

Megjegyzések a háromszögbeírt szabályos háromszögekről

Definíció Azt mondjuk, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög az ABC háromszögbe van írva, ha A_1 a BC , B_1 az AC , C_1 a BA oldalegyenesre esik.

Az alábbiakban az ABC háromszögbe írt *szabályos* háromszögeket vizsgáljuk. Ezek között vannak az ABC háromszöggel azonos és ellentétes körüljárásúak is. Az előbbieket halmazzát jelölje $\mathcal{H}_1$, az utóbbiakét $\mathcal{H}_2$.

Tétel

I. Ha az ABC háromszögben $ACB\angle \neq 120^\circ$, akkor az AB oldal bármely C_1 pontjára egy és csakis egy olyan $\Delta_1 \in \mathcal{H}_1$ háromszög van, amelynek C_1 az AB egyenesre illeszkedő csúcsa.

Ha $ACB\angle = 120^\circ$ és ezen szög szögfelezőjének AB egyenessel való metszéspontja C_1 , akkor a végtelen sok $\mathcal{H}_1$ -beli szabályos háromszög mindegyikének C_1 az AB egyenesre illeszkedő csúcsa.

Ha az ABC háromszögben $ACB\angle \neq 60^\circ$, akkor az AB oldal bármely C_2 pontjára egy és csakis egy olyan $\Delta_2 \in \mathcal{H}_2$ háromszög van, amelynek C_2 az AB egyenesre illeszkedő csúcsa.

Ha az ABC háromszög szabályos, akkor $\mathcal{H}_2$ üres. Ha viszont $ACB\angle = 60^\circ$, de az ABC háromszög nem szabályos, akkor végtelen sok $\mathcal{H}_2$ -beli szabályos háromszög van, és ezek mindegyikében az AB egyenesre illeszkedő csúcs az $ACB\angle$ külső szögfelezőjének és az AB egyenesnek a metszéspontja.

II. Ha I-ben $C_1 = C_2$, akkor a C csúcs illeszkedik az $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ szabályos háromszögek O_1 , O_2 középpontjait összekötő egyenesre.

III. Bármely ABC háromszöghöz létezik egy H_1 és egy H_2 pont, amelyekre bármely $A_1B_1C_1 \in \mathcal{H}_1$ esetén az AB_1C_1 , BC_1A_1 , CA_1B_1 háromszögek körülírt körei átmennek H_1 -en, míg bármely $A_2B_2C_2 \in \mathcal{H}_2$ esetén az AB_2C_2 , BC_2A_1 , CA_1B_1 háromszögek körülírt körei átmennek H_2 -n.

IV. Az ABC háromszög körülírt körének O középpontja illeszkedik a H_1H_2 egyenesre.

V. A H_1 pontból a $\mathcal{H}_1$ háromszögek közül bármelyik kettő egymásba forgatva nyújtható. Ugyanez a H_2 pontra és a $\mathcal{H}_2$ halmazra is teljesül.

VI. A $\mathcal{H}_1$ háromszögek középpontjainak és a $\mathcal{H}_2$ háromszögek középpontjainak is egy-egy egyenes – a továbbiakban h_1 és h_2 – a mértani helye.

VII. Az V-ben említett h_1 , h_2 egyenesek egymással párhuzamosak és merőlegesek az ABC háromszög Euler egyenesére.

VIII. A H_1 pont és annak az ABC háromszögre vonatkozó H'_1 izogonális konjugáltja úgy helyezkedik el, hogy $H_1H'_1$ párhuzamos az Euler egyenessel, $H_1H'_1$ felezőmerőlegese h_1 , $H_1H'_1$ felezőpontja az ABC -be írt legkisebb szabályos háromszög középpontja.

Bizonyítások

1. Lemma

Ha z_1 és z_2 tetszőleges komplex számok, akkor a rajtuk átmenő egyenes pontjai azok és csakis azok a z komplex számok, amelyekhez vannak olyan x_1 , x_2 valós számok, melyekre:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 z_1 + x_2 z_2 &= z. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Lemma

Ha ζ és d tetszőleges komplex számok, de $\zeta \neq 0$, akkor annak algebrai feltétele, hogy a z komplex szám illeszkedik a d -n átmenő ζ irányú egyenesre:

$$\overline{\zeta}z - \zeta\overline{z} = \overline{\zeta}d - \zeta\overline{d}. \tag{2}$$

3. Lemma

Ha A és B egymástól különböző egységnyi komplex számok, akkor annak algebrai feltétele, hogy a z komplex szám illeszkedik az AB egyenesre:

$$z + AB\overline{z} = A + B, \tag{3}$$

vagy kissé másképp:

$$\overline{A}z + B\overline{z} = 1 + \overline{A}B. \tag{4}$$

4. Lemma

Ha A , B és C egymástól különböző egységnyi komplex számok, akkor az ABC háromszög körülírt körének középpontja a 0, a háromszög magasságpontja az $A + B + C$ komplex számnak felel meg.

5. Lemma

Ha A , B és C egymástól különböző egységnyi komplex számok, akkor annak algebrai feltétele, hogy a z_1 , z_2 komplex számok összekötő egyenese merőleges az ABC háromszög Euler egyenesére:

$$(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})z_1 + (A + B + C)\overline{z_1} = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})z_2 + (A + B + C)\overline{z_2} \tag{5}$$

Az alábbiakban feltesszük, hogy az ABC háromszög pozitív körüljárású.

I. B_1 a $BC = a$ oldalegyenes C_1 pont körüli 60° -kal való a' elforgatottjának a $CA = b$ egyenessel való metszéspontja, míg A_1 -annak visszaforgatott képe. A megfelelő $\mathcal{H}_2$ -beli háromszög hasonló módon származtatható, csak mindig az ellenkező irányban kell forgatni. Ebből az I. Tétel minden részállítása következik.

