



A 2016/2017. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Javítási-értékelési útmutató

1. feladat

Az a_0, a_1, \dots, a_{10} egész számok összege 11. Maximálisan hány egész megoldása lehet az x ismeretlenre felírt

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10} = 1$$

egyenletnek?

Megoldás: Legyen $f(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_1x + a_0 - 1$, ekkor f egymástól különböző egész gyökeinek a maximális számát keressük. (1 pont)

Ha ezek a különböző egész gyökök c_1, \dots, c_k , akkor a polinom felírható $f(x) = (x - c_1) \dots (x - c_k)g(x)$ alakban, ahol g is egész együtthatós. (2 pont)

A feltétel szerint

$$f(1) = a_{10} + a_9 + \dots + a_1 + a_0 - 1 = 10 = (1 - c_1)(1 - c_2) \dots (1 - c_k)g(1), \quad (2 \text{ pont})$$

tehát a 10 előáll $k + 1$ egész szám szorzataként, amelyek közül az első k biztosan mind különböző. (1 pont)

A számelmélet alaptétele miatt a 10-et előállító szorzatban az 1-nél nagyobb abszolút értékű tényezők száma legfeljebb kettő lehet. Az első k tényező között 1 és -1 mindegyike legfeljebb egyszer fordulhat elő, tehát csak $k \leq 4$ lehetséges. (2 pont)

A $k = 4$ meg is valósulhat, legyen pl. $c_1 = 0, c_2 = 2, c_3 = 3, c_4 = -4$ és g a konstans 1 polinom. Ekkor

$$f(x) = x(x - 2)(x - 3)(x + 4) = x^4 - x^3 - 14x^2 + 24x,$$

azaz $a_0 = 1, a_1 = 24, a_2 = -14, a_3 = -1, a_4 = 1$ és $a_5 = a_6 = \dots = a_{10} = 0$. (2 pont)

(Összesen 10 pont)

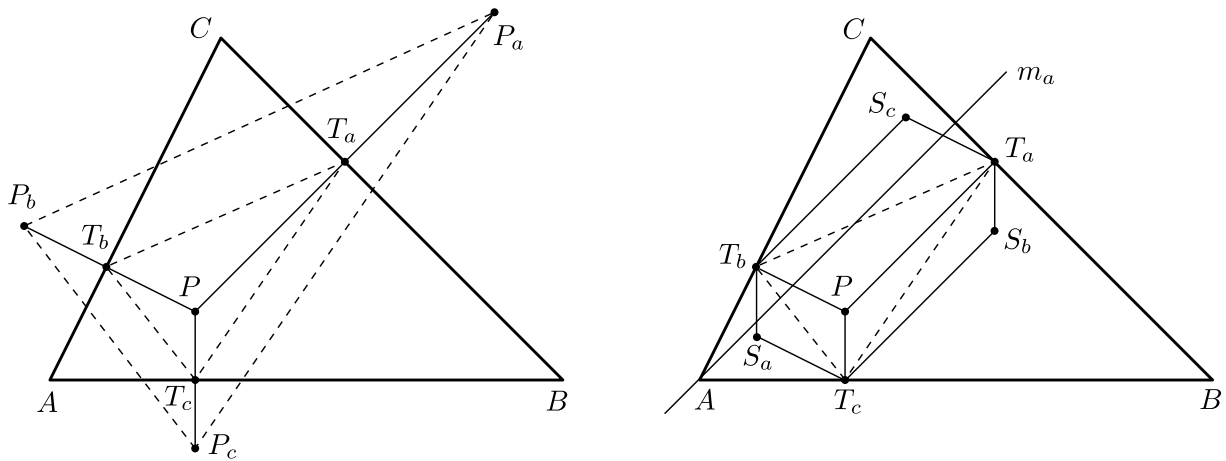
2. feladat

Egy rögzített hegyesszögű háromszög tetszőlegesen kiszemelt P belső pontját tükrözzük mindhárom oldalegyenesre. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan pont van, amely P bármely választása esetén benne van a P pont tükörképei mint csúcsok által kifeszített háromszögben.

