Oktatási Hivatal

A 2017/2018. tanévi

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Adja meg az összes olyan négyjegyű pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy az első három jegyéből alkotott háromjegyű szám kétszer akkora, mint az utolsó három jegyéből alkotott háromjegyű szám.

Megoldás:
Legyen a keresett négyjegyű szám $\overline{abcd}$, amelyet felírhatunk

$$\overline{abcd} = 1000a + 10\overline{bc} + d$$

alakban is.
A feltételek miatt $a \neq 0$ és $b \neq 0$, ezért $\overline{bc}$ kétjegyű szám. 1 pont

A $\overline{bc}$ kétjegyű szám segítségével felírhatók az $\overline{abc}$ és $\overline{bcd}$ háromjegyű számok is:

(1) $\overline{abc} = 100a + \overline{bc}$; $\overline{bcd} = 10\overline{bc} + d$. 1 pont

A feladat feltétele és (1) szerint

$$100a + \overline{bc} = 2 \cdot \left(10\overline{bc} + d\right),$$

ahonnan a műveletek elvégzésével és rendezéssel

(2) $$100a - 2d = 19\overline{bc}.$$

Ez azt jelenti, hogy a kétjegyű $\overline{bc}$ szám páros, ezért (2) jobb oldala a 19 szám páros többszöröse.

Vizsgáljuk a (2) egyenletet az a és d számjegyek lehetséges értékei szerint. 2 pont

Ha $a = 1$, akkor $100a - 2d$ értéke a $[82; 100]$ intervallumba eső valamelyik páros egész szám, hiszen a lehetséges legnagyobb d számjegy, azaz $d = 9$ mellett $100a - 2d = 82$, míg a legkisebb d számjegy, vagyis $d = 0$ esetén $100a - 2d = 100$.

Ugyanakkor a $[82; 100]$ intervallumban a 19-nek egyetlen többszöröse van, mégpedig $95 = 19 \cdot 5$, de ez nem páros szám, továbbá ez esetben $\overline{bc}$ nem kétjegyű. Ezért $a = 1$ nem lehetséges. 1 pont

Hasonlóképpen vizsgálhatjuk, hogy

$$a = 2; 3; 4; \ldots; 8; 9$$

esetén a 19-nek mely páros többszörösei vannak a

$$[100a - 18; 100a]$$

intervallumban.

Számolási eredményeinket táblázatba is foglalhatjuk:

a	$[100a - 18; 100a]$	$\overline{bc}$	d	$\overline{abcd}$
1	$[82; 100]$	5	----	----
2	$[182; 200]$	10	5	2105
3	$[282; 300]$	15	----	----
4	$[382; 400]$	21	----	----
5	$[482; 500]$	26	3	5263
6	$[582; 600]$	31	----	----
7	$[682; 700]$	36	8	7368
8	$[782; 800]$	42	1	8421
9	$[882; 900]$	47	----	----

4 pont

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk és azt kaptuk, hogy a feladat feltételeinek négy darab négyjegyű pozitív egész szám felel meg:

$$2105; 5263; 7368; 8421 .$$

Ezek a számok valóban megfelelők, mert

$$210 = 2 \cdot 105; 526 = 2 \cdot 263; 736 = 2 \cdot 368; 842 = 2 \cdot 421 .$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Határozza meg az $(x^2 + (m-2) \cdot x - 2m) \cdot (-x^2 + (2m+1) \cdot x - 2m) \geq 0$ egyenlőtlenség egész megoldásainak számát az m pozitív egész szám függvényében.

Megoldás:
A feladat megoldását két eset vizsgálatára bontjuk.
Első eset: az egyenlőtlenség fennáll, ha az

(1) $$x^2 + (m-2) \cdot x - 2m \geq 0$$

(2) $$-x^2 + (2m+1) \cdot x - 2m \geq 0$$

egyenlőtlenségek mindegyike teljesül. 1 pont

Az (1) egyenlőtlenség bal oldalán szereplő másodfokú kifejezés diszkriminánsa:

$$(m-2)^2 - 4 \cdot (-2m) = (m+2)^2,$$

a (2) egyenlőtlenség bal oldalán levő másodfokú kifejezés diszkriminánsa pedig

$$(2m+1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2m) = (2m-1)^2.$$ 1 pont

Ez azt is jelenti, hogy mindkét másodfokú kifejezésnek vannak zérushelyei, mégpedig

$$x_{11} = -m \text{ és } x_{12} = 2$$

illetve

$$x_{21} = 1 \text{ és } x_{22} = 2m\,.$$ 1 pont

Az (1) és (2) egyenlőtlenségek megoldásainak halmazát rendre M_1; M_2-vel jelölve és felhasználva, hogy $-m < 0$:

$$M_1 =]-\infty; -m] \cup [2;\ \infty[\quad \text{és} \quad M_2 = [1; 2m]\,.$$ 1 pont

Az eredeti egyenlőtlenség megoldásai egyrészt az

$$x = -m; \quad x = 1$$

egész számok, hiszen ezekre az (1), illetve (2) egyenlőtlenségek bal oldala zérus, tehát a szorzatuk is nulla, és így az eredeti egyenlőtlenség fennáll.
Másrészt az első esetben megoldások az

$$M_1 \cap M_2 = [2; 2m]$$

halmazba tartozó egészek, ezekből pontosan $2m - 1$ darab van.

Így az első esetnek összesen

$$2m + 1$$

egész szám felel meg. 1 pont

Második eset: a feladat egyenlőtlensége akkor is teljesül, ha

(3) $$x^2 + (m-2) \cdot x - 2m \leq 0$$

és

(4) $$-x^2 + (2m+1) \cdot x - 2m \leq 0$$

egyszerre igaz. 1 pont

A (3) és (4) egyenlőtlenségek bal oldalán látható másodfokú kifejezések zérushelyeit már ismerjük, ezért (3) és (4) megoldásait rendre $M_3;\ M_4$-gyel jelölve:

$$M_3 = [-m; 2] \qquad M_4 =]-\infty; 1] \cup [2m;\ \infty[\,.$$ 1 pont

A (3) és (4) egyenlőtlenségek közös megoldásai az

$$M_3 \cap M_4 = [-m; 1]$$ 1 pont

halmazba tartoznak, ebben a halmazban pontosan

$$m + 2$$

darab egész szám van.

Ugyanakkor ebből az $m + 2$ egész számból az $x = -m;\ x = 1$ megoldásokat az első esetben már figyelembe vettük.
Ezért a második esetben összesen m darab olyan megoldás van, amely az előzőben nem szerepelt. 1 pont

A két lehetséges esetet megvizsgáltuk és azt kaptuk, hogy ha m pozitív egész szám, akkor az

$$(x^2 + (m-2) \cdot x - 2m) \cdot (-x^2 + (2m+1) \cdot x - 2m) \geq 0$$

egyenlőtlenségnek

$$2m + 1 + m = 3m + 1$$

darab egész megoldása van. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

a) Ha $m = 1$, akkor az $x = 2$ és az $x = 2m$ számok azonosak, de a feladatnak ekkor is $3m + 1$, azaz 4 darab megoldása van, mégpedig az
$$x = -1; \quad x = 0; \quad x = 1; \quad x = 2$$
egész számok.

b) Ha a versenyző az $m = 1; 2; 3; \ldots$ értékekre megvizsgál egy-egy esetet és abban helyes következtetésre jut, de más érdemi megállapítást nem tesz, akkor erre 1 pontot kapjon.

3. Oldja meg a valós számpárok halmazán az

$$log_{\frac{x}{y}}(x^2y+xy^2)=log_{\frac{y}{x}}(2x)\ ;$$
$$x+y=\frac{1}{2xy}$$

egyenletekből álló egyenletrendszert.

Megoldás:

Az első egyenlet mindkét oldalának numerusza a logaritmus értelmezése miatt pozitív, ezért x csak pozitív szám lehet.
A logaritmus alapszáma pozitív, ezért

$$\frac{y}{x}>0\ ,$$

ezzel teljesül, hogy a bal oldal logaritmusos kifejezésének alapszáma is pozitív.
Ez azt jelenti, hogy y is pozitív szám.
Ilyen feltételek mellett az egyenletrendszer második egyenletének jobb oldala is értelmezett.
Ugyanakkor a logaritmus alapszáma 1 nem lehet, ezért $x\neq y$. 1 pont

Az első egyenlet jobb oldalát írjuk át

$$\frac{x}{y}$$

alapú logaritmusra:

$$log_{\frac{y}{x}}(2x)=\frac{log_{\frac{x}{y}}(2x)}{log_{\frac{x}{y}}\left(\frac{y}{x}\right)}\ ,$$

ahonnan

$$log_{\frac{x}{y}}\left(\frac{y}{x}\right)=-1$$

szerint az első egyenlet

$$log_{\frac{x}{y}}(x^2y+xy^2)+log_{\frac{x}{y}}(2x)=0$$

alakba írható. 1 pont

Az azonos alapú logaritmusos kifejezések összegére vonatkozó műveleti azonosság alapján

$$log_{\frac{x}{y}}[(x^2y+xy^2)\cdot 2x]=0\ .$$ 1 pont

A kapott egyenlet numeruszának szorzattá alakításával pedig

(1) $$log_{\frac{x}{y}}[xy\cdot(x+y)\cdot 2x]=0\ .$$

Az egyenletrendszer második egyenletét felhasználva azt kapjuk, hogy $(x+y)\cdot 2xy=1$, ez pedig azt jelenti, hogy felírható az (1) egyenlettel ekvivalens

(2) $$log_{\frac{x}{y}}(x)=0\ .$$

egyenlet. 2 pont

A logaritmus definíciója szerint a (2) egyenletből az következik, hogy

$$\left(\frac{x}{y}\right)^0 = x\,,$$

ez pedig az

$$\frac{x}{y} > 0$$

feltétel alapján azt jelenti, hogy

$$x = 1\,.$$ 1 pont

A kapott eredményt behelyettesítve az egyenletrendszer második egyenletébe:

$$1 + y = \frac{1}{2y}\,,$$

ahonnan ekvivalens átalakításokkal a

(3) $$2y^2 + 2y - 1 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. 1 pont

A (3) egyenlet megoldásai

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2};\; y_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\,.$$

Az y_2 megoldás negatív, ezért nem felel meg a feladat feltételének. 1 pont

Az egyenletrendszer megoldása tehát egyetlen számpár, ez pedig

$$x = 1;\; y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\,.$$ 1 pont

Átalakításaink a feltételek által meghatározott számhalmazokon ekvivalensek voltak, ezért a kapott számok az eredeti egyenletrendszer mindkét egyenletét kielégítik. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

a) Az egyenletrendszer első egyenletének mindkét oldalát tetszőleges $a > 0; a \neq 1$ alapú logaritmusos kifejezéssé alakíthatjuk. Az átalakítással az $log_a[xy \cdot (x+y) \cdot 2x] = log_a 1$ egyenletet felírva az $xy \cdot (x+y) \cdot 2x = 1$ egyenletet kapjuk, amelyből az egyenletrendszer második egyenletét figyelembe véve $x = 1$ adódik.

b) Alkalmazhatjuk az első egyenletben az

$$xy \cdot (x+y) = \frac{1}{2}$$

helyettesítést, ekkor

$$log_{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{2}\right) = -log_{\frac{y}{x}}\left(\frac{1}{2}\right) = log_{\frac{y}{x}}(2x)$$

alapján és

$$log_{\frac{y}{x}}\left(2x \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$$

szerint $x = 1$.

4. Az ABC háromszög α szögére teljesül, hogy $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = 1$.
Mekkora háromszög legnagyobb szöge?

1. Megoldás:

Mivel α egy háromszög szöge, ezért teljesülnie kell a

$$0 < \sin\alpha \le 1\,,$$

és

$$-1 < \cos\alpha < 1$$

feltételeknek. 2 pont

Felhasználjuk a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ trigonometrikus azonosságot, ezzel a megadott egyenlet a

$$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$ 2 pont

alakba írható, ahonnan átrendezéssel és kiemeléssel azt kapjuk, hogy

(1) $$\sin^2\alpha \cdot (\sin\alpha - 1) = \cos^2\alpha \cdot (1 - \cos\alpha)\,.$$ 1 pont

Nyilvánvaló, hogy $\sin^2\alpha \ge 0$ és $\cos^2\alpha \ge 0$, továbbá a feltételek miatt

$$\sin\alpha - 1 \le 0$$

és

$$1 - \cos\alpha > 0\,.$$ 2 pont

A kapott két feltétel egyszerre csak úgy állhat fenn, ha $\sin\alpha - 1 = 0$, azaz, ha

$$\sin\alpha = 1\,.$$ 1 pont

Ebből azonnal következik, hogy $\cos\alpha = 0$, ezért az (1) egyenlet mindkét oldala zérus.

Az ABC háromszög α szögére $\sin\alpha = 1$ miatt $\alpha = 90°$ teljesül. 1 pont

Ha a háromszögben az egyik szög derékszög, akkor ennél nagyobb szög a háromszögben már nem lehetséges, tehát a háromszög legnagyobb szöge:

$$\alpha = 90°.$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Mivel α egy háromszög szöge, ezért teljesülnie kell a

$$0 < \sin\alpha \leq 1\,,$$

és

$$-1 < \cos\alpha < 1$$

feltételeknek. 2 pont

A $0 < \sin\alpha$ feltétel miatt $\sin^2\alpha > 0$, ezért a $\sin\alpha \leq 1$ egyenlőtlenség mindkét oldalát szorozhatjuk a pozitív $\sin^2\alpha$ számmal, ebből azt kapjuk, hogy

(1) $$\sin^3\alpha \leq \sin^2\alpha\,.$$ 1 pont

Nyilvánvaló, hogy az ABC háromszög bármely szögének koszinusznégyzete nemnegatív, ezért teljesül az is, hogy

(2) $$\cos^2\alpha \geq 0\,.$$ 1 pont

Tegyük föl először, hogy $\cos^2\alpha > 0$ igaz.

A kezdeti feltételekből $\cos\alpha < 1$ is következik.

Ennek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalát a $\cos^2\alpha > 0$ számmal szorozva

(3) $$\cos^3\alpha < \cos^2\alpha$$

következik. 1 pont

Összeadva az (1) és (3) egyenlőtlenségek megfelelő oldalait:

$$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha < \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\,.$$ 1 pont

A kapott egyenlőtlenség ellentmondásra vezet, mert a feladat feltétele szerint $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = 1$ és a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ trigonometrikus azonosság szerint az egyenlőtlenség jobb oldalának értéke is 1. 2 pont

Az ellentmondás oka a $\cos^2\alpha > 0$ feltevés. Ez pontosan azt jelenti, hogy a (2) egyenlőtlenségben csakis $\cos^2\alpha = 0$, vagyis

$$\cos\alpha = 0$$

lehetséges. 1 pont

Kapott eredményünk szerint az ABC háromszög α szögére $\cos\alpha = 0$ és így $\alpha = 90°$.

Ha a háromszögben az egyik szög derékszög, akkor ennél nagyobb szög a háromszögben már nem lehetséges, tehát a háromszög legnagyobb szöge:

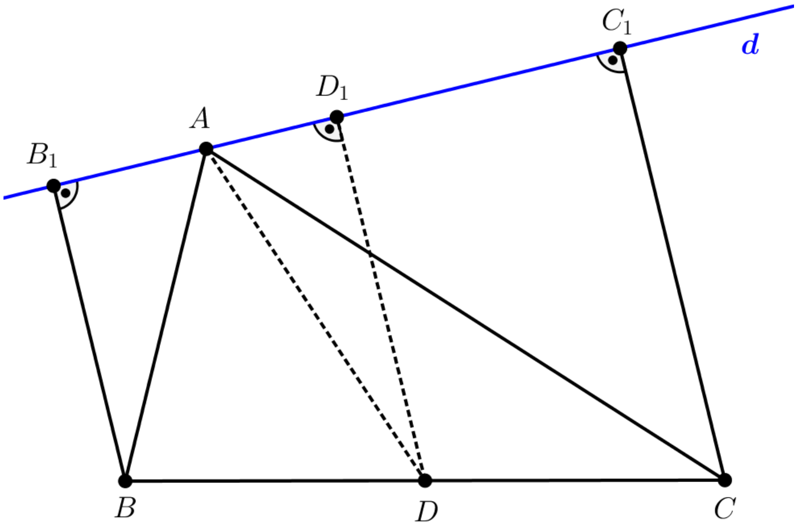
$$\alpha = 90°.$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Legyen d az az ABC hegyesszögű háromszög síkjában az ABC háromszög A csúcsán átmenő egyenes, amely az AB és AC egyenesek egyikével sem esik egybe. Legyenek a B_1 és C_1 pontok rendre a B és C pontok merőleges vetületei a d egyenesen.
Határozza meg a d egyenes helyzetét úgy, hogy a $BB_1 + CC_1$ összeg maximális legyen.

Megoldás:
Két esetet vizsgálunk, először azt, amikor a d egyenesnek a BC szakasszal nincs közös pontja, másodszor pedig azt, amikor van közös pontjuk.

Tekintsük az első esetnek megfelelően készített ábrát, amelyen a BC oldal felezőpontját D-vel, a D pontnak a d egyenesre eső merőleges vetületét D_1-gyel jelöltük.



1. ábra

A BCC_1B_1 derékszögű trapéz, amelynek középvonala a DD_1 szakasz, ezért a középvonal tulajdonságát felhasználva:

$$\frac{BB_1 + CC_1}{2} = DD_1 .$$ 1 pont

Az ábra DD_1 és DA szakaszaira nyilvánvalóan teljesül a

(1) $$DD_1 \leq DA$$

egyenlőtlenség.

Ebből az következik, hogy

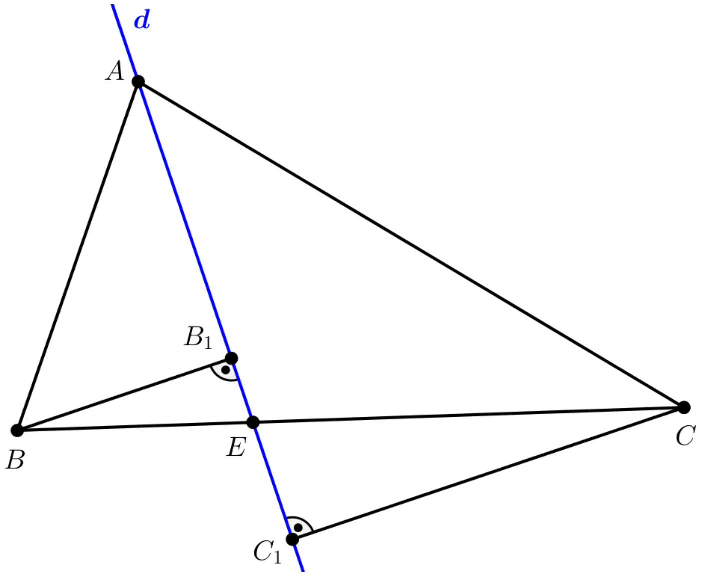
$$\frac{BB_1 + CC_1}{2} \leq DA,$$

azaz

(2) $$BB_1 + CC_1 \leq 2DA .$$ 2 pont

Az (1) és így a (2) egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha a d egyenes merőleges az ABC háromszög DA súlyvonalára. 1 pont

Legyen most a d egyenes és a BC szakasz közös pontja E, és tekintsük az ehhez tartozó ábrát.



2. ábra

Az ábra BB_1; CC_1 szakaszaira érvényesek a

(3) $$BB_1 \leq BE; \qquad CC_1 \leq CE$$

egyenlőtlenségek. 1 pont

Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalainak összeadásával azt kapjuk, hogy

$$BB_1 + CC_1 \leq BE + CE\,,$$

azaz

(4) $$BB_1 + CC_1 \leq BC\,.$$ 2 pont

A (3) egyenlőtlenségekben egyenlőség pontosan akkor van, ha a B_1; C_1 és E pontok azonosak, vagyis éppen akkor, amikor a d egyenes merőleges a BC szakaszra. Ez utóbbi pedig azt jelenti, hogy az AE szakasz az ABC háromszög A csúcsból induló magassága.

Ekkor a (4) egyenlőtlenségben is az egyenlőség esete áll fenn. 1 pont

Végül választ adunk arra, hogy a feladat feltételei, tehát az ABC háromszög tulajdonságai alapján az első, vagy a második eset adja a $BB_1 + CC_1$ összeg maximumát.

Tekintsük ezért a BC szakasz Thalész-körét, ennek középpontja a BC felezőpontja, sugara a BC szakasz fele.

Mivel az ABC háromszög a feltétel szerint hegyesszögű háromszög, ezért az A pont a BC oldal Thalész-körének külső pontja.

Ekkor az A csúcshoz tartozó súlyvonal nyilván hosszabb, mint a Thalész-kör sugara, vagyis mint a BC oldal fele.

Ebből pedig arra következtetünk, hogy az első esetben, tehát az A ponton átmenő súlyvonalra merőleges d egyenes esetén kapjuk a maximális $BB_1 + CC_1$ távolságösszeget. <u>2 pont</u>

Összesen: 10 pont