A 2016/2017. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Javítási-értékelési útmutató

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, közvetlenül az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 84. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

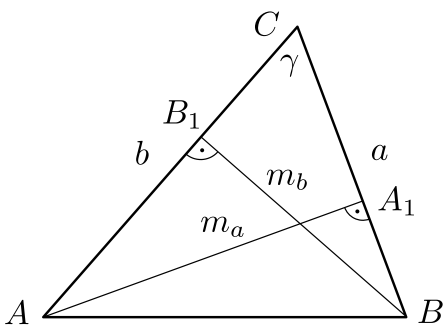
Budapest, 2016. november A versenybizottság

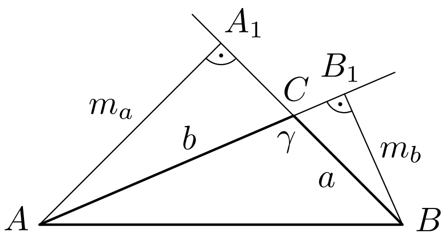
1. feladat

Legyen az ABC háromszögben az A, illetve B csúcsból húzott magasság talppontja A_1, illetve B_1, továbbá $a = BC$, $b = AC$, $m_a = AA_1$, $m_b = BB_1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$CA_1 \cdot CB_1 = ab - m_a m_b \,.$$

Megoldás: Ha a háromszög C csúcsánál levő γ szög derékszög, akkor $A_1 = B_1 = C$, $a = m_a$, $b = m_b$, és az egyenlőség mindkét oldala 0. (1 pont)





Ha $\gamma < 90°$, akkor az AA_1C és BB_1C derékszögű háromszögekből a

$$\begin{aligned} CA_1 &= b\cos\gamma, & m_a &= b\sin\gamma, \\ CB_1 &= a\cos\gamma, & m_b &= a\sin\gamma \end{aligned}$$

képletek olvashatók ki. (3 pont)

Összeszorozva és összeadva

$$CA_1 \cdot CB_1 + m_a m_b = ab\cos^2\gamma + ab\sin^2\gamma = ab$$

következik, ami a bizonyítandó állítással egyenértékű. (2 pont)

Ha $\gamma > 90°$, akkor a fenti derékszögű háromszögekben γ helyett $180° - \gamma$ szerepel, ez CA_1 és CB_1 képletében előjelváltást eredményez. Az összeszorzás után a két előjel kiesik, ezért az eredmény ebben az esetben is helyes. (1 pont)

2. feladat

Ha k pozitív egész szám, jelölje p_k a k-adik prímszámot (tehát $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...). Vannak-e olyan k és n pozitív egész számok, amelyekre $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = 2016^n + 10n - 26$?

Első megoldás: Megmutatjuk, hogy minden pozitív egész n esetén $2016^n + 10n - 26$ osztható 25-tel. (1 pont)

A binomiális tétel alapján

$$2016^n = (2015+1)^n = \binom{n}{n} 2015^n + \binom{n}{n-1} 2015^{n-1} + \ldots + 2015n + 1\,. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ennek az összegnek az utolsó kettő kivételével mindegyik tagja osztható 25-tel, így a 2016^n szám 25-tel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint $2015n + 1$. (1 pont)

A $2015n + 1 + 10n - 26 = 2025n - 25$ szám 25-tel osztható, ezért $2016^n + 10n - 26$ is osztható 25-tel. (2 pont)

A $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ szorzat bármelyik prímtényezője, köztük az 5 tényező is legfeljebb első hatványon szerepelhet, ezért ez a szorzat sohasem osztható 25-tel. Tehát nincsenek olyan k és n pozitív egész számok, amelyekre teljesül a szóban forgó egyenlőség. (2 pont)

Második megoldás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy $2016^n + 10n - 26$ osztható 25-tel. (1 pont)

Az $n = 1$ esetben $2016^1 + 10 - 26 = 2000$ osztható 25-tel. Tegyük fel, hogy valamilyen n-re $25 \mid 2016^n + 10n - 26$. Megmutatjuk, hogy ekkor ugyanez n helyett $(n+1)$-gyel is érvényes:

$$2016^{n+1} + 10(n+1) - 26 = 2016 \cdot (2016^n + 10n - 26) - 20150n + 52400\,. \qquad \text{(3 pont)}$$

Az első tag az indukciós feltevés alapján osztható 25-tel, és a következő két tagban is oszthatók az együtthatók 25-tel. Tehát az oszthatóság $(n+1)$ esetében is teljesül. (1 pont)

Innen az első megoldás utolsó bekezdése szerint fejezzük be a megoldást. (2 pont)

3. feladat
Oldjuk meg a

$$\frac{16}{3}x^4 + \frac{1}{6x^2} = \sin(\pi x)$$

egyenletet a valós számok halmazán.

Első megoldás: Bontsuk két egyenlő részre az $1/(6x^2)$ tagot, és az így kapott három pozitív számra alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{16}{3}x^4 + \frac{1}{6x^2}}{3} = \frac{\frac{16}{3}x^4 + \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{12x^2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{16}{3}x^4 \cdot \frac{1}{12x^2} \cdot \frac{1}{12x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}. \quad \text{(2 pont)}$$

Innen

$$\frac{16}{3}x^4 + \frac{1}{6x^2} \geq 1 \quad \text{(1 pont)}$$

adódik.

Bármely x-re $\sin(\pi x) \leq 1$, ezért az egyenlet két oldala csak úgy lehet egyenlő, ha mindkét oldal 1-gyel egyenlő, (1 pont)
valamint a számtani közép egyenlő a mértani középpel. Ez utóbbi csak akkor állhat fenn, ha egyenlő számokról van szó, azaz

$$\frac{16}{3}x^4 = \frac{1}{12x^2}.$$

Ebből $x^6 = 1/64$, vagyis $x = \pm 1/2$ következik. (2 pont)
Ezeket az értékeket az egyenlet jobb oldalába is behelyettesítve kapjuk, hogy $x = -1/2$ nem megoldása az egyenletnek, míg $x = 1/2$ igen. Tehát $x = 1/2$ az egyenlet egyetlen megoldása. (1 pont)

Második megoldás: Az egyenlet bal oldalán álló $f(x) = (16/3)x^4 + 1/(6x^2)$ függvény minimumát differenciálszámítás segítségével keressük meg. A függvénynek csak ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla: (1 pont)

$$f'(x) = \frac{64}{3}x^3 - \frac{2}{6}x^{-3} = \frac{64x^6 - 1}{3x^3} = 0. \quad \text{(1 pont)}$$

A derivált akkor nulla, ha $64x^6 - 1 = 0$, azaz ha $x = \pm 1/2$. (1 pont)
Ha $0 < x < 1/2$, akkor $f'(x) < 0$, ha pedig $x > 1/2$, akkor $f'(x) > 0$. Ezért a pozitív számokra szorítkozva a függvénynek $x = 1/2$ minimumhelye, és a minimum értéke 1. Az f függvény páros, ezért a negatív számok körében az $x = -1/2$ helyen veszi fel ugyanezt a minimumértéket. Tehát ($x = 0$-ra az egyenlet bal oldala nincs értelmezve, és) $x \neq 0$ esetén

$$\frac{16}{3}x^4 + \frac{1}{6x^2} \geq 1. \quad \text{(2 pont)}$$

Bármely x-re $\sin(\pi x) \leq 1$, ezért az egyenlet két oldala csak úgy lehet egyenlő, ha mindkét oldal 1-gyel egyenlő. Ez a bal oldalon csak $x = \pm 1/2$ esetén lehetséges. (1 pont)

Ezeket az értékeket az egyenlet jobb oldalába behelyettesítve kapjuk, hogy $x = -1/2$ nem megoldása az egyenletnek, míg $x = 1/2$ igen. Tehát $x = 1/2$ az egyenlet egyetlen megoldása. (1 pont)

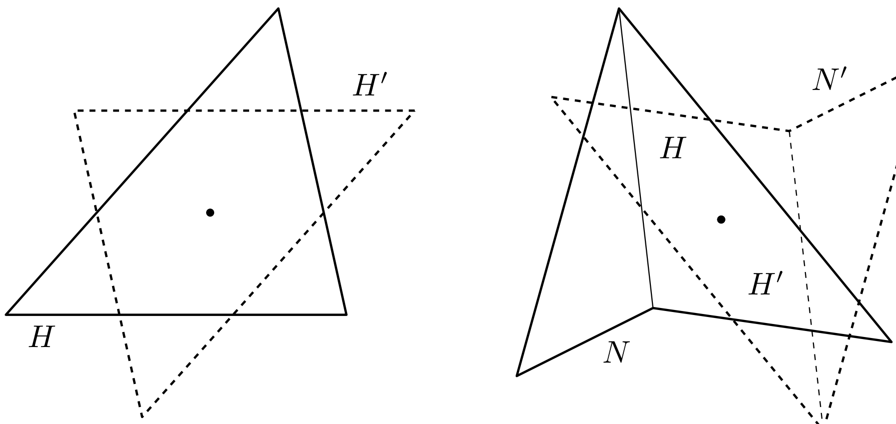
Megjegyzés: A második megoldás középső részében, miután az $x = \pm 1/2$ értékeket mint a deriváltfüggvény zérushelyeit megkaptuk, azt, hogy ezek az f függvénynek valóban minimumhelyei, azzal is lehet indokolni, hogy a pozitív számokra szorítkozva f két konvex függvénynek $\big((16/3)x^4$-nek és $1/(6x^2)$-nek$\big)$ az összege, tehát maga is konvex függvény.