Megoldás: Legyenek A, B, C a háromszög csúcsai, jelölje a, b, c rendre a velük szemközti oldalegyeneseket, valamint P_a, P_b, P_c a P pontnak ezekre az egyenesekre vonatkozó tükörképeit.

Először belátjuk, hogy bárhol vettük is fel a P pontot az ABC háromszög belsejében, a $P_aP_bP_c$ háromszög tartalmazza az ABC háromszög M magasságpontját. (1 pont)

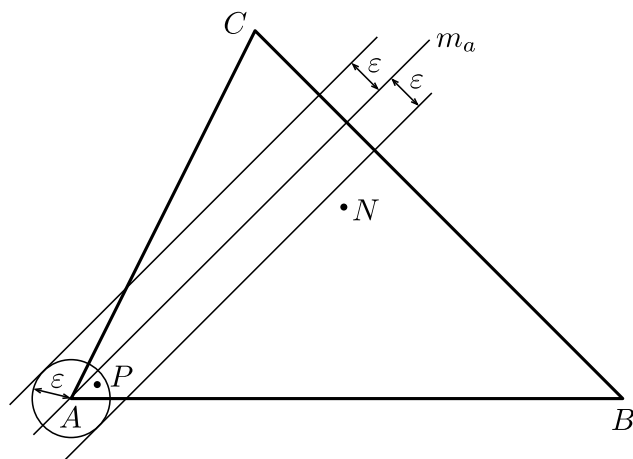
Legyen T_a, T_b és T_c a P pont merőleges vetülete rendre az a, b , illetve c oldalegyenesen. Ezek a pontok belső pontok az ABC háromszög oldalszakaszain, mert a háromszög hegyesszögű. A $T_aT_bT_c$ háromszög a P pontot a belsejében tartalmazza, és P középpontú kétszeres nagyítás viszi a $P_aP_bP_c$ háromszögbe.



Tükrözzük a P pontot középpontosan a T_bT_c, T_cT_a, T_aT_b szakaszok felezőpontjára, így rendre az S_a, S_b, S_c pontokat kapjuk. Ezek a pontok éppen a P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b szakaszok felezőpontjai, ezért a $T_aS_cT_bS_aT_cS_b$ hatszöget lefedi a $P_aP_bP_c$ háromszög. Elég tehát megmutatnunk, hogy az M magasságpont ebben a hatszögben helyezkedik el. Látható, hogy a hatszög szemközti oldalai párhuzamosak egymással, és merőlegesek az ABC háromszög egy-egy oldalára, vagyis a háromszög egy-egy magasságvonálával párhuzamosak.

Tekintsük az ABC háromszög egyik magasságegyenesét, például az A csúcson áthaladó m_a egyenest. Mivel a háromszög hegyesszögű, a B és C csúcsok, és így a T_c és T_b pontok is az m_a egyenes két különböző félsíkjában fekszenek. Húzzunk m_a -val párhuzamos egyeneseket T_c -n és T_b -n keresztül, ekkor tehát az A -ból induló magasságvonaltól, és így az M magasságpont is az e két egyenes által határolt sávba esik. Ugyanez elmondható a másik két magasságegyenesről is, ezért az M pont mindhárom ilyen módon származtatott sávban benne van. Ezeknek a sávoknak a közös része éppen a $T_aS_cT_bS_aT_cS_b$ hatszög, amely tehát valóban lefedi az M pontot. (6 pont)

Most megmutatjuk, hogy ha N az ABC háromszög síkjának M -től különböző pontja, akkor megválasztható a P pont az ABC háromszög belsejében úgy, hogy a $P_aP_bP_c$ háromszög nem fedi le N -et.



