Oktatási Hivatal

A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

döntő forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{\sqrt{x^3}+x\cdot\sqrt{2}}+\sqrt{2\cdot\sqrt{x}+\sqrt{8}}=8$ egyenletet.

Megoldás:
A négyzetgyök értelmezése miatt $x\geq 0$.

Az $x\geq 0$ feltétel miatt a négyzetgyökvonás azonossága alkalmazható, és így

$$\sqrt{x^3}=x\cdot\sqrt{x}\,,$$

valamint

$$\sqrt{8}=2\cdot\sqrt{2}\,.$$ 1 pont

Ennek alapján az eredeti egyenletet átalakíthatjuk a következőképpen:

(1) $$\sqrt{x\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}+\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=8\,.$$ 2 pont

Az (1) egyenlet bal oldalán a $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$ tényezőt kiemelhetjük, és így

(2) $$\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)=8.$$ 2 pont

A (2) egyenlet bal oldalának zárójeles kifejezését $\sqrt{x}+\sqrt{2}=\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2}$ alakban írva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^3}=8\,,$$

amelyből a négyzetgyökvonás azonosságának alkalmazásával adódik

(3) $$\left(\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right)^3=2^3.$$ 2 pont

A feltételek alapján a (3) egyenlet csak úgy állhat fenn, ha

$$\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=2\,,$$

azaz

(4) $$\sqrt{x}=4-\sqrt{2}\,.$$

Mivel $4-\sqrt{2}>0$, ezért a (4) egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelhetjük:

$$x=18-8\sqrt{2}\,.$$ 2 pont

Átalakításaink a feltételnek megfelelő számhalmazon ekvivalensek voltak, ezért a kapott pozitív szám a feladat egyetlen megoldása. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Adja meg az összes olyan háromszöget, amelynek egyik oldala 10 egység hosszúságú, és a szögei számtani sorozatot alkotnak, az oldalai pedig

a) számtani

b) mértani

sorozatot alkotnak.

Megoldás:
Vizsgáljunk egy háromszöget, amelyre a feladat feltételei teljesülnek.
Nem sérti az általánosságot, ha a háromszög szögei által alkotott számtani sorozat δ különbségéről feltesszük, hogy $\delta \geq 0$.

Ekkor a háromszög szögeit a következőképpen jelölhetjük:

$$\alpha = \beta - \delta; \quad \beta; \quad \gamma = \beta + \delta.$$

A háromszög szögeinek összege 180°, tehát $\beta - \delta + \beta + \beta + \delta = 180°$, ahonnan a műveletek elvégzésével és egyszerűsítéssel

$$\beta = 60°.$$ 2 pont

A $\delta \geq 0$ feltétel miatt az is teljesül, hogy

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma.$$

A feladat a) részének megoldásához a keresett háromszög α; β; γ szögeivel szemben levő oldalak hosszát a továbbiakban rendre a; b; c-vel jelöljük.

Minden háromszögre igaz, hogy nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, és megfordítva, ezért $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ alapján az is igaz, hogy

$$a \leq b \leq c.$$ 1 pont

Ezért, ha egy háromszög oldalai egy számtani sorozat közvetlen egymás utáni tagjai, akkor a számtani sorozat tulajdonsága alapján csak

(1) $$b = \frac{a + c}{2}$$

állhat fenn. 1 pont

Felírjuk a koszinusztételt a háromszög b oldalára és a vele szemben fekvő $\beta = 60°$-os szögre:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 60°,$$

ahonnan

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

és (1) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{a^2 + 2ac + c^2}{4} = a^2 + c^2 - ac\,.$$

Ebből a műveletek elvégzésével és rendezéssel, illetve egyszerűsítéssel adódik, hogy

$$a^2 - 2ac + c^2 = 0,$$

illetve

(2) $$(a - c)^2 = 0.$$ 1 pont

A (2) egyenlet szerint csakis $a = c$ lehetséges, amelyből (1) alapján

$$a = b = c$$

is következik.

Ez pedig azt jelenti, hogy az a) feladatbeli háromszög szabályos, amelynek oldalai egy 0 különbségű számtani sorozat tagjai, vagyis a háromszög minden oldala 10 egység hosszúságú. 1 pont

Vizsgáljuk most a feladat b) részéhez tartozó háromszöget, amelyben a fentiek szerint egyrészt $\beta = 60°$, másrészt a szögekre és a velük szemben fekvő oldalakra ezúttal is teljesül, hogy

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma,$$

illetve

$$a \leq b \leq c.$$

Mivel most az oldalak egy mértani sorozat közvetlen egymás utáni tagjai, ezért a mértani sorozat tulajdonsága szerint

(3) $$b = \sqrt{ac}\,.$$ 1 pont

Ismét felírjuk a koszinusztételt a háromszög b oldalára és a vele szemben fekvő $\beta = 60°$-os szögre, amelyből (3) és

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

alkalmazásával következik, hogy

$$ac = a^2 + c^2 - ac.$$

Ebből rendezés után azt kapjuk, hogy

$$a^2 - 2ac + c^2 = 0,$$

illetve a bal oldalon szereplő teljes négyzet miatt

(4) $$(a - c)^2 = 0.$$ 1 pont

A (4) egyenletből következik, hogy csak $a = c$ lehetséges, amelyből (3) szerint

$$a = b = c$$

is adódik.

Kapott eredményünk ekvivalens azzal, hogy a b) feladatban keresett háromszög is szabályos, amelynek oldalai egy 1 kvóciensű mértani sorozat tagjai, tehát a háromszög minden oldala 10 egység hosszúságú. 1 pont

Azt az eredményt kaptuk, hogy amennyiben egy háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak, akkor egyrészt a háromszög egyik szöge 60°-os, másrészt, ha ezenkívül az oldalak hosszai számtani, vagy mértani sorozat közvetlen egymás utáni tagjai, akkor ezek a feltételek csak a szabályos háromszögre teljesülnek.
Ezért a kezdeti feltételt is figyelembe véve a feladat a) és b) részének egyaránt csakis a 10 egység oldalhosszúságú szabályos háromszögek felelnek meg. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Öt különböző színű, szabályos dobókockát dobunk fel egyszerre: fehéret, lilát, sárgát, zöldet és kéket.
Rendre $F; L; S; Z; K$ jelöli az egyes kockákkal dobott számokat.
Egy dobás É értékét a következőképpen számoljuk ki:

Ha $F = 1$, akkor $É = L \cdot (S + Z + K)$,
ha $F = 2$, akkor $É = L \cdot (S + Z) + K$,
ha $F = 3$, akkor $É = L \cdot S + Z + K$,
ha $F = 4$, akkor $É = L \cdot S + Z \cdot K$,
ha $F = 5$, akkor $É = L \cdot S \cdot Z + K$,
ha $F = 6$, akkor $É = L \cdot S \cdot Z \cdot K$.

Határozza meg annak a valószínűségét, hogy $É = 70$.

Megoldás:

A dobókockák szabályosak, ezért az $F; L;\ S;\ Z;\ K$ számok az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ számhalmaz elemei lehetnek, azaz

(1) $$F; L;\ S;\ Z;\ K \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Tudjuk továbbá, hogy

(2) $$70 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Számoljuk ki az egyes dobások É értékét az F szám lehetséges értékei szerint.

Legyen először $F = 1$.
Ekkor az $É = L \cdot (S + Z + K)$ feltétel, valamint (1) és (2) szerint csak

$$L = 5 \text{ és } S + Z + K = 14$$

lehetséges, hiszen $L = 1$ illetve $L = 2$ esetén $S + Z + K = 70$ illetve $S + Z + K = 35$ lenne, miközben nyilvánvaló, hogy

$$S + Z + K \leq 18.$$

Az $S + Z + K = 14$ összeg többféleképpen is létrejöhet, ezeket az alábbi táblázatban gyűjtöttük össze, amelyben rögzítettük azt is, hogy az egyes kockákon szereplő számok hányféleképpen állhatnak elő:

A dobott számok			Összeg	Hányféleképp?
6	6	2	14	3
6	5	3	14	6
6	4	4	14	3
5	5	4	14	3

A táblázat szerint az $S + Z + K = 14$ összeg összesen 15-féleképpen állhat elő. 2 pont

Legyen most $F = 2$.
Ekkor a feltétel szerint teljesülnie kell az

$$L \cdot (S + Z) + K = 70$$

összefüggésnek.

Ha $L \leq 5$, akkor $L \cdot (S + Z) \leq 5(6 + 6) = 60$, amelyből $K \geq 10$ következne, ez nyilván nem lehetséges.

Ezért, (1)-et is figyelembe véve csak $L = 6$ esetén van megoldás.

Ekkor csakis $S + Z = 11$ fordulhat elő, amelyhez $K = 4$ tartozik.

Ez két újabb esetet jelent, mert $S + Z = 11$ csak

$$S = 6; Z = 5 \text{ vagy } S = 5; Z = 6$$

formában jöhet létre. 1 pont

Ha $F = 3$, akkor $É = L \cdot S + Z + K$ jobb oldalának minden száma helyébe a lehetséges legnagyobb számot írva azt kapjuk, hogy $É \leq 48$.
Tehát, ha $F = 3$, akkor a feltétel alapján $É = 70$ nem valósulhat meg. 1 pont

Legyen most $F = 4$.
Ekkor az $É = L \cdot S + Z \cdot K$ szerint É maximális értéke 72, amelyet úgy kapunk, hogy az

$$L = S = Z = K = 6$$

helyettesítést végezzük el a feltétel jobb oldalán.
Ezt az összeget 2-vel kellene csökkentenünk a szükséges $É = 70$ értékhez.
De ha csak az egyik kockán is 6-ostól különböző szám áll, akkor legalább 6-tal csökkentettük a maximális $É = 72$ értéket.
Ezért $F = 4$ sem lehetséges. 1 pont

Ha $F = 5$, akkor az $É = L \cdot S \cdot Z + K$ feltétel miatt a kék kockán dobott szám szerint érdemes $L; S; Z$ lehetséges értékeit vizsgálni, figyelembe véve, hogy $É = 70$.

A feltételben szereplő $L \cdot S \cdot Z$ szorzatot minden lehetséges K érték esetén három egész szám szorzatára bontjuk. Ugyanakkor (1) miatt kizárjuk azokat az eseteket, amelyekben az $L \cdot S \cdot Z$ szorzat prímtényezős felbontásában valamelyik prím 6-nál nagyobb.

Ha $K = 1$, akkor $L \cdot S \cdot Z = 69 = 3 \cdot 23$, ami nyilván nem fordulhat elő, mert a 23 prímszám, és ilyet szabályos dobókockával nem dobhatunk.

Ha $K = 2$, akkor $L \cdot S \cdot Z = 68 = 2^2 \cdot 17$, így ez sem lehetséges, mert a 17 prím 6-nál nagyobb.

Ha $K = 3$, akkor $L \cdot S \cdot Z = 67$, ez prímszám, ilyet tehát nem tudunk dobni.

Ha pedig $K = 4$, akkor $L \cdot S \cdot Z = 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$, és mivel a 11 prímszám is 6-nál nagyobb, így ez sem valósulhat meg.

A $K = 5$ eset sem fordulhat elő, mert ekkor $L \cdot S \cdot Z = 65 = 5 \cdot 13$ lenne, és 13 prím, szabályos dobókockával pedig 13-as nem dobható. 2 pont

Végül, ha $K = 6$, akkor $L \cdot S \cdot Z = 64 = 2^6$.
Most az $L \cdot S \cdot Z$ szorzatban nincs 6-nál nagyobb prímtényező, másrészt ez a szám csakis egyféleképpen bontható fel három olyan egész szám szorzatára, amelyek mindegyike megfelel az (1) feltételnek, mégpedig

$$L \cdot S \cdot Z = 64 = 4 \cdot 4 \cdot 4.$$

Ezért, ha $F = 5$, akkor csak a $K = 6$ érték felel meg a feltételnek, vagyis egyetlen új esetet találtunk. 1 pont

Ha pedig $F = 6$, akkor $É = L \cdot S \cdot Z \cdot K$ miatt a dobás értéke nem lehet 70, hiszen az egyik kockával 7-est kellene dobnunk, de ez (1) szerint nem valósulhat meg. 1 pont

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, és azt kaptuk, hogy a feltételek figyelembe vételével az $É = 70$ érték összesen 18-féle módon állítható elő.

Az összes lehetséges dobások száma $6^5 = 7776$.

Így annak a valószínűsége, hogy a fehér, lila, sárga, zöld és kék szabályos dobókockákat egyszerre feldobva a dobás értéke a feltételeknek megfelelően $É = 70$ legyen:

$$P(É = 70) = \frac{18}{7776} = \frac{1}{432}.$$ <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont