A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
harmadik, döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA

Javítási–értékelési útmutató

1. Egy 10 tagú csoport minden tagját megkérték, írjanak le három különböző pozitív egész számot. Később kiderült, hogy bármely két ember számai között volt legalább egy azonos. Az 1-es számot éppen n ember választotta és semelyik más számot nem választották ennél többen. Mi lehetett n értéke?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy n lehetséges értékei az 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok.

Ha n legalább hat, akkor a számok kiválasztására könnyen adódnak lehetőségek, ezek közül egy egyszerűen áttekinthető változatot adunk meg. Legyenek az első három ember számai az $(1;2;3)$, a következő három ember számai pedig az $(1;4;5)$. A további négy ember számai legyenek $(a_1;4;6)$, $(a_2;4;6)$, $(a_3;4;6)$ és $(a_4;5;6)$.

Ha $a_1 = a_2 = a_3 = 2$ és $a_4 = 3$, akkor $n = 6$. Az a_i számok bármelyikét megváltoztathatjuk 1-re. Ha közülük k darabot 1-re cserélünk, n értéke $6+k$ lesz és így megkaphatjuk az $n = 7, 8, 9, 10$ értékeket. 2 pont

Nehezebb konstrukciót adni $n = 5$-re, erre példa a következő 10 számhármas: $(1;2;3)$, $(1;4;5)$, $(1;6;7)$, $(2;4;6)$, $(2;5;7)$, $(3;4;7)$, $(3;5;6)$, $(1;2;3)$, $(1;4;5)$, $(2;4;6)$. 2 pont

Megmutatjuk, hogy n nem lehet 5-nél kisebb. Válasszunk ki egy tetszőleges embert, legyenek a számai $(x;y;z)$. A többi 9 ember mindegyikének számai közt szerepel az x, y, z valamelyike, így a három közül valamelyik legalább még három másik embernél szerepel, tehát n legalább 4. Ebből az is következik, hogy $n = 4$ értéket csak akkor kaphatunk, ha bármely embert tekintve, annak mindhárom számát éppen további három ember választotta, azaz minden számot éppen négyen választottak. Viszont az összes ember minden számát felírva 30 számot kapunk, ami nem osztható 4-gyel, így ez az eset nem valósulhat meg. 3 pont

Összesen 7 pont

Megjegyzés: Az $n = 5$ esetben megadott számhármasok közül az első 7-et egy Fano sík inspirálta.

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC \neq BC$. A háromszög köré írt kör középpontját jelölje O, magasságpontját pedig M. Az A, B és C csúcsokhoz tartozó magasságok talppontjai legyenek rendre A_1, B_1 és C_1. Jelölje D a C csúcsnak az A_1B_1 egyenesre vonatkozó tükörképét. Igazoljuk, hogy az O, M, D és C_1 pontok egy körre illeszkednek.

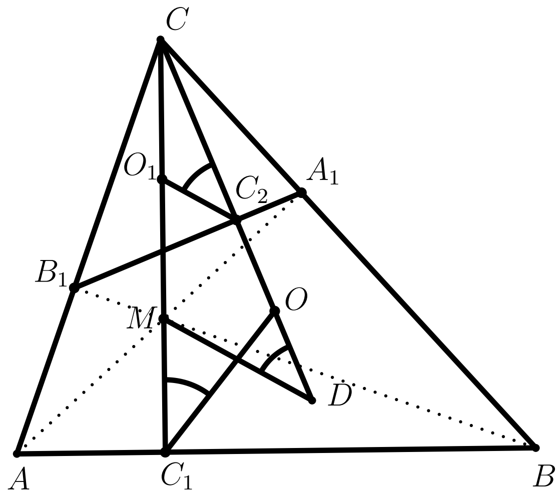
Megoldás: Az AB szakasz Thálész körén rajta van A_1 és B_1, ezért ABA_1B_1 húrnégyszög. A húrnégyszögek szemközti szögeinek összege 180°, ezért $CA_1B_1\angle = BAC\angle = \alpha$ és $CB_1A_1\angle = CBA\angle = \beta$. Azt kaptuk, hogy ABC és A_1B_1C háromszögek hasonlók.

1 pont

Legyen CD és A_1B_1 metszéspontja C_2. Mivel CD merőleges A_1B_1-re, ezért C_2 az A_1B_1C háromszög C-ből induló magasságának talppontja, és így $A_1CD\angle = 90° - \alpha$. A középponti és kerületi szögek tétele miatt a COB háromszögben $COB\angle = 2\alpha$, $CO = BO$ és így $BCO\angle = 90° - \alpha$. Azt kaptuk, hogy C, O és D egy egyenesen vannak. 3 pont

A CM szakasz Thálesz körén rajta van A_1 és B_1. Ennek a Thálész körnek a középpontját, ami egyúttal az A_1B_1C háromszög köré írt kör középpontja, jelölje O_1.

Az egymáshoz hasonló ABC és A_1B_1C háromszögekben a köré írt körök középpontjai O és O_1, a C-hez tartozó magasságok talppontjai C_1 és C_2, ezért $OC_1C\angle = O_1C_2C\angle$. A CMD háromszögben O_1C_2 középvonal, MD párhuzamos O_1C_2-vel, így $MDC\angle = O_1C_2C\angle$. Összegezve azt kaptuk, hogy $MDC\angle = OC_1C\angle$, amiből következik a feladat állítása, hiszen MO ugyanolyan szögű látókörén van D és C_1. 3 pont



Összesen 7 pont

3. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 2$ egész számra:

$$\sqrt{1-\frac{1^2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2^2}{n^2}}+...+\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}>\frac{3n-4}{4}.$$

Megoldás: Adjunk az egyenlőtlenség mindkét oldalához 1-et és szorozzuk be $\frac{1}{n}$-nel. Ekkor a bizonyítandó állítás így alakul:

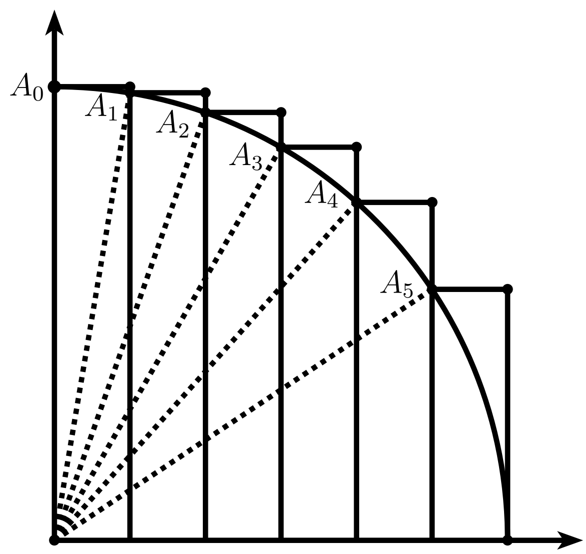
$$\frac{1}{n}\cdot 1+\frac{1}{n}\cdot\sqrt{1-\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1}{n}\cdot\sqrt{1-\frac{2^2}{n^2}}+...+\frac{1}{n}\cdot\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}>\frac{3}{4}.$$

1 pont

Tekintsük a derékszögű koordinátarendszerben az origó középpontú egységsugarú kör első negyedbe eső részét. Legyenek ezen a körön a 0, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$,..., $\frac{n-1}{n}$ abszcisszájú pontok rendre A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}. 2 pont

Ha az x tengely 0 és 1 közé eső szakaszát n egyenlő részre osztjuk és ezekre rendre olyan téglalapokat emelünk, melyek bal felső csúcsa rendre A_0, A_1, ..., akkor ezen téglalapok területének összege éppen egyenlő az átalakított egyenlőtlenség bal oldalával, másrészt ezek a téglalapok fedik a kör negyedét, így területeik összege nagyobb $\frac{\pi}{4}$-nél. (Az alábbi ábra az $n=6$ esetet szemlélteti.) 3 pont

Mivel $\frac{\pi}{4}>\frac{3}{4}$ ezért a bizonyítandó egyenlőtlenséget beláttuk. 1 pont



Összesen 7 pont