A háromszögnek biztosan van olyan magasságegyenese, amelyre az N pont nem illeszkedik, és az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy az A -n áthaladó m_a egyenes ilyen. Válasszuk az $\varepsilon > 0$ számot az N pontnak az m_a egyenestől mért távolságánál kisebbre, és válasszunk egy P pontot az ABC háromszög belsejében az A csúchhoz ε -nál közelebb. A P_b és P_c tükörképek egy-egy A -n áthaladó egyenesre való tükrözéssel származnak a P pontból, így A -tól ugyanakkora távolságban maradnak, mint P . Ezért az m_a egyenestől mért távolságuk is ε -nál kisebb. A P_a tükörkép pedig m_a és a merőlegessége folytán ugyanolyan távol marad az m_a egyenestől, mint P , ezért ez a távolság is kisebb, mint ε . Az egész $P_aP_bP_c$ háromszög tehát benne fekszik az m_a egyenes körüli 2ε szélességű sávban, és így nem tartalmazhatja az ezen a sávon kívül fekvő N pontot. (3 pont)

(Összesen 10 pont)

3. feladat

Mutassuk meg, hogy minden $k > 1$ egész számhoz van olyan k^2 -nél kisebb m pozitív egész, amelyre $2^m - m$ osztható k -val.

Első megoldás: Legyen $t > 1$ páratlan szám. Felhasználjuk, hogy a 2 hatványainak modulo t vett maradékai egy alkalmas o_t hosszúságú periódus szerint ismétlődnek, azaz $2^a - 2^b$ akkor és csak akkor osztható t -vel, ha $a - b$ osztható o_t -vel, továbbá hogy $o_t < t$. Ennek a bizonyítása a megoldás végén olvasható. (1 pont)

Legyen a_n az iterált 2-hatványok sorozata, vagyis $a_0 = 1$ és $n \geq 0$ esetén $a_{n+1} = 2^{a_n}$. A $2^n \geq n + 1$ egyenlőtlenségből következik, hogy $a_{n+1} = 2^{a_n} \geq a_n + 1$, ahonnan n szerinti indukcióval világos, hogy $a_n \geq n + 1$. Ezért $a_{n+1} = 2^{a_n}$ osztható 2^{n+1} -nel minden $n \geq 0$ egészre. (2 pont)

Segédállításként megmutatjuk, hogy $1 \leq r \leq n$ esetén r osztója $a_{n+1} - a_n$ -nek. Ez teljesül $n = 1$ -re, tegyük fel hogy igaz $n - 1$ -re. Írjuk az $1 \leq r \leq n$ számot $r = 2^s t$ alakban, ahol t páratlan. Ekkor 2^s osztója a_n -nek és a_{n+1} -nek is, hiszen ezek 2^n -nel is oszthatók, és $2^s \leq r \leq n \leq 2^n$. Ezért elég belátni, hogy $t \mid a_{n+1} - a_n$. Ez nyilvánvaló ha $t = 1$, egyébként pedig $o_t < t \leq r \leq n$, ezért $o_t \leq n - 1$, és így az indukciós feltevés miatt $o_t \mid a_n - a_{n-1}$. A periodicitás azt jelenti, hogy $t \mid 2^{a_n} - 2^{a_{n-1}} = a_{n+1} - a_n$, ami a segédállítást igazolja. (3 pont)

Most rátérünk a feladat állításának igazolására. Ha $k = 2^s$, ahol $s \geq 1$, akkor $m = k$ nyilván megfelelő, hiszen $k = 2^s \geq s$ miatt $k = 2^s \mid 2^k$. Legyen $k = 2^s t$, ahol $t > 1$

páratlan szám. A segédállítás szerint $k \mid a_{k+1} - a_k = 2^{a_k} - a_k$. Legyen m az a_k maradéka ko_t -vel osztva. Belátjuk, hogy az így kapott m szám megfelel a feladat feltételeinek. Nem lehet $m = 0$, mert akkor $ko_t \mid a_k$ miatt k is 2-hatvány lenne. Nyilván $m < ko_t < kt \leq k^2$. Mivel

$$(2^{a_k} - a_k) - (2^m - m) = (2^{a_k} - 2^m) - (a_k - m),$$

elég igazolni, hogy a jobb oldalon mindkét különbség osztható k -val. Az m választása miatt $k \mid a_k - m$ és $o_t \mid a_k - m$, ahonnan a periodicitás miatt $t \mid 2^{a_k} - 2^m$ következik. Végül $a_{k-1} \geq k \geq 2^s$, ezért $a_k = 2^{a_{k-1}}$ és 2^{a_k} osztható 2^s -sel. Így $k \mid a_k - m$ miatt $2^s \mid m$. Tehát $2^s \mid 2^{a_k} - 2^m$. (4 pont)

A periodicitás bizonyítása:

A modulo t vett maradékokból összesen csak t -féle lehetséges, van tehát két különböző kettőhatvány, $2^a > 2^b$, amelyekre $t \mid 2^a - 2^b$. Mivel t páratlan, $2^a - 2^b = (2^{a-b} - 1)2^b$ akkor és csak akkor osztható t -vel, ha t osztója $2^{a-b} - 1$ -nek is. Ezért a 2 pozitív kitevőjű hatványai előbb-utóbb 1-et adnak t -vel osztva maradékul. Az o_t szám a legkisebb ilyen pozitív kitevő lesz. Ha $t = 1$, akkor $o_t = 1$. Ha $t > 1$, akkor a periódusban a 0 maradék nem lehet benne, ezért $o_t < t$.

(Összesen 10 pont)

Második megoldás: Legyen $k = 2^s t$, ahol $s \geq 0$ és t páratlan. Keressük m -et $m = 2^s M$ alakban. Ekkor $2^s \mid 2^m - m = 2^{2^s M} - 2^s M$ biztosan teljesül, így $k \mid 2^m - m$ pontosan akkor áll fenn, ha $t \mid 2^m - m = 2^{2^s M} - 2^s M$. (1 pont)

A t (páratlan) számra vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy létezik ilyen M , amelyre $t > 1$ esetén $M < t^2$ is teljesül. (1 pont)

Ha $t = 1$, akkor $M = 1$ megfelelő. Most tegyük fel, hogy $t > 1$ páratlan, és a t -nél kisebb páratlan számokra már igazoltuk megfelelő M létezését. Legyen N nemnegatív egész szám, és próbáljunk meg olyan M -et találni, amelyre a

$$2^{2^s M} \equiv 2^{2^s N} \pmod{t} \quad (1)$$

$$2^s M \equiv 2^{2^s N} \pmod{t} \quad (2)$$

kongruenciák egyaránt teljesülnek. (2 pont)

Mivel t páratlan szám, az Euler–Fermat-tétel szerint $2^{\varphi(t)} \equiv 1 \pmod{t}$, és így

$$M \equiv N \pmod{\varphi(t)} \quad (1')$$

esetén az (1) kongruencia biztosan teljesül. (1 pont)

A (2) kongruencia pedig nyilván ekvivalens az

$$M \equiv 2^{2^s N - s} \pmod{t} \quad (2')$$

kongruenciával. Az (1')-(2') kongruenciarendszernek pontosan akkor létezik megoldása¹,

¹ Freud–Gyarmati: Számelmélet 2.6.1 Tétel szerint az

$$x \equiv c_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv c_2 \pmod{m_2}$$

kongruenciarendszer pontosan akkor oldható meg, ha $(m_1, m_2) \mid c_1 - c_2$.

ha $(t, \varphi(t)) \mid 2^{2^s N - s} - N$, ami t páratlansága miatt ekvivalens a

$$2^{2^s N} \equiv 2^s N \pmod{(t, \varphi(t))}$$

kongruenciával.

(2 pont)

Mivel $(t, \varphi(t))$ egy t -nél kisebb páratlan szám, ezért az indukciós feltevés alapján létezik ilyen N . Ilyen N választása mellett az (1')-(2') kongruenciarendszernek van megoldása, és mivel a kongruenciák teljesülését az M szám modulo $[t, \varphi(t)]$ vett maradéka meghatározza, ezért választhatunk olyan $M \leq [t, \varphi(t)] \leq t\varphi(t) < t^2$ pozitív egész számot, amelyre teljesül (1') és (2'), így következésképpen (1) és (2) is. Ezzel az állításunkat igazoltuk.

Ha $t > 1$, akkor az így kapott m -re $k \mid 2^m - m$ és $m = 2^s M < 2^s t^2 \leq k^2$ is teljesül. Ha $t = 1$, de $s > 0$, akkor $m = 2^s < 2^{2^s} = k^2$.

(3 pont)

(Összesen 10 pont)