# Oktatási Hivatal

**A 2017/2018. tanévi**
**Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny**
**második forduló**

**MATEMATIKA**

**II. KATEGÓRIA**
**(GIMNÁZIUM)**

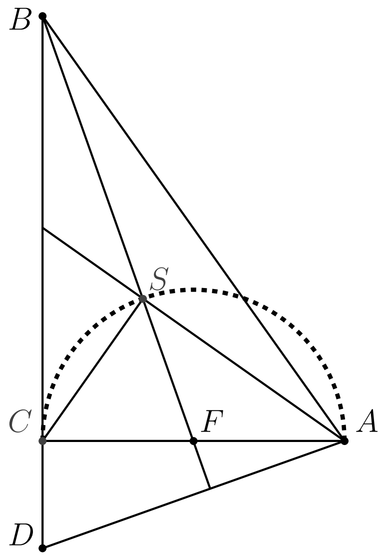
**Javítási–értékelési útmutató**

1. Az $ABC$ derékszögű háromszög súlypontja legyen $S$. Tudjuk, hogy $ACB\angle = ASC\angle = 90°$. Az $A$ csúcsból merőlegest állítunk a $BS$ egyenesre, ez $BC$ egyenesét $D$-ben metszi. Mennyi a $\frac{CD}{CB}$ arány értéke?

**1. Megoldás:** Legyen $F$ az $AC$ felezőpontja és $AC = b$. Thalész tételének megfordítását $ASC$ háromszögre alkalmazva $FS = \frac{b}{2}$. 1 pont

A súlypontra vonatkozó tétel miatt $BF = \frac{3b}{2}$. 1 pont

Pitagorasz tétele szerint a $BCF$ háromszögben $BC^2 = BF^2 - FC^2 = 2b^2$. 1 pont




$ACD$ és $BCF$ háromszögek hasonlók, mivel egyrészt $C$-nél mindkettőben derékszög van, másrészt $CAD\angle = CBF\angle$, hiszen merőleges szárú hegyesszögek. 2 pont

Írjuk fel a befogók arányát, $CD : CA = CF : CB$, amiből

$$CD = \frac{CF \cdot CA}{CB} = \frac{\frac{1}{2}b \cdot b}{\sqrt{2}b} = \frac{1}{2\sqrt{2}}b,$$

ahonnan

$$\frac{CD}{CB} = \frac{1}{4}. \qquad 2 \text{ pont}$$

Összesen 7 pont

**2. Megoldás:** Legyen $\overrightarrow{CA} = \underline{u}$ és $\overrightarrow{CB} = \underline{v}$. Mivel $ACB\angle = 90°$, ezért

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0. \qquad 2 \text{ pont}$$

Mivel $ASC\angle = 90°$, ezért

$$\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AS} = \frac{\underline{u} + \underline{v}}{3} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{\underline{v}}{2} - \underline{u}\right) = 0.$$

A merőlegességből adódó két skaláris szorzásból $\underline{v}^2 = 2\underline{u}^2$. 2 pont

Legyen $\overrightarrow{CD} = -\lambda\underline{v}$. Mivel $AD$ merőleges $BS$ egyenesére, ezért

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{FB} = (\underline{u} + \lambda\underline{v}) \cdot (\underline{v} - \frac{\underline{u}}{2}) = 0,$$

amiből $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ felhasználásával $\lambda\underline{v}^2 = \frac{\underline{u}^2}{2}$. 2 pont

Felhasználva, hogy $\underline{v}^2 = 2\underline{u}^2$ megkapjuk a keresett arányt, $\lambda = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{4}$. 1 pont

2. Milyen számjegy áll az $N$ szám tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni 2018. helyen?

$$N = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{2017}{2018!}$$

**Megoldás:** Teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}. \qquad (1)$$

Kezdő lépés: $k = 1$ esetén $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, az állítás igaz. 1 pont

Indukciós lépés: feltesszük, hogy az állítás igaz $k$-ra, ennek segítségével megmutatjuk, hogy igaz $k+1$-re is. Írjuk fel a bal oldalt $k+1$ esetén és használjuk az indukciós feltevést:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{k}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!}.$$

Közös nevezőre hozva és a műveleteket elvégezve éppen a kívánt eredményt kapjuk:

$$1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{k+2}{(k+2)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}. \qquad 2 \text{ pont}$$

Tehát a feladat szövegében szereplő $N = 1 - \frac{1}{2018!}$. Megmutatjuk, hogy a tizedesvessző utáni 2018. helyen 9-es számjegy áll. Ez azt jelenti, hogy

$$N = 1 - \frac{1}{2018!} > 1 - 10^{-2018},$$

azaz $\frac{1}{2018!} < 10^{-2018}$, amiből $2018! > 10^{2018}$. 2 pont
Becsüljük alulról 2018! értékét úgy, hogy az 1, 2, ..., 1009 számok helyett írjunk 1-et, az 1010, 1011, ..., 2018 helyett pedig 1000-et. Ezzel be is fejeztük a feladat megoldását, hiszen $2018! > 1000^{1009} = 10^{3027} > 10^{2018}$.

2 pont

Összesen 7 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $a$, $b$, $c$ egész számok, és $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ racionális, akkor $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ egész szám.

**Megoldás:** A feladatban szereplő feltétel szerint vannak olyan $p$, $q \neq 0$ egész számok, amelyekre $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c} = \dfrac{p}{q}$. A nevezőkkel szorozva és átrendezve ebből

$$(aq-bp)\sqrt{3} = cp - bq.$$ 1 pont

A jobb oldalon álló $cp-bq$ racionális. Mivel $\sqrt{3}$ irracionális, a bal oldalon álló kifejezés csak úgy lehet racionális, ha $aq-bp=0$. Ekkor $cp-bq$ is 0, amiből $b \neq 0$ és $c \neq 0$ esetén

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{p}{q}.$$ 2 pont

Amennyiben $b=0$, akkor $q \neq 0$ és $aq-bp=0$ miatt $a=0$. Ekkor a feladatban szereplő törtek csak úgy lehetnek értelmezve, ha $c \neq 0$ és ekkor $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = c$, ami egész. Ha $c=0$, abból hasonló módon kapjuk, hogy $b=0$ és így $a=0$ lenne, de ekkor a feladat szövegében szereplő törteket nem értelmezzük. 1 pont

Legyen $\frac{p}{q} = r$. Ekkor $b=cr$, $a=br=cr^2$. A kapott eredmények segítségével írjuk fel a feladat szövegében szereplő második törtet:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = \frac{(r^4+r^2+1)c^2}{(r^2+r+1)c} = (r^2-r+1)c = a-b+c.$$

Mivel $a$, $b$ és $c$ egészek, ezért a tört értéke egész, a bizonyítást befejeztük. 3 pont

Összesen 7 pont

4. Vegyünk 31 különböző pozitív prímszámot és adjuk össze a negyedik hatványaikat. Igazoljuk, hogy ha a kapott szám osztható 30-cal, akkor a prímszámok között szerepel három egymást követő prím (azaz $p < q < r$ úgy, hogy a $]p;q[$ és $]q;r[$ nyílt intervallumokban nincsenek prímszámok).

**Megoldás:** Legyen a negyedik hatványok összege $Z$. Megmutatjuk, hogy $Z$ csak akkor osztható 30-cal, ha a prímek közt szerepel a 2, 3, 5 mindegyike.

Mivel $(2;3) = (2;5) = (3;5) = 1$ és $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, ezért a 30-cal való oszthatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy a 2, 3, 5 mindegyike osztja $Z$-t. 1 pont

A 2 az egyetlen páros pozitív prím. Ha a 2 nincs a 31 kiválasztott között, akkor mindegyik páratlan, negyedik hatványaik és azok összege, $Z$ is páratlan, nem lehet osztható 30-cal. 2 pont

Ha a 3 nincs köztük, akkor nincs köztük 3-mal osztható. A 3-mal nem osztható számok négyzetének 3-as maradéka 1, így a negyedik hatványok 3-as maradéka 1, amiből $Z$ 3-as maradéka is 1. Így $Z$ nem lehet osztható 30-cal. 2 pont

Ha az 5 nincs köztük, akkor nincs köztük 5-tel osztható. Az 5-tel nem osztható számok négyzetének 5-ös maradéka 1 vagy 4. A negyedik hatványt a négyzet négyzeteként kapjuk, így minden 5-tel nem osztható egész negyedik hatványának 5-ös maradéka 1. Ebből $Z$ 5-ös maradéka is 1, $Z$ nem osztható 30-cal. 2 pont

Azt kaptuk, hogy $Z$ csak akkor osztható 30-cal, ha a 2, 3, 5 mindegyike a kiválasztott prímek közt van. Mivel ezek szomszédos prímek, ezzel a bizonyítandó állítást beláttuk.

Összesen 7 pont