Oktatási Hivatal

A 2016/2017. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási–értékelési útmutató

1. Tekintsük a koordinátarendszer azon $(x; y)$ pontjait, amelyekre

$$|x-1|+|y+2| \leq 3.$$

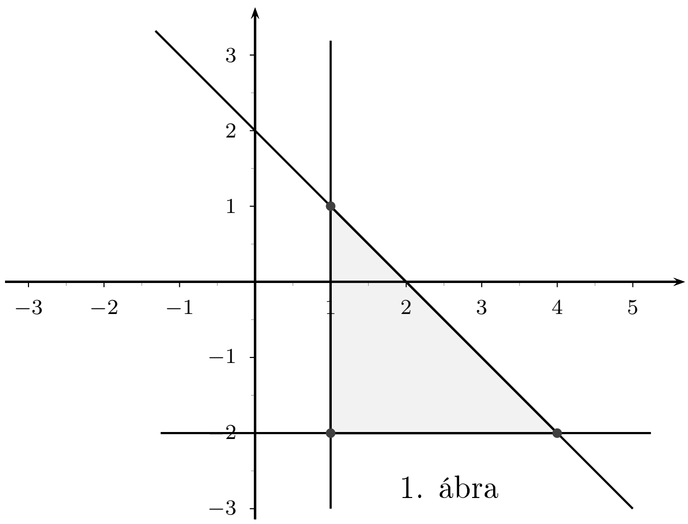
Mekkora ennek a ponthalmaznak a területe?

Megoldás: A feladat feltételében szereplő $x-1$ és $y+2$ előjele alapján tekintsük az alábbi négy esetet:

Ha mindkettő pozitív, akkor $x \geq 1$ és $y \geq -2$, a feltétel pedig $x-1+y+2 \leq 3$.

1 pont

Ebben az esetben tehát a megfelelő $(x; y)$ pontok a koordinátarendszer y tengelyével párhuzamos $x=1$ egyenletű egyenesétől jobbra, az x tengellyel párhuzamos $y=-2$ egyenletű egyenesétől fölfele és az $y=2-x$ egyenes alatti háromszög alakú tartomány, annak határaival együtt (1. ábra). A kapott háromszög derékszögű és egyenlő szárú, csúcsai az $(1; -2)$, $(1; 1)$ és $(4; -2)$ pontok. Befogóinak hossza 3, így területe 4,5. 2 pont

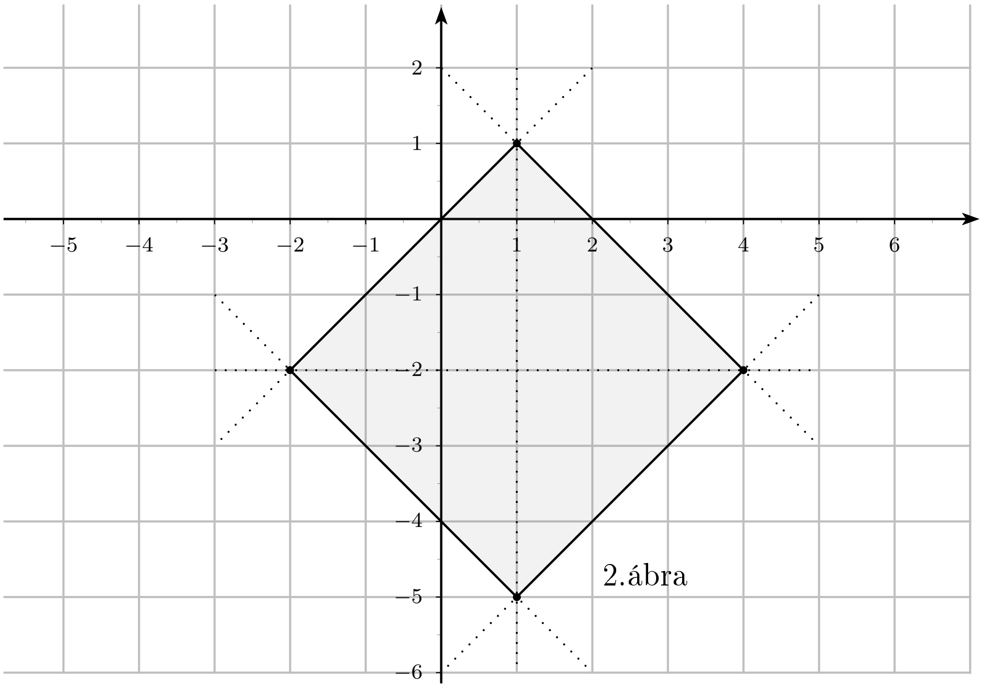


1. ábra

A további három eset az elsőhöz hasonló módon adódik:

Ha $x \leq 1$ és $y \geq -2$, akkor $1 - x + y + 2 \leq 3$.
Ha $x \geq 1$ és $y \leq -2$, akkor $x - 1 - y - 2 \leq 3$.
Ha $x \leq 1$ és $y \leq -2$, akkor $1 - x - y - 2 \leq 3$.

Ezek mindegyike egy-egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú tartomány. 3 pont
A négy tartomány együtt az alábbi (2.ábra) 18 területű négyzetet határozza meg. 1 pont



2.ábra

Összesen 7 pont

2. Kiválasztjuk véletlenszerűen a 8×8-as sakktábla két különböző mezőjét és megjelöljük a középpontjukat. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a kijelölt középpontokat összekötő szakasz felezőpontja is egy mező középpontja legyen.

Megoldás: A 8×8-as sakktábla minden mezőjéhez hozzárendelünk egy $(a; b)$ számpárt, amennyiben az adott mező az a. sor b. oszlopában van. Kiválasztva két mezőt, a hozzájuk tartozó számpárok $(a_1; b_1)$ és $(a_2; b_2)$ esetén a középpontokat összekötő szakasz felezőpontja éppen akkor lesz egy mező középpontja, ha $\frac{a_1+a_2}{2}$ és $\frac{b_1+b_2}{2}$ is egész, azaz a_1 és a_2, valamint b_1 és b_2 paritása megegyezik. 3 pont

A sakktábla 64 mezője 4 darab egyenlő létszámú, 16-os csoportba osztható a hozzájuk rendelt számpárok paritásának megfelelően. 2 pont

Vegyük az első kiválasztott mezőt, az általa meghatározott csoportban további 15 mező van. A második mezőt a maradék 63 közül választhatjuk, ezek közül 15 felel meg a feladat feltételeinek, így a keresett valószínűség $\dfrac{15}{63}$. 2 pont

Összesen 7 pont

Az utóbbi négy pont bontását megadjuk egy további gondolatmenet esetén is: A sakktábla 64 mezőjéből kettőt $\binom{64}{2}$–féleképpen választhatunk ki, ennyi az összes eset.

1 pont

A jó esetekben a két mezőt ugyanabból a 16-ból választhatjuk, amelyet a hozzájuk rendelt számpár paritása meghatároz. Mivel négy ilyen csoport van, a jó esetek száma $4 \cdot \binom{16}{2}$.

2 pont

A keresett valószínűség tehát

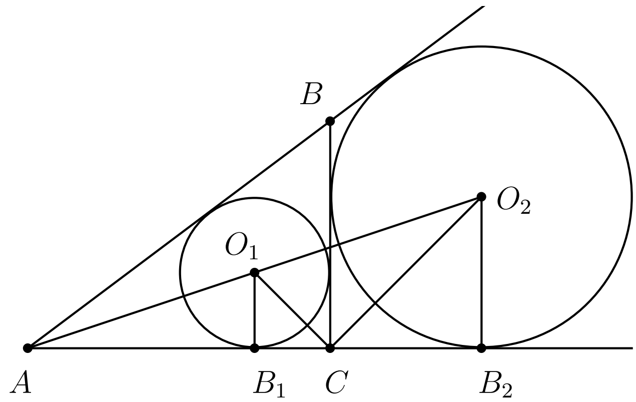
$$\frac{4 \cdot \binom{16}{2}}{\binom{64}{2}} = \frac{15}{63}.$$

1 pont

3. Az ABC derékszögű háromszög beírt körének sugara legyen r. Mekkora lehet a befogók aránya, ha az egyik befogóhoz hozzáírt kör sugara $2r$?

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit, azaz legyen C a háromszög derékszögű csúcsa és tekintsük a BC oldal hozzáírt körét. A beírt és a hozzáírt kör középpontja rendre O_1 és O_2. Legyenek továbbá a beírt és a hozzáírt kör érintési pontjai az AC egyenesen B_1 és B_2.

1 pont



Mivel O_1B_1C és O_2B_2C egyenlő szárú, derékszögű háromszögek, ezért $B_1C = r$ és $B_2C = 2r$.

1 pont

A szokásos jelölésekkel $B_1C = s - c$ és $B_2C = s - b$. 1 pont

Így $B_1B_2 = 3r = (s - c) + (s - b) = a$. A BC befogó hossza tehát $3r$. 1 pont

Az AO_1B_1 háromszög hasonló az AO_2B_2 háromszöghöz, hiszen oldalaik párhuzamosak. A hasonlóság aránya a megfelelő O_1B_1 és O_2B_2 oldalak aránya, innen

$$\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{O_1B_1}{O_2B_2} = \frac{1}{2}.$$

Ebből

$$2 \cdot AB_1 = AB_2 = AB_1 + B_1B_2 = AB_1 + 3r.$$

Innen azt kapjuk, hogy $AB_1 = 3r$, és így $AC = 4r$. 2 pont

A befogók aránya tehát $\frac{3}{4}$, vagy ennek reciproka, azaz $\frac{4}{3}$. 1 pont

Összesen 7 pont

4. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

$$x \cdot (x+2) = y^2 \cdot (y^2+1).$$

Megoldás: Az egyenlet bal és jobb oldalán is olyan kifejezés áll, amely könnyen kiegészíthető teljes négyzetté. 1 pont

Így a következőt kapjuk:

$$\left(y^2\right)^2 < x^2+2x+1 = (x+1)^2 = y^4+y^2+1 \le \left(y^2+1\right)^2. \qquad 2 \text{ pont}$$

Amennyiben az utolsó egyenlőtlenség jelnél nem egyenlőség lenne, az azt jelentené, hogy két szomszédos négyzetszám között lenne még egy további:

$$\left(y^2\right)^2 < (x+1)^2 < \left(y^2+1\right)^2.$$

Mivel ez lehetetlen, így $y^4+y^2+1 = \left(y^2+1\right)^2$ és ebből $y=0$. 2 pont

A kitűzött egyenlet ekkor $x \cdot (x+2) = 0$, ennek megoldásai pedig az $x_1 = 0$ és az $x_2 = -2$. 1 pont

A feladat feltételeinek eleget tevő $(x; y)$ számpárok tehát a $(0; 0)$ és a $(-2; 0)$. 1 pont

Összesen 7 pont

5. Egy 25 tagú társaság vacsorázni ment. Az öt hölgy, Anna, Borbála, Cecília, Dóra és Erzsébet továbbá a húsz férfi az étteremben egy kör alakú asztalhoz ültek, ahol a helyeket megszámozták körben az 1, 2, ..., 25 számokkal. Hányféleképpen ülhetnek le, hogy a hölgyek közt ne legyen kettő sem szomszédos, sem másodszomszédos? (Azaz bármely két hölgy között legalább két férfi ül.)

Megoldás: A hölgyek széke mellett balra és jobbra is olyan széknek kell lennie, amelyen férfi ül. Ezért gondolatban a hölgyek székéhez ragasszuk hozzá a bal és jobb oldali széket, így létrejön egy három székből álló csoport, nevezzük ezt *királynői* széknek. Az asztal körül így lesz 5 királynői szék. Ezek együtt az öt hölgy helye mellett 10 férfi helyét is meghatározzák, tehát marad 10 további szék. 2 pont

Készítsük el az ültetési rendet úgy, hogy először Anna választ magának helyet, ez lehet 25–féle. Most Anna királynői széke után pozitív körüljárás szerint még további 10 szék és 4 királynői szék következik, ezek lehetséges sorrendjeinek száma $\binom{14}{4}$. 2 pont

A királynői székekre a további négy hölgy $4! = 24$–féleképpen ülhet le, a 20 férfi pedig a maradék székekre 20!–féleképpen. 2 pont

A megfelelő ülésrendek száma ezek szerint $25 \cdot \binom{14}{4} \cdot 4! \cdot 20!$. 1 pont

Összesen 7 pont