



# Oktatási Hivatal

A 2017/2018. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
első forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA  
(GIMNÁZIUM)

Javítási-értékelési útmutató

1. Számítsuk ki a következő összeg értékét:

$$N = 1 \cdot 3 - 5 \cdot 7 + 9 \cdot 11 - 13 \cdot 15 + \dots - 197 \cdot 199 + 201 \cdot 203.$$

**Megoldás:** Az összeg értéke sokféleképpen meghatározható. Egy lehetséges módszer, hogy a számokat négyes csoportokban vesszük sorra. Ha a négy szám átlagát  $k$  jelöli, akkor a csoporton belül a következőt kapjuk:

$$(k - 3) \cdot (k - 1) - (k + 1) \cdot (k + 3) = -8k. \quad 2 \text{ pont}$$

Az első csoport átlaga 4, innen 8-asával nő, így

$$N = -8 \cdot (4 + 12 + 20 + 28 + \dots + 196) + 201 \cdot 203. \quad 2 \text{ pont}$$

Számoljuk ki először a zárójelben szereplő összeget, ennek tagjai 8 differenciájú, 25 tagú számtani sorozatot alkotnak:

$$4 + 12 + 20 + 28 + \dots + 196 = \frac{1}{2} \cdot (4 + 196) \cdot 25 = 2500. \quad 2 \text{ pont}$$

$$\text{Innen } N = -8 \cdot 2500 + 201 \cdot 203 = -20000 + 40803 = 20803. \quad 1 \text{ pont}$$

Összesen 7 pont

**Megjegyzés:** Ha a versenyző türelemmel és hibátlanul számológéppel kiszámolja az összeget, akkor is 7 pontot kap. Amennyiben számológéppel számol, gondolatmenetet nem közöl és eredménye hibás, 0 pontot kap.

2. A pozitív egészekből álló  $d_1, d_2, \dots, d_k$  sorozatot az  $n$  osztóláncának nevezzük, ha  $d_1 = 1$  és  $d_k = n$ , továbbá a sorozat minden tagja -az utolsó kivételével- osztója a következő tagnak. Például  $n = 6$  esetén három ilyen osztólánc van, ezek az 1,6; 1,2,6; és az 1,3,6. Hány osztólánc van, ha (a)  $n = 1024$ ; (b)  $n = 999$ ; (c)  $n = 1000$ ?

**Megoldás:** Egy szám osztóinak áttekintését megkönnyíti, ha ismerjük a prímtényezős felbontását. Ez a feladatban szereplő három  $n$  érték esetén:  $1024 = 2^{10}$ ,  $999 = 3^3 \cdot 37$ ,  $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ . 1 pont

(a) Az 1024 minden osztója kettőhatvány,  $2^i$  alakú, ahol  $i = 0, 1, \dots, 10$ . Ezen számok közül bármely kettőt véve a kisebb osztja a nagyobbat. Az osztólánc első eleme az 1, az utolsó az 1024, az összes többi osztóról szabadon eldönthetjük, hogy beletesszük egy osztóláncba, vagy sem. A  $2^1, 2^2, \dots, 2^9$  osztók kilencen vannak, mindegyik esetén a többitől függetlenül két lehetőségünk van, így az osztólánccok száma  $2^9 = 512$ . 2 pont

(b) A 999-nek 8 osztója van, ezek: 1, 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999. Vegyük számba az osztólánccokat a szerint, hogy melyik a legkisebb 37-tel osztható szám a láncban. Minden ilyen szám előtt állhatnak osztói, utána pedig többesei. Ha ez a 37, akkor a láncban utána lehet a 111 és a 333. Két számról dönthetünk, ez  $2^2 = 4$  láncot jelent. (1,37,999; 1,37,111,999; 1,37,333,999; és 1,37,111,333,999). Hasonlóan, ha ez a 111, akkor előtte dönthetünk a 3-ról, utána a 333-ról, újabb 4 lánc. Ha a 333, akkor előtte dönthetünk a 3-ról és a 9-ről, újabb 4 lánc. Végül ha ez a 999, akkor szabadon dönthetünk a 3, 9, 27 számokról, ez 8 láncot jelent. Összesen 20 ilyen lánc van. 2 pont

(c) Olyan módszert mutatunk, amely tetszőleges  $n$  szám esetén megadja a láncok  $L(n)$  számát. Legyen  $L(1) = 1$ . Az  $n$  szám azon osztóláncainak száma, melyben az  $n$ -nél kisebb osztók közül a láncban szereplő legnagyobb osztó  $d$ , éppen  $L(d)$ . Így  $L(n)$  értéke azon  $L(d)$  számok összege, amelyekre  $d$  osztója  $n$ -nek és  $d < n$ . Az alábbi táblázat az 1000 osztóit tartalmazza, az  $i$ -dik sor  $j$ -dik eleme  $d = 2^{i-1} \cdot 5^{j-1}$ , mellé írjuk zárójelben  $L(d)$  értékét. Az első  $i$  sor és  $j$  oszlop által meghatározott téglalap jobb alsó mezőjébe kerül  $L(d)$ , ami a téglalapban szereplő összes többi zárójeles szám összege. Az alábbi táblázat alapján a láncok száma  $L(1000) = 252$ . 2 pont

1 (1)	5 (1)	25 (2)	125 (4)
2 (1)	10 (3)	50 (8)	250 (20)
4 (2)	20 (8)	100 (26)	500 (76)
8 (4)	40 (20)	200 (76)	1000 (252)

Összesen 7 pont

3. Oldjuk meg a valós számok körében az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{2 + 4x - 2x^2} + \sqrt{6 + 6x - 3x^2} = x^2 - 2x + 6.$$

**Megoldás:** Az első gyökjel alatti másodfokú kifejezésből kiemelünk 2-t, majd teljes négyzetté alakítunk:  $2 + 4x - 2x^2 = 2(2 - (x - 1)^2)$ . 1 pont

Ennek legnagyobb értéke a 4 és ezt az  $x = 1$  helyen veszi fel. 1 pont

Hasonlóan a másik gyökjel alatt  $6 + 6x - 3x^2 = 3(3 - (x - 1)^2)$  áll, ennek legnagyobb értéke 9, ezt az  $x = 1$  helyen veszi fel. 1 pont

Azt kaptuk, hogy a bal oldal legnagyobb értéke  $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$  és ezt az  $x = 1$  helyen veszi fel. 1 pont

A jobb oldalon is alakítsunk teljes négyzetté:  $x^2 - 2x + 6 = (x - 1)^2 + 5$ . 1 pont

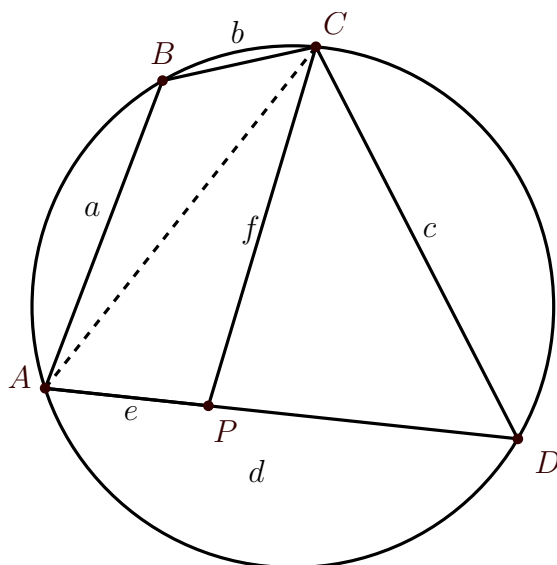
A jobb oldal legkisebb értéke az 5 és ezt az  $x = 1$  helyen veszi fel. 1 pont

Mivel a bal oldal legnagyobb lehetséges értéke és a jobb oldal legkisebb lehetséges értéke egyaránt az 5, ezért egyenlőség csak akkor van, amikor mindkét oldal éppen 5. Ez egyetlen  $x$  érték esetén teljesül, amikor  $x = 1$ . 1 pont

Összesen 7 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az  $ABCD$  húrnégyszög  $AD$  oldalán van olyan  $P$  pont, hogy a  $CDP$  háromszög és az  $ABCP$  négyszög kerülete és területe is megegyezik, akkor az  $ABCD$  négyszögnek van két egyenlő hosszúságú oldala.

**Megoldás:** Használjuk az alábbi ábra jelöléseit:



Az  $ACP$  és  $CDP$  háromszögek egyik oldalegyenese közös, így  $\frac{T_{ACP}}{T_{CDP}} = \frac{e}{d-e}$ , ebből

$$T_{ACP} = \frac{e}{d-e} \cdot T_{CDP}. \quad 1 \text{ pont}$$

Jelölje az  $ABCD$  négyszög  $B$  csúcsánál levő szögét  $\beta$ , ekkor a  $D$ -nél levő szög  $180^\circ - \beta$ . Számoljuk ki a területeket:

$$T_{CDP} = \frac{(d-e) \cdot c \cdot \sin(180^\circ - \beta)}{2} = \frac{(d-e) \cdot c \cdot \sin \beta}{2}, \quad 1 \text{ pont}$$

$$T_{ABCP} = T_{ABC} + T_{ACP} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \beta}{2} + \frac{e}{d-e} \cdot \frac{(d-e) \cdot c \cdot \sin \beta}{2}. \quad 1 \text{ pont}$$

Az  $ABCP$  és  $CDP$  területeinek egyenlőségéből:

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin \beta}{2} + \frac{e \cdot c \cdot \sin \beta}{2} = \frac{(d-e) \cdot c \cdot \sin \beta}{2}.$$

Felszorozva, majd átrendezve:  $a \cdot b = c \cdot (d - 2e)$ . 1 pont

A kerületek egyenlőségéből  $a + b + f + e = f + c + d - e$ , amiből  $a + b - c = d - 2e$  adódik. 1 pont

Összevetve az előzővel:  $a \cdot b = c \cdot (a + b - c)$ , azaz  $(a - c) \cdot (b - c) = 0$ . 1 pont  
Ezzel az állítást bizonyítottuk, a négyszög  $a$  és  $c$ , vagy  $b$  és  $c$  oldala egyenlő. 1 pont

Összesen 7 pont

5. Két autóbusz indul ugyanabban az időpontban ugyanazon az úton, az egyik Piripócsról Nekeresdre, a másik ellenkező irányban, Nekeresről Piripócsra. A buszok sebessége állandó, az arányuk 6:5, az a gyorsabb, amelyik Piripócsról indul. Az út mentén minden kilométernél van egy kilométerkő. Megérkezésükre a buszok pontosan 30 percig várakoznak, majd ugyanazon az útvonalon indulnak vissza, így közlekednek egész nap a két város közt oda-vissza. Másodszor a 156-os kilométerkőnél találkoznak, harmadszor pedig a 128-asnál.

Hanyadik kilométerkőnél lehetett az első találkozás? Hanyadik kilométerkőnél lehet a piripócsi buszmegálló?

**Megoldás:** Osszuk fel az utat 11 egyenlő részre, nevezzük ezeket egységeknek. Mivel a buszok sebességének aránya 6:5, ezért az első találkozás Piripóctól 6 egységre lesz. 1 pont

Mivel mindkét busz ugyanannyi ideig várakozik, ezért úgy is tekinthetjük, mintha azonnal fordulnának.

Az első találkozástól a második találkozásig a két busz együtt a városok közti út kétszeresét teszi meg. 1 pont

A gyors busz a két találkozás közt 12 egységet tett meg. Ebből az első találkozás után 5 Nekeresdig, majd 7 Nekeresről Piripócs irányába. Így a második találkozás Piripóctól 4 egységre történt. 1 pont

A második és harmadik találkozás közt is ugyanez a helyzet, tehát a gyors busz 12 egységet tesz meg. Ebből 4, míg visszaér Piripócsra, majd innen Nekeresdre menet még megtesz 8 egységet a harmadik találkozásig. 1 pont

Azt kaptuk, hogy Piripócsról számítva az első találkozás 6 egységre, a második 4 egységre a harmadik 8 egységre történt. Ez azt jelenti, hogy az első találkozás a második és a harmadik közt félúton, azaz a 142-es kilométerkőnél volt. 1 pont

Mivel  $156 - 128 = 28$ , ezért egy egység 7 kilométer. A 156-os kilométerkő Piripóctól 4 egységre van, a 128-as pedig 8-ra, így a piripócsi buszmegálló a 184-es kilométerkőnél van. 2 pont

Összesen 7 pont