Oktatási Hivatal

A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

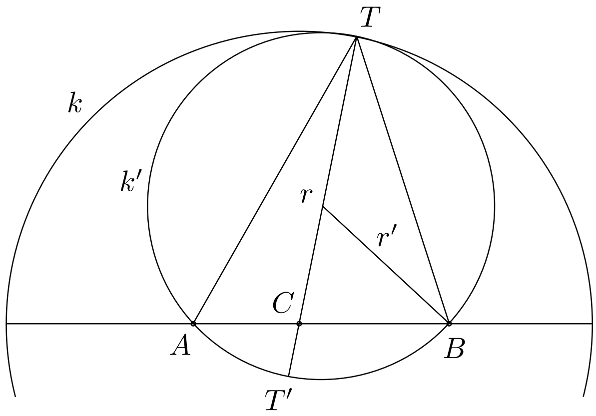
MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Megoldások

1. feladat

A Tatuin bolygó arról híres, hogy az egén két nap ragyog. A Tatuin ugyanis az A és B csillagokból álló kettőscsillag-rendszer körül kering. A bolygót az Erő olyan körpályán tartja, amely a síkjában tartalmazza az AB szakaszt, középpontja az AB szakasz egy C belső pontja, és sugara az AB távolságnál nagyobb. Az A, B, C pontok és a körpálya r sugara ismeretében szerkesszük meg a pályának azt a pontját, ahonnan nézve a Tatuin egén a két nap a lehető legnagyobb szögtávolságra látszik egymástól.

Megoldás: Jelölje k a bolygó pályáját. Azt a T pontot keressük a k körön, amelyre az ATB szög maximális. Az ATB szög mindig hegyesszög, mivel A és B a k egy átmérőjének belső pontjai. Tehát az ATB szög akkor a legnagyobb, amikor az A, T, B pontokon áthaladó k' kör sugara a lehető legkisebb. Ez akkor valósul meg, ha k' belülről érinti a k kört. A keresett T pont a két kör érintkezési pontja, amelyet megkapunk, ha megszerkesztjük azt a k' kört, amely áthalad az A és B ponton, és a k kört belülről érinti.



Tekintsük ennek a k' körnek a C ponton (k középpontján) áthaladó AB és TT' szelőit. A szelődarabok szorzata egyenlő, ezért $AC \cdot CB = TC \cdot CT'$. Mivel $TC = r$, ebből a

$$CT' : AC = CB : r$$

aránypárt kapjuk. Itt CT' kivételével az aránypárban szereplő távolságok adottak, ezért ebből a CT' távolság megszerkeszthető (például a párhuzamos szelők módszerével). A körök érintkezése miatt a TC szakasz áthalad k' középpontján, így $r + CT' = 2r'$, ahol r' jelöli a k' kör sugarát. Ebből az r' távolság megszerkeszthető. Az AB húr és az r' sugár ismeretében a k' kör középpontját, majd a T pontot is meg tudjuk szerkeszteni. Két megoldást kapunk, amelyek az AB egyenesre szimmetrikusan állnak.

2. feladat

Legyen $p \geq 1$ egész szám. Egy egységnyi kerületű körvonalon p darab pontot pirosra színezünk úgy, hogy a kör bármelyik, piros ponton át nem haladó átmérőegyenesének a két oldalán a piros pontok számának az eltérése legfeljebb 100. Bizonyítsuk be, hogy a körvonal bármely pontjának a piros pontoktól mért köri távolságainak az összege legalább $(p/4) - 25$. (Két pont köri távolságán az őket összekötő két körív közül a rövidebbnek az ívhosszát értjük.)

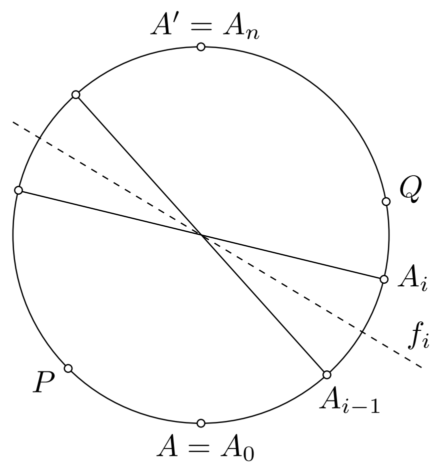
Első megoldás: Ha A és B a körvonal két pontja, jelölje $\widehat{AB}$ a köztük levő köri távolságot. A körvonal bármely A pontjára legyen $t(A)$ a piros pontok A-tól mért köri távolságainak összege.

Vegyük észre először, hogy ha A és A' átellenes pontok a körön, akkor

$$t(A) + t(A') = p/2. \tag{1}$$

Valóban, bármelyik, A-tól és A'-től különböző P piros pont az A és A' közti egyik $1/2$ hosszúságú félkörívet osztja két részre, tehát $\widehat{AP} + \widehat{PA'} = 1/2$ (és ez az egyenlőség nyilvánvalóan fennáll a $P = A$ és $P = A'$ esetekben is). Ezt az egyenlőséget minden P piros pontra felírva és összeadva az (1) formulát kapjuk.

Színezzük kékre a körvonal mindazon pontjait, amelyek valamelyik piros ponttal átellenesek, és maguk nem pirosak. Ezzel a körvonalon véges sok (legfeljebb $2p$ darab) színes, azaz piros vagy kék pontot kaptunk. Legyen A a körvonal tetszőleges pontja, jelölje A' a vele átellenes pontot. Válasszuk ki az egyik félkörívet A és A' között, és soroljuk fel körüljárás szerint a rajta levő színes pontokat hozzájuk véve A-t és A'-t is (akkor is, ha ők maguk nem színesek) az $A = A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n = A'$ sorozatban. Végiglépkedünk ezeken a pontokon, és megbecsüljük, mennyit növekedhet a $t(A_i)$ függvényérték a lépések során.



Legyen $i = 1, 2, \dots, n$-re f_i egy az A_{i-1} és A_i pontokat elválasztó átmérőegyenes (például a szakaszfelező merőleges A_{i-1} és A_i között). Ha valamely P piros pont az f_i egyenesnek az A_{i-1}-et tartalmazó félsíkjában van, akkor

$$\widehat{PA_i} = \widehat{PA_{i-1}} + \widehat{A_{i-1}A_i}, \tag{2}$$

hiszen ekkor mindhárom pont az A_i-n átmenő átmérőegyenes szerinti ugyanazon félkörön van, mégpedig P, A_{i-1}, A_i sorrendben (a $P = A_{i-1}$ egybeesést megengedve). Ha pedig egy Q piros pont az f_i másik félsíkjában van, akkor hasonló módon

$$\widehat{QA_i} = \widehat{QA_{i-1}} - \widehat{A_{i-1}A_i}, \tag{3}$$

ahol kivonás áll, mivel a sorrend most A_{i-1}, A_i, Q (esetleg $Q = A_i$).
Hasonlítsuk össze a $t(A_{i-1})$ és $t(A_i)$ összegeket a (2) és (3) formulák felhasználásával:

$$\begin{aligned} t(A_i) - t(A_{i-1}) &= \Big(\sum_P \widehat{PA_i} + \sum_Q \widehat{QA_i}\Big) - \Big(\sum_P \widehat{PA_{i-1}} + \sum_Q \widehat{QA_{i-1}}\Big) = \\ &= \sum_P \big(\widehat{PA_i} - \widehat{PA_{i-1}}\big) + \sum_Q \big(\widehat{QA_i} - \widehat{QA_{i-1}}\big) = \\ &= \sum_P \widehat{A_{i-1}A_i} - \sum_Q \widehat{A_{i-1}A_i}, \end{aligned} \tag{4}$$

ahol az összegzésekben P, illetve Q az f_i egyenes két félsíkjában fekvő piros pontokat futja be. A (4) képletben az $\widehat{A_{i-1}A_i}$ köri távolságnak csak annyi példányban vett összege marad meg (pozitív vagy negatív előjellel), amennyivel több piros pont van f_i egyik félsíkjában, mint a másikban.
A feladat feltevése szerint a két félsíkban a piros pontok száma legfeljebb 100-zal térhet el egymástól, ezért a (4) képletből a

$$t(A_i) - t(A_{i-1}) \le 100 \cdot \widehat{A_{i-1}A_i}$$

egyenlőtlenség adódik, amely minden $i = 1, 2, \dots, n$-re fennáll. Összeadva őket a

$$t(A') - t(A) = \sum_{i=1}^{n} \big(t(A_i) - t(A_{i-1})\big) \le 100 \cdot \sum_{i=1}^{n} \widehat{A_{i-1}A_i} = 100 \cdot \widehat{AA'} = 100 \cdot (1/2) = 50$$

egyenlőtlenség, vagyis $t(A) - t(A') \ge -50$ következik. A megoldás elején megállapított (1) képlettel ezt összevetve $t(A) \ge (p/4) - 25$ adódik. Ezzel a bizonyítandó egyenlőtlenséget beláttuk.

Második megoldás: Használjuk az első megoldásbeli $t(A)$ jelölést a szóban forgó távolságösszegre. Nevezzük vágásnak a piros pontok halmazának egy a piros pontok egyikén sem áthaladó átmérőegyenessel történő kettéosztását. Legyen m a maximális különbség, amely valamely vágásnál a két részhalmaz elemszáma között előállhat. Be fogjuk bizonyítani, hogy minden A pontra $t(A) \ge (p - m)/4$. A feladat feltevése szerint $m \le 100$, ezért ebből következik a $(p/4) - 25$ alsó korlát.

Legyen k a lehető legegyenlőtlenebb vágásnál a kisebb részhalmazban maradó piros pontok száma. Ekkor $m = (p-k)-k$, azaz $k = (p-m)/2$. Azt kell tehát belátnunk, hogy minden A-ra $t(A) \geq k/2$. Nyilván feltehetjük, hogy $k > 0$.

Minden vágás mindkét oldalán tehát legalább k darab, és legfeljebb $p-k$ darab piros pont van. Legyen A tetszőlegesen adott pont a körvonalon. Soroljuk föl a piros pontokat pozitív körüljárás szerint egy $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sorozatban úgy, hogy az A pont az A_pA_1 ívre essen. (Ha az A pont piros, akkor legyen $A_1 = A$.)

Tekintsünk most a ciklikus felsorolásban egymás után következő $k+1$ piros pontot. Ezeket mindig jelölhetjük $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{i+k}$-val, ha megállapodunk abban, hogy az indexeket modulo p értjük. Vegyük észre, hogy

(∗) bármely i-re az A_i-ből pozitív körüljárás szerint A_{i+k}-ba vezető ív hossza $\leq 1/2$ (azaz legfeljebb félkörnyi).

Valóban, a szóban forgó íven a végpontjaival együtt $k+1$ piros pont van. Ha ez az ív hosszabb volna $1/2$-nél, akkor létezne olyan vágás, amely mindkét végpontját leválasztaná róla, és így a vágás egyik oldalán legfeljebb $k-1$ piros pont maradna, ami lehetetlen.

Jelöljük A'-vel az A-val átellenes pontot a körön, és tegyük föl, hogy ez a pont a pozitív körüljárás szerinti felsorolásban az A_j és A_{j+1} piros pontok közé esik (az $A' = A_{j+1}$ egybeesést megengedve, ha A' piros pont). Az A_p-től pozitív irányban A_k-ig terjedő ív a (∗) észrevétel szerint nem lehet félkörnél hosszabb, emiatt A_k megelőzi A'-t a körüljárás szerint, tehát $k \leq j$. Hasonló módon az A_{p-k+1}-től A_1-ig terjedő ívet használva $j+1 \leq p-k+1$, azaz $j \leq p-k$ adódik.

Állítsuk párba minden $i = j-k+1, j-k+2, \ldots, j$ indexre az A_i pontot A_{i+k}-val. Ezzel a piros pontok közül k darab diszjunkt párt választottunk ki. Tekintsük az A pont köri távolságát valamely párt alkotó két piros ponttól, A_i-től és A_{i+k}-tól. A fentiekből következő $1 \leq i \leq j$, illetve $j+1 \leq i+k \leq p$ egyenlőtlenségek miatt A_i és A_{i+k} mindig az AA' átmérő két különböző oldalára (esetleg valamelyik végpontjába) esik, ezért a két szóban forgó köri távolságot egy-egy A-ból induló, egymást át nem fedő ív adja. Ha A_i és A_{i+k} átellenes, akkor e két köri távolság összege $1/2$. Ha nem, akkor az A pont a (∗) észrevétel miatt a két pont közti $1/2$-nél hosszabb íven van, és így a két köri távolság összege $1/2$-nél nagyobb.

Az A pontnak az összes piros ponttól mért köri távolságainak az összege tehát legalább a párok számának és $1/2$-nek a szorzata, azaz valóban legalább $k/2$.

3. feladat

Létezik-e minden k természetes számra olyan pozitív egészekből álló k-elemű halmaz, amelynek minden nemüres részhalmazában az elemek összege teljes hatvány? (Egy számot teljes hatványnak nevezünk, ha a^q alakban írható, ahol a és q természetes számok, $q \geq 2$.)

Első megoldás: Megmutatjuk, hogy minden k-ra létezik a kívánt tulajdonságú számhalmaz. Teljes indukciót alkalmazunk k szerint, és azt is előírjuk, hogy a keresett halmaz minden eleme 1-nél nagyobb legyen. A $k=1$ eset nyilvánvaló, például a $\{4\}$ halmaz ilyen.

Tegyük föl, hogy valamilyen $k \geq 1$ mellett létezik egy H számhalmaz a kívánt tulajdonságokkal. A H halmazból kiindulva el fogunk készíteni egy $k+1$ elemből álló megfelelő

H' halmazt. Képezzünk összegeket H összes nemüres részhalmazából, és írjuk föl ezeket a számokat $a_1^{q_1}$, $a_2^{q_2}$, $\dots$, $a_n^{q_n}$ alakban, ahol mindegyik a_i és q_i 1-nél nagyobb egész szám.

Legyen r a q_i számok egy közös többszöröse, és $b_i = a_i^{q_i} + 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Válasszunk n különböző prímszámot, p_1-et, p_2-t, $\dots$, p_n-et úgy, hogy egyikük se legyen r-nek osztója. Azt állítjuk, hogy létezik olyan m pozitív egész, amelyre $m^r b_i$ egy egész szám p_i-edik hatványa minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén.

Valóban, ilyen m számot $m = b_1^{s_1} b_2^{s_2} \dots b_n^{s_n}$ alakban állíthatunk elő, ahol minden i-re az s_i kitevő az alábbi n darab kongruencia közös megoldása:

$$\begin{aligned} rs_i + 1 &\equiv 0 \pmod{p_i} \\ s_i &\equiv 0 \pmod{p_j}, \quad \text{ha } j \neq i. \end{aligned}$$

Mivel a modulusok páronként különböző prímek, a kínai maradéktétel garantálja, hogy ennek a kongruenciarendszernek létezik s_i pozitív megoldása. Ha $m = b_1^{s_1} b_2^{s_2} \dots b_n^{s_n}$ ezekkel az s_i kitevőkkel, akkor $m^r b_i = b_1^{rs_1} \dots b_i^{rs_i+1} \dots b_n^{rs_n}$. Itt mindegyik kitevő osztható p_i-vel, tehát $m^r b_i$ teljes p_i-edik hatvány.

A keresett $(k+1)$-elemű H' halmazt most már úgy állíthatjuk elő, hogy H mindegyik elemét megszorozzuk az m^r hatvánnyal, és $(k+1)$-edikként hozzávesszük még magát az m^r számot. Az $1 \notin H$ feltevés miatt így $(k+1)$ különböző számot kapunk, valamint nyilvánvalóan továbbra is $1 \notin H'$.

Ha H' egy nemüres részhalmazában m^r nem szerepel, akkor ezeknek a számoknak az összege valamely H-beli részösszegnek, azaz egy $a_i^{q_i}$ alakú számnak az m^r-szerese. Ez a szám $q_i \mid r$ miatt teljes q_i-edik hatvány.

Végül ha H' valamely nemüres részhalmaza az m^r számot tartalmazza, akkor elemeinek az összege vagy maga m^r, ami teljes r-edik hatvány, vagy pedig valamilyen i-re egyenlő az $m^r a_i^{q_i} + m^r = m^r b_i$ számmal, ami teljes p_i-edik hatvány.

Második megoldás: Bármely adott k esetén elő fogunk állítani egy a feladat kívánalmainak megfelelő H halmazt, mégpedig olyan alakban, hogy egy alkalmas x természetes szám első k többszörösét tekintjük: $H = \{x, 2x, \dots, kx\}$.

Az ebből a halmazból a feladat szerint származtatandó összegek pontosan az x, $2x$, $\dots$, mx számok, ahol $m = k(k+1)/2$. Legyen az első m prímszám p_1, p_2, $\dots$, p_m. Az x számot

$$x = 1^{r_1} \cdot 2^{r_2} \cdot \dots \cdot m^{r_m}$$

alakban keressük, ahol minden $i = 1, 2, \dots, m$-re

$$\begin{aligned} r_i + 1 &\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad \text{és} \\ r_i &\equiv 0 \pmod{p_j}, \quad \text{ha } j \neq i. \end{aligned}$$

Ennek a kongruenciarendszernek létezik pozitív megoldása a kínai maradéktétel alapján, de akár explicit megoldást is adhatunk az

$$r_i = P^{p_i - 1} - \left(\frac{P}{p_i}\right)^{p_i - 1}$$

képlettel, ahol $P = p_1 p_2 \dots p_m$. (A kis Fermat-tétel miatt a levonandó 1-gyel kongruens modulo p_i, ezért az első kongruencia teljesül, a többi pedig magától értetődik.)

A konstrukció folytán bármely $i = 1, 2, \dots, m$-re az ix részösszeg teljes p_i-edik hatvány, tehát a H halmaz valóban megfelelő.