felezőpontja egyenlő távol van az A, B, E, F pontoktól, tehát ezek a pontok egy G középpontú körön vannak, és éppen ezt akartuk bizonyítani. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Először azt bizonyítjuk, hogy az A, B, E, F pontok egy körön vannak.
Ehhez az 1. ábra jelöléseit használjuk.
Nem sérti az általánosságot, ha ebben a megoldásban is feltesszük, hogy az ABC háromszög k körülírt körén az A pontból negatív irányban haladva a pontok $A; C; D; B$ sorrendben követik egymást.
Az ABD háromszög D csúcsából a feltételek miatt az AB szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint a C pontból, ezért

$$BDA\measuredangle = \gamma\,.$$ 1 pont

Az ABC háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja az E pont, ezért

$$AEB\measuredangle = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2},$$

mivel azonban az ABC háromszögben $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ezért egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$AEB\measuredangle = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

Az ABD háromszög AF és BF szögfelezői miatt az ABF háromszögben

$$AFB\measuredangle = 180° - \frac{\delta+\varepsilon}{2},$$

viszont az ABD háromszögben $\delta + \varepsilon + \gamma = 180°$, és így

$$AFB\measuredangle = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$ 1 pont

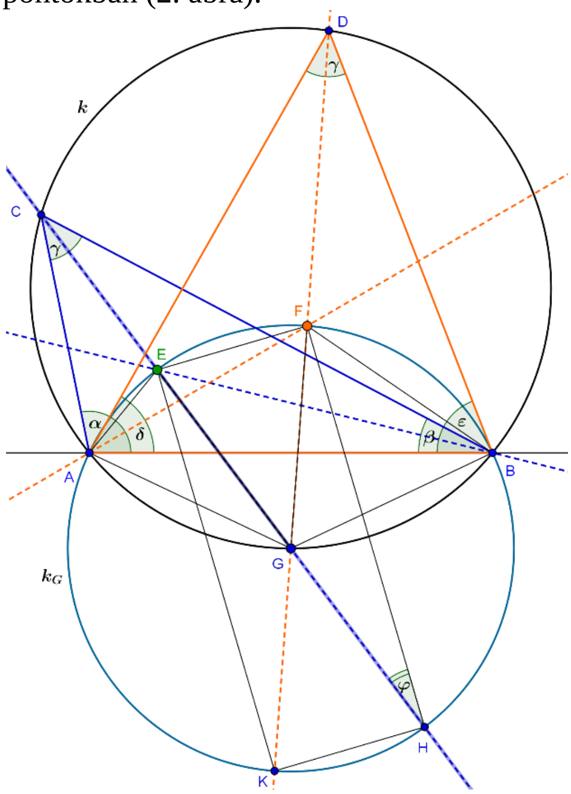
Az $E; F$ pontok az AB egyenes ugyanazon oldalán vannak és előző eredményeink szerint az E és F pontokból az AB szakasz azonos nagyságú szögben látszik, ezért az A, B, E, F pontok valóban egy körön helyezkednek el. 1 pont

Az E és F pontok rendre az ABC és ABD háromszögek beírt köreinek középpontjai, tehát a két háromszög belső szögfelezőinek metszéspontjai.
Az ABC háromszögben ezért a CE egyenes felezi a γ szöget, és így felezi a γ szöghöz tartozó, a C és D pontokat nem tartalmazó AB ívet, azaz a CE egyenesre illeszkedik a G pont.
Mivel az előzőekben már beláttuk, hogy

$$BCA\measuredangle = BDA\measuredangle = \gamma,$$

ezért az ABD háromszög DF szögfelezője szintén felezi a C és D pontokat nem tartalmazó AB ívet, ezért ugyancsak áthalad a G ponton, vagyis a CE és DF egyenesek az ABC és ABD háromszögek közös körülírt körének G pontjában metszik egymást. 1 pont

A továbbiakban azt kell bizonyítanunk, hogy az A, B, E, F pontokra illeszkedő k_G kör középpontja a G pont.
Hosszabbítsuk meg a CE és DF szakaszokat úgy, hogy a k_G kört másodszor is messék, mégpedig rendre a $H; K$ pontokban (2. ábra).



2. ábra

Az A, B, E, F pontokra illeszkedő k_G kör EF húrja a kerületi szögek tétele szerint az $A; K; H; B$ pontokból azonos nagyságú szögek alatt látszik, ezt a szöget a 2. ábrán φ-vel jelöltük, eszerint

$$EAF\measuredangle = EKF\measuredangle = EHF\measuredangle = EBF\measuredangle = \varphi \,.$$ 1 pont

Ugyancsak a kerületi szögek tételéből következik, hogy

$$EFA\measuredangle = EBA\measuredangle = \frac{\beta}{2}\,,$$

valamint

$$FAB\measuredangle = FEB\measuredangle = \frac{\delta}{2}\,.$$

Az $ABFE$ négyszög húrnégyszög, amelyben a szemközti szögek összege páronként 180°, ezért $EAB\measuredangle + EFB\measuredangle = 180°$, vagyis

$$EAF\measuredangle + FAB\measuredangle + EFA\measuredangle + AFB\measuredangle = 180°\,.$$

Ebből pedig előző eredményeink szerint az következik, hogy

$$\varphi + \frac{\delta}{2} + \frac{\beta}{2} + 90° + \frac{\gamma}{2} = 180°\,,$$

azaz

(1) $$\varphi + \frac{\delta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°\,.$$ 1 pont

A BCE háromszög külső szöge a $BEH\measuredangle$, így

$$BEH\measuredangle = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2},$$

továbbá

$$FEB\measuredangle = \frac{\delta}{2},$$

ezért az FEH háromszögben

$$FEH\measuredangle + EHF\measuredangle = FEB\measuredangle + BEH\measuredangle + EHF\measuredangle = \frac{\delta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \varphi\,.$$ 1 pont

Ebből (1) alapján azt kapjuk, hogy $FEH\measuredangle + EHF\measuredangle = 90°$, eszerint az EHF háromszög derékszögű háromszög, amelyben

$$HFE\measuredangle = 90°\,.$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy EHF derékszögű háromszög EH átfogója a k_G kör átmérője. 1 pont

Hasonlóképpen bizonyítható, hogy az KFE is derékszögű háromszög, amelyben

$$FEK\measuredangle = 90°,$$

és a háromszög KF átfogója a k_G kör átmérője. 1 pont

Ebből az is következik, hogy az $EKHF$ négyszög téglalap, amelynek EH és KF átlói felezik egymást a G pontban.

A téglalap átlóinak metszéspontja pedig a téglalap köré írt kör középpontja, ezért a G pont valóban az A, B, E, F pontokra illeszkedő k_G kör középpontja. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

a) Teljes értékű a megoldás, ha a versenyző igazolja, hogy a k körben a GA és GB húrok egyenlő hosszúak, majd belátja, hogy a GAF háromszögben $GAF\measuredangle = GFA\measuredangle$, ezért a háromszög egyenlő szárú, így $GA = GF$, valamint bizonyítja, hogy a GBE háromszögben $GBE\measuredangle = GEB\measuredangle$, tehát ez a háromszög is egyenlő szárú, ezért $GB = GE$, végül pedig felismeri, hogy $GA = GB = GE = GF$ a feladat állításával egyenértékű.

b) A feladat megoldása alapján azt is beláttuk, hogy a G középpontú, $GA = GB$ sugarú körre illeszkedik minden olyan háromszög beírt körének középpontja, amelynek két csúcsa A és B, harmadik csúcsa pedig az ABC háromszög körülírt körének C pontot is tartalmazó körívére illeszkedik.

3. A valós számok halmazán értelmezett egész együtthatós

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \cdot b \cdot c \neq 0)$$

függvényről tudjuk, hogy

$$f(a) = f(b) = f(c) = 0\,.$$

Adja meg az összes ilyen tulajdonságú függvényt!

Megoldás:

Az $a \cdot b \cdot c \neq 0$ feltétel miatt az $f(x) = ax^2 + bx + c$ egyik együtthatója sem lehet zérus, tehát az $f(x)$ másodfokú függvény. 1 pont

A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek nem lehet három különböző zérushelye, tehát az

$$f(a) = f(b) = f(c) = 0$$

feltétel csak akkor teljesülhet, ha az $a; b; c$ együtthatók között vannak azonosak. 1 pont

Ha mindhárom együttható egyenlő, azaz $a = b = c$, akkor az $f(x)$ függvény a következő alakban írható fel:

(1) $$f(x) = a \cdot (x^2 + x + 1)\,.$$

Az (1) függvénynek azonban nincs zérushelye, hiszen $a \neq 0$ és az $x^2 + x + 1$ másodfokú függvény diszkriminánsa negatív.
Ezért az $a = b = c$ eset nem állhat fenn. 1 pont

Ha két egyenlő együttható van és a harmadik ezektől különböző, akkor több eset is lehetséges.