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely adott (nem feltétlenül konvex) négyszöghöz található olyan pont, hogy a négyszögnek erre a pontra vonatkozó középpontos tükörképe az eredeti négyszög területének legalább a harmadrészét lefedi.

Megoldás: Tekintsünk először egy H háromszöget, és állítsuk elő a súlypontjára mint középpontra vonatkozó középpontos tükörképét, a H' háromszöget. (2 pont)

Mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalakat, és középpontos tükrözésnél bármely egyenes vele párhuzamos egyenesbe megy át, a H' háromszög oldalai H-ból három darab, H-val $1:3$ arányban hasonló részháromszöget vágnak le. Ezért a H és H' közös részeként keletkező hatszög a H háromszög területének $1-3\cdot(1/3)^2 = 2/3$ részét foglalja el. (2 pont)



Az adott N négyszögnek legalább az egyik átlója a négyszögben halad. Vágjuk ketté a négyszöget egy ilyen átlóval, és legyen H a keletkező két részháromszög közül a nagyobb területű (egyenlő területek esetén bármelyik). Ha a tükrözés középpontjául H súlypontját választjuk, akkor a fentiek alapján H-nak a H' tükörkép által lefedett része N területének legalább $(2/3)\cdot(1/2) = 1/3$ része. Viszont $H \subset N$ és $H' \subset N'$ miatt N-nek az N' által lefedett része sem lehet ennél kisebb. (3 pont)

Megjegyzés: A megoldásból látszik, hogy a feladatban megkövetelt egyenlőtlenségnél kicsivel több is igaz: a négyszög területének határozottan több mint harmadát fedi le a tükörképe. Megmutatható viszont, hogy az 1/3 arány helyett nagyobb számmal már nem volna igaz a feladat állítása: bármely $c > 1/3$ számhoz található olyan négyszög, amelynek akármilyen pontra vonatkozó középpontos tükörképe a területének kevesebb mint c-szeresét fedi le.

5. feladat
Tegyük fel, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ független események valószínűsége legfeljebb 1/2. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy közülük pontosan egy következik be, szintén legfeljebb 1/2.

Első megoldás: Teljes indukcióval bizonyítunk. Az $n = 1$ eset nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy $n-1$ esemény esetén igaz az állítás, és $A_1, \ldots, A_{n-1}$ közül pontosan egy bekövetkezésének a valószínűsége $1/2 - c$, ahol $c \geq 0$. Legyen továbbá az A_n esemény valószínűsége $1/2 - d$, ahol a feltétel szerint $d \geq 0$. (2 pont)

Ha az $A_1, \ldots, A_n$ közül az egyetlen bekövetkező esemény $A_1, \ldots, A_{n-1}$ valamelyike, akkor ennek a valószínűsége $(1/2 - c)(1/2 + d)$. (1 pont)

Ha a pontosan egy bekövetkező esemény az A_n, akkor ennek a valószínűsége legfeljebb $(1/2 + c)(1/2 - d)$, hiszen az, hogy $A_1, \ldots, A_{n-1}$ közül egyik sem következett be, része azon esemény komplementerének, hogy közülük pontosan egy következett be. (2 pont)

Így annak a valószínűsége, hogy $A_1, \ldots, A_n$ közül pontosan egy következik be, legfeljebb $(1/2 - c)(1/2 + d) + (1/2 + c)(1/2 - d) = 1/2 - 2cd \leq 1/2$. (2 pont)

Második megoldás: Legyen A_i valószínűsége p_i, továbbá $q_i = 1 - p_i$. Ekkor a $p_i \leq 1/2$ feltétel egyenértékű azzal, hogy $p_i \leq q_i$. Annak valószínűsége, hogy az események közül pontosan egy következik be, a függetlenség miatt

$$S = p_1 q_2 q_3 \ldots q_n + q_1 p_2 q_3 \ldots q_n + \ldots + q_1 q_2 \ldots q_{n-1} p_n \,. \qquad \text{(2 pont)}$$

A feltétel szerint $(q_1 - p_1) \ldots (q_n - p_n) \geq 0$. Végezzük el a beszorzást. Az eredményben 2^n tag szerepel, mindegyik egy n-tényezős szorzat, amelynek az i-edik tényezője p_i vagy q_i, és e szorzat előjele pozitív, ha a szorzatban páros sok p_i szerepel, különben negatív. Legyen P a pozitív, N a negatív előjellel szereplő tagok abszolút értékének összege. Ekkor a szorzat értéke $P - N \geq 0$, azaz $P \geq N$. (2 pont)

A fenti S részösszege N-nek, hiszen S mindegyik tagjában egy darab p_i szerepel. A tagok mind nemnegatívak, ezért $S \leq N$. (1 pont)

Végül $p_i + q_i = 1$ minden i-re, ezért ezek szorzata is 1. A szorzatot kibontva $P + N$ adódik, tehát $P + N = 1$, vagyis $P \geq N$ miatt $N \leq 1/2$. Így $S \leq N \leq 1/2$. (2 pont)

Harmadik megoldás: Legyen A_i valószínűsége p_i, és legyen $q_i = 1 - p_i$. A $p_i \leq 1/2$ feltétel egyenértékű azzal, hogy $q_i \geq 1/2$. Annak a valószínűsége, hogy csak az i-edik esemény következik be, $q_1 q_2 \ldots q_{i-1}(1 - q_i) q_{i+1} \ldots q_n$. A bizonyítandó állítás így a

$$q_1 q_2 \ldots q_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - q_i}{q_i} \;\leq\; 1/2 \qquad (*)$$

alakban írható. (2 pont)

Tegyük fel indirekt módon, hogy az állítás hamis, és vegyünk egy olyan ellenpéldát, amelynél az események n száma minimális.

Először megmutatjuk, hogy olyan ellenpélda is létezik (minimális n mellett), amelyben legfeljebb egy q_i különbözik 1/2-től. Tegyük fel, hogy a q_i számok közül kettőnek az értéke is nagyobb, mint $1/2$, a szimmetria miatt feltehető, hogy ezek q_1 és q_2. Változtatni fogunk q_1 és q_2 értékén oly módon, hogy a $q_1 q_2$ szorzat értéke változatlan maradjon. Ekkor a $(*)$ bal oldalán szereplő $q_1 q_2 \dots q_n$ (pozitív) szorzat változatlan, és az összegnek is csak két tagja változik. Ezek összege

$$\frac{1-q_1}{q_1} + \frac{1-q_2}{q_2} = \frac{(q_1+q_2) - 2q_1q_2}{q_1q_2}\,.$$

Ismert, hogy ha két pozitív szám szorzata rögzített, akkor összegük annál nagyobb, minél nagyobb a különbségük. (Ez a $q_1 + q_2 = \sqrt{(q_1-q_2)^2 + 4q_1q_2}$ azonosságból azonnal leolvasható.) Így, ha q_1 és q_2 értékén úgy változtatunk, hogy szorzatuk változatlan maradjon, de a különbségük nagyobb legyen, ezzel a $(*)$ bal oldalán látható kifejezés értékét növeljük (és továbbra is ellenpéldát kapunk). (3 pont)

Ha $1/2 \le q_1q_2$ lenne, akkor ily módon a q_1, q_2 párt a $q_1' = q_1q_2$ és $q_2' = 1$ számokból álló párra cserélhetjük, ekkor azonban $(*)$-ban $q_2' = 1$-et elhagyva a bal oldal értéke nem változik, és n helyett $n-1$ számmal kapnánk ellenpéldát, azonban ez n minimalitása miatt nem lehetséges. Vagyis csak $1/2 > q_1q_2$ lehet, és a q_1, q_2 párt $q_1' = 1/2$-re és $q_2' = 2q_1q_2$-re cserélhetjük. Ennek a lépésnek az ismételgetésével elérhető, hogy a q_i számok mindegyike, legfeljebb egy kivételével $1/2$ legyen, és továbbra is ellenpéldát kapjunk.

Legyen α annak a q_i-nek az értéke, amelyik esetleg nem $1/2$ (de $\alpha = 1/2$-et is megengedjük). Ekkor a $(*)$ bal oldalán lévő kifejezés értékére az

$$\frac{\alpha}{2^{n-1}}\left(n - 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \le \frac{(n-2)\alpha + 1}{2^{n-1}} \tag{$**$}$$

felső korlátot kapjuk. Ha $n = 1$, akkor $\alpha \ge 1/2$ miatt ez a felső korlát legfeljebb $1/2$. Ha $n \ge 2$, akkor $(**)$ jobb oldala legfeljebb $(n-1)/2^{n-1}$-nel egyenlő. Ez $n = 2$ esetén éppen egyenlő $1/2$-del, ha pedig n értékét tovább növeljük, minden lépésben a számláló legfeljebb a 2-szeresére nő, a nevező pedig pontosan a 2-szeresére, tehát a hányados továbbra is legfeljebb $1/2$ marad. Így semmilyen n-re nem létezik ellenpélda $(*)$-ra, amivel az állítást igazoltuk. (2 pont)