



Oktatási Hivatal

A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. Számítsuk ki a következő összeg értékét:

$$N = 1 \cdot 3 - 5 \cdot 7 + 9 \cdot 11 - 13 \cdot 15 + \dots - 197 \cdot 199 + 201 \cdot 203.$$

2. A pozitív egészekből álló d_1, d_2, \dots, d_k sorozatot az n osztóláncának nevezzük, ha $d_1 = 1$ és $d_k = n$, továbbá a sorozat minden tagja -az utolsó kivételével- osztója a következő tagnak. Például $n = 6$ esetén három ilyen osztólánc van, ezek az 1,6; 1,2,6; és az 1,3,6. Hány osztólánc van, ha (a) $n=1024$; (b) $n=999$; (c) $n=1000$?

3. Oldjuk meg a valós számok körében az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{2 + 4x - 2x^2} + \sqrt{6 + 6x - 3x^2} = x^2 - 2x + 6.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ húrnégyszög AD oldalán van olyan P pont, hogy a CDP háromszög és az $ABCP$ négyszög kerülete és területe is megegyezik, akkor az $ABCD$ négyszögnek van két egyenlő hosszúságú oldala.

5. Két autóbusz indul ugyanabban az időpontban ugyanazon az úton, az egyik Piri-pócsról Nekeresdre, a másik ellenkező irányban, Nekeresdről Piripócsra. A buszok sebessége állandó, az arányuk 6:5, az a gyorsabb, amelyik Piripócsról indul. Az út mentén minden kilométernél van egy kilométerkő. Megérkezéskor a buszok pontosan 30 percig várakoznak, majd ugyanazon az útvonalon indulnak vissza, így közlekednek egész nap a két város közt oda-vissza. Másodszor a 156-os kilométerkőnél találkoznak, harmadszor pedig a 128-asnál.

Hanyadik kilométerkőnél lehetett az első találkozás? Hanyadik kilométerkőnél lehet a piripócsi buszmegálló?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.