Ha $a = b \neq c$, akkor egyrészt $f(x) = ax^2 + ax + c$, másrészt $f(a) = f(c) = 0$, azaz

(2) $$a^3 + a^2 + c = 0\,,$$

illetve

(3) $$ac^2 + ac + c = 0\,.$$

A (2) és (3) egyenletek megfelelő oldalait kivonva egymásból, azt kapjuk, hogy
$a^3 - ac^2 + a^2 - ac = 0$, ahonnan szorzattá alakítással

(4) $$a \cdot (a - c) \cdot (a + c + 1) = 0\,.$$

A (4) egyenletben csak $a + c + 1 = 0$ lehetséges, hiszen a feltételek miatt $a \neq 0$, illetve $a \neq c$.
Ebből azt kapjuk, hogy

$$c = -a - 1\,.$$

A (3) egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk a $c \neq 0$ számmal, ebből adódik az

$$ac + a + 1 = 0$$

egyenlet, amelybe a kapott $c = -a - 1$ összefüggést helyettesítve egyszerű számolással az

(5) $$a^2 = 1$$
egyenletet kapjuk.

Az (5) egyenlet megoldásai az $a = 1$ és $a = -1$ egész számok.

Ezek közül az $a = -1$ nem felel meg a feltételeknek, mert ebből $c = -a - 1$ szerint $c = 0$ következne.

A feltételek és $a = 1$ alapján $b = 1$ és $c = -2$ adódik, eszerint a feladat megoldása az

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

másodfokú függvény, amelynek együttható egész számok. 2 pont

Ha $a = c \neq b$, akkor $f(x) = ax^2 + bx + a$, illetve $f(a) = f(b) = 0$ miatt

(6) $$a^3 + ab + a = 0\,,$$
illetve
(7) $$ab^2 + b^2 + a = 0\,.$$

A (6) és (7) egyenletek megfelelő oldalait egymásból kivonva az $a^3 - ab^2 + ab - b^2 = 0$ egyenletet kapjuk, ahonnan szorzattá alakítással

(8) $$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b) = 0\,.$$

A (8) egyenletben $a \neq b$ miatt $a - b \neq 0$, így csak $a^2 + ab + b = 0$ lehetséges, amelyből

$$a^2 + b = -ab$$

következik.

A (6) egyenlet mindkét oldalát az $a \neq 0$ számmal osztva $a^2 + b + 1 = 0$, ahonnan

$$a^2 + b = -1$$

adódik, ezt előző eredményünkkel összevetve az

(9) $$ab = 1$$

egyenletet kapjuk.

A (9) egyenlet megoldásai az $a = 1; b = 1$ és $a = -1; b = -1$ egészekből álló számpárok. A feladatnak azonban egyik számpár sem megoldása, mert feltételeink szerint

$$a \neq b\,.$$ 2 pont

Végül, ha $b = c \neq a$, akkor az $f(x) = ax^2 + bx + b$, illetve az $f(a) = f(b) = 0$ feltételeket figyelembe véve

(10) $$a^3 + ab + b = 0\,,$$
illetve
(11) $$ab^2 + b^2 + b = 0\,.$$

A (10) és (11) egyenletek megfelelő oldalait kivonjuk egymásból, így szorzattá alakítás után az

(12) $$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b) = 0$$

egyenletre jutunk, amelyik pontosan megegyezik az előző esetben kapott (8) egyenlettel.

A (12) egyenletben $a \neq b$ miatt $a - b \neq 0$ nem lehetséges, ezért $a^2 + ab + b = 0$, ahonnan

$$ab + b = -a^2$$

adódik.

A (11) egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk a $b \neq 0$ számmal, ebből $ab + b + 1 = 0$, ahonnan

$$ab + b = -1$$

következik.
Az $ab + b$ kifejezésre kapott két egyenlet összevetésével

(13) $$a^2 = 1\,.$$

A (13) egyenlet megoldásai az $a = 1$ és $a = -1$ egész számok. A feltételeknek azonban egyik szám sem felel meg, mert $a = 1$ és $ab + b = -1$ figyelembe vételével

$$b = -\frac{1}{2}$$

következne, ez pedig ellenkezik a feladat egész számokra vonatkozó feltételével, az $a = -1$ pedig $ab + b = -1$ alapján lehetetlen eredményre vezet. 2 pont

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk és azt kaptuk, hogy a feladat feltételeinek egyetlen függvény felel meg, az $a = b = 1$ és $c = -2$ egész együtthatókkal felírt

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

másodfokú függvény, ez a feladat egyetlen megoldása. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont