Oktatási Hivatal

A 2016/2017. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
harmadik, döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA

Javítási–értékelési útmutató

1. Legyen $H = \{1, 2, ..., n\}$. Megadható-e két, közös elem nélküli A és B halmaz, melyek uniója éppen H úgy, hogy A elemeinek összege egyenlő B elemeinek szorzatával, ha (a) n=2016; (b) $n = 2017$?

Megoldás: Ha a feladatot kisebb n értékekre vizsgáljuk, akkor észrevehetjük, hogy $n > 4$ esetén megadható ilyen A és B halmaz. Például $n = 5$ esetén $3+5 = 1 \cdot 2 \cdot 4$, illetve $n = 6$ esetén $3+4+5 = 1 \cdot 2 \cdot 6$. 1 pont

Ebből észrevehető, hogy páros és páratlan n esetén mi lesz a megfelelő A és B halmaz. Elegendő B-t megadnunk, A ennek komplementere lesz H-ra nézve.

(a) Ha n páros, akkor legyen $n = 2k$ és $B = \{1, k-1, 2k\}$. B elemeinek szorzata $2k^2 - 2k$. A elemeinek összegét megkapjuk, ha az első n pozitív egész összegéből levonjuk a B-be került számokat, azaz

$$\frac{2k(2k+1)}{2} - 1 - (k-1) - 2k = 2k^2 - 2k.$$

B elemeinek szorzata és A elemeinek összege is egyaránt $2k^2 - 2k$. 2 pont

Így a feladat feltételeinek megfelelő két halmaz a

$$B = \{1, 1007, 2016\}, \quad A = \{1, 2, ..., 2016\} \setminus B.$$ 1 pont

(b) Ha n páratlan, akkor legyen $n = 2k+1$ és $B = \{1, k, 2k\}$. B elemeinek szorzata $2k^2$. A elemeinek összegét megkapjuk, ha az első n pozitív egész összegéből levonjuk a B-be került számokat, azaz

$$\frac{(2k+1)(2k+2)}{2} - 1 - k - 2k = 2k^2.$$

B elemeinek szorzata és A elemeinek összege is egyaránt $2k^2$. 2 pont

Így a feladat feltételeinek megfelelő két halmaz a

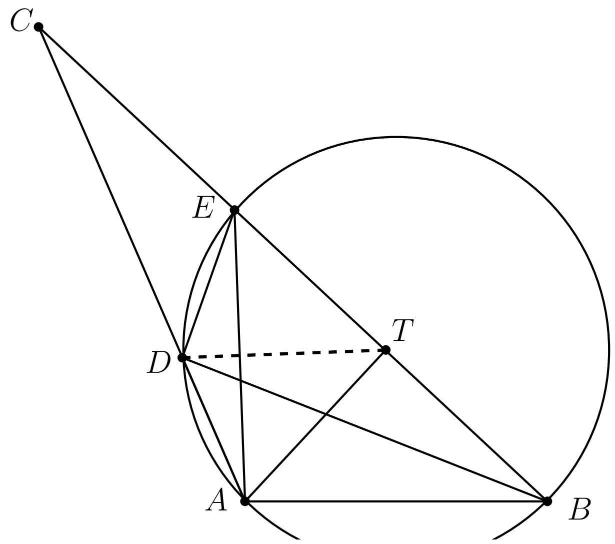
$$B = \{1, 1008, 2016\}, \quad A = \{1, 2, ..., 2017\} \setminus B.$$ 1 pont

Összesen 7 pont

2. Az ABC háromszög A-ból induló magasságának talppontja T, a B-ből induló szögfelező az AC oldalt D-ben metszi. Tudjuk, hogy $BDA\angle = 45°$. Mekkora a $DTC\angle$?

Megoldás: Rajzoljuk meg az AB szakasz 45°-os látókörét. A BC oldal és a látókör metszéspontját jelölje E. Mivel $BDA\angle = 45° = \gamma + \frac{\beta}{2}$, így $\beta < 90°$, tehát az E metszéspont valóban létezik. Mivel $ABD\angle = DBE\angle$, ezért a látókörben hozzájuk tartozó húrok hossza egyenlő, azaz $AD = DE$. 2 pont

Mivel E rajta van a 45°-os látókörön, ezért $AEB\angle = 45°$. Ekkor az ATE háromszögben T-nél derékszög van, E-nél pedig 45°, így ez egyenlőszárú, derékszögű háromszög, $AT = TE$. 2 pont



Azt kaptuk, hogy az $ATED$ négyszögben $AD = DE$ és $AT = TE$, tehát ez egy deltoid, melynek szimmetriatengelye DT. 2 pont

Így DT felezi az $ATC\angle$-et, amiből adódik a feladatban kérdezett $DTC\angle = 45°$. 1 pont

Összesen 7 pont

3. (a) Igazoljuk, hogy n különböző a_i/b_i alakú (de nem feltétlen különböző értékű) racionális számot kiválasztva a $(0; 1)$ intervallumból, a számok nevezőinek összege legalább

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot n^{\frac{3}{2}}.$$

(b) Igazoljuk, hogy ha feltesszük a számokról, hogy különböző értékűek is, akkor a számok nevezőinek összege legalább

$$2\left(\frac{2}{3}n\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Megjegyzés. Az a_i, b_i számok $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ pozitív egészek. Az $\frac{a_i}{b_i}$ és $\frac{a_j}{b_j}$ számok különböző alakúak, ha a számlálójuk, vagy nevezőjük közül legalább az egyik különböző. Az $\frac{a_i}{b_i}$ és $\frac{a_j}{b_j}$ számok különböző értékűek, ha $\frac{a_i}{b_i} \neq \frac{a_j}{b_j}$.

Megoldás: Legyenek a nevezők nagyság szerint növekvő sorrendben a $b_1, ..., b_n$ számok, legyen $s_n = b_1 + ... + b_n$.

A $(0;1)$ intervallumban a legkisebb nevezőjű törtek a nevezők sorrendjében, az azonos nevezőjűeket pedig nagyság szerint írva:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \dots$$

A b_i számok között egy tetszőleges k szám legfeljebb $k-1$-szer szerepelhet. 1 pont

(a) Törekedjünk arra, hogy az s_n a lehető legkisebb legyen, ennek minimumát jelölje S_n és ehhez a lehető legkisebb nevezőket választjuk, a hozzájuk tartozó b_i sorozatot jelölje B_i. A legkisebb S_n-t akkor kapjuk, ha a nevezőket az iménti felsorolás alapján választjuk, azaz $B_1 = 2$, $B_2 = B_3 = 3$, $B_4 = B_5 = B_6 = 4$, ... A további elemekre pedig, azaz $m > 4$ esetén

$$\text{ha} \quad \binom{m-1}{2} < i \leq \binom{m}{2}, \quad \text{akkor} \quad B_i = m.$$

Mivel minden i-re $b_i \geq B_i$, ezért $s_n \geq S_n$. 1 pont

Most megmutatjuk, hogy $B_i \geq \sqrt{2i}$. Az első néhány értékre:

$$B_1 = 2 \geq \sqrt{2}, \quad B_2 = 3 \geq \sqrt{4}, \quad B_3 = 3 \geq \sqrt{6}.$$

A továbbiakban B_i definíciójából adódóan elegendő az $i = \binom{m}{2}$ indexű tagokat vizsgálni, ezekre pedig az állítás igaz, hiszen

$$B_{\binom{m}{2}} = m \geq \sqrt{2 \cdot \binom{m}{2}} = \sqrt{m(m-1)}.$$ 1 pont

A $B_i \geq \sqrt{2i}$ becslést felhasználva $S_n \geq \sqrt{2} + \sqrt{4} + ... + \sqrt{2n} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n})$. A gyökös összeg tekinthető az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $[0;n]$ feletti integráljának egy felső közelítő összegeként, azaz

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n} \geq \int_0^n \sqrt{x} = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^n = \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}.$$ 1 pont

Innen

$$s_n \geq S_n \geq \sqrt{2} \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}) \geq \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot n^{\frac{3}{2}}.$$ 1 pont

(b) Vizsgáljuk meg, mennyivel nő meg az összeg, ha minden racionális szám csak egyszer szerepelhet! Először is feltehetjük, hogy az egyszeri szereplés minden szám esetén az egyszerűsített alakban történik, ezzel a feltételezéssel ugyanis nem növeljük az összeg értékét.

Vegyük észre, hogy ebben az esetben a b nevezőhöz csak olyan számláló tartozhat, ami b-nél kisebb pozitív egész, és relatív prím hozzá. Ha $b = 2k$ páros, akkor $b = 2k$ nevezőjű számból legfeljebb k fordulhat el, hiszen a számláló nem lehet páros. Ha a b nevező páratlan, akkor a b nevezőjű számból legfeljebb $b-1$ fordulhat elő.

A nevezők összegét alulról becsüljük a β_i sorozat összegeként adódó S'_n-nel. A β_i sorozatban minden páratlan t nevező $t-1$-szer, páros t nevező $t/2$-szer fordul elő. Az első néhány értékre:

$$\beta_1 = 2, \quad \beta_2 = \beta_3 = 3 \quad \beta_4 = \beta_5 = 4, \quad \beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = \beta_9 = 5.$$

Észrevehetjük, hogy a legfeljebb $t = 2l + 1$ nevezőjű számok száma, külön összegezve páratlan és páros nevezőkre: $(2 + 4 + \ldots + 2l) + (1 + 2 + \ldots + l) = 3\binom{l+1}{2}$.

Az (a) részben leírtakhoz hasonlóan most $\beta_{3\binom{l+1}{2}} = 2l + 1$, és a sorozat monoton növekedéséből egyúttal $\beta_i \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}i}$ adódik, minden i-re. Most a maximális indexű tagokat meg kell vizsgálnunk külön a páros és külön a páratlan esetekre.

$$\beta_{3\binom{l+1}{2}} = 2l + 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}3\binom{l+1}{2}} = 2\sqrt{(l+1)l}$$

A páratlan esetben az $l + 1$ és l számok számtani és mértani közepének kétszerese közti egyenlőtlenséget kaptuk. A páros esetben

$$\beta_{3\binom{l+1}{2}+(l+1)} = 2l + 2 \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}\left(3\binom{l+1}{2} + (l+1)\right)}$$

Négyzetreemeléssel

$$4l^2 + 8l + 4 \geq 4\left((l+1)l + \frac{2}{3}(l+1)\right),$$

ami minden pozitív l-re teljesül.

Innen összegezve a β_i-re kapott alsó becsléseket megkapjuk az állítást:

$$S'_n \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}) \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} = 2\left(\frac{2}{3}n\right)^{\frac{3}{2}}.$$

2 pont

Összesen 7 pont