II.

Az alábbi erősebb tétel is igaz: *Ha az ABC , $A'B'C'$ háromszögek hasonlóak, de ellenkező körüljárásúak és az AA' , BB' , CC' egyenesek egy ponton mennek át, akkor az MM' egyenes is átmegy ezen a ponton, ahol M és M' az ABC illetve az $A'B'C'$ háromszög magasságpontja.*

Ez az erős tétel a következő két lemmát múlik:

6. Lemma Ha τ irányításváltó nagyítás vagy hasonlóság, és A tetszőleges pont, akkor az $\{a \cap \tau(a) \mid \text{egyenes, melyre } A \in a\}$ halmaz derékszögű hiperbola.

7. Lemma Ha egy háromszög csúcsai illeszkednek egy derékszögű hiperbolára, akkor a háromszög magasságpontja is illeszkedik arra a hiperbolára.

A továbbiakban a komplex számsíkon dolgozunk, a csúcsok betűjele egyúttal egy-egy komplex számot is jelöl.

VI. Tegyük fel, hogy $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ $\mathcal{H}_1$ -beli háromszögek, középpontjaik O_1 és O_2 , $O_1A_1 = u$, $O_2A_2 = v$, így az $\omega = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$ primitív harmadik egységgyökkel

$$A_1 = O_1 + u, \quad B_1 = O_1 + \omega u, \quad C_1 = O_1 + \omega^2 u, \quad (6)$$

míg

$$A_2 = O_2 + v, \quad B_2 = O_2 + \omega v, \quad C_2 = O_2 + \omega^2 v. \quad (7)$$

Ha x_1 és x_2 olyan valós számokkal, melyek összege 1, akkor az

$$O' = x_1 O_1 + x_2 O_2 \quad (8)$$

pont az 1. Lemma szerint az $O_1O_2 = h_1$ egyenes pontja, míg az $x_1 u + x_2 v = w$ jelöléssel

$$\begin{aligned} A' &= x_1 A_1 + x_2 A_2 = x_1 O_1 + x_2 O_2 + x_1 u + x_2 v = O' + w \\ B' &= x_1 B_1 + x_2 B_2 = x_1 O_1 + x_2 O_2 + x_1 \omega u + x_2 \omega v = O' + \omega w \\ C' &= x_1 C_1 + x_2 C_2 = x_1 O_1 + x_2 O_2 + x_1 \omega^2 u + x_2 \omega^2 v = O' + \omega^2 w \end{aligned} \quad (9)$$

pontok rendre az $A_1A_2 = BC$, $B_1B_2 = CA$, $C_1C_2 = AB$ egyenes pontjai és jobb oldali alakjuk szerint egy O' középpontú pozitív körüljárású háromszöget alkotnak.

Ha tekintjük x_1 és x_2 összes olyan értékeit, melyek összege 1, akkor (9) utolsó sorában C' -ként előállítjuk a $C_1C_2 = AB$ egyenes összes pontját, így megkapjuk $\mathcal{H}_1$ összes háromszögét. Az így kapott $A'B'C' \in \mathcal{H}_1$ háromszögek (8)-ben leírt O' középpontjai befutják az O_1O_2 egyenest, tehát a keresett mértani hely valóban egyenes.

Ha a $\mathcal{H}_2$ háromszögeinek középpontjait keressük, akkor ugyanígy kell eljárunk, csak az ω egységgyökök helyére a fenti levezetésben mindenhol annak konjugáltját, az $\omega^2 = \bar{\omega} = \cos 120^\circ - i \sin 120^\circ$ egységgyököt kell írni.

III és V. Legyen H_1 a fenti $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ háromszögek hasonlósági középpontja, tehát az a pont, ahonnan $A_1B_1C_1$ háromszög az $A_2B_2C_2$ háromszögbe forgatva nyújtható. Reiman István „Fejezetek az elemi geometriából” című könyvéből kiderül, hogy azonos körüljárású egymáshoz hasonló háromszögekhez mindig van ilyen pont, ha azok nem egymás eltoltjai¹.

Az említett könyvből az is kiderül², hogy ha valamely H_1 körüli forgatva nyújtásnál a P_1 pont képe P_2 , míg a Q_1 pont képe Q_2 , akkor a P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_1P_2 , Q_1Q_2 egyenesek közül bármelyiket elhegyva a maradék három által határolt háromszög körülírt köre átmegy H_1 -en.

Ezt az összefüggést most a $P_1 = A_1$, $Q_1 = B_1$, $P_2 = A_2$, $Q_2 = B_2$ pontokra alkalmazva azt kapjuk, hogy az A_1B_1 , A_1A_2 , B_1B_2 egyenesek alkotta A_1B_1C és az A_2B_2 , A_1A_2 , B_1B_2 egyenesek alkotta A_2B_2C háromszög körülírt köre is átmegy H_1 -en, H_1 ezen két kör C -től különböző metszéspontja.

A H_1 körüli forgatva nyújtás a teljes $A_1B_1C_1$ háromszöget átviszi $A_2B_2C_2$ -be. Alkalmazhatjuk tehát az összefüggést a $P_1 = B_1$, $Q_1 = C_1$, $P_2 = B_2$, $Q_2 = C_2$ pontokra vagy a $P_1 = C_1$, $Q_1 = A_1$, $P_2 = C_2$, $Q_2 = A_2$ pontokra is. Ezekben az esetekben azt kapjuk, hogy H_1 a B_1C_1A , B_2C_2A , C_1A_1B , C_2A_2B háromszögek körülírt körére is illeszkedik.

Az A_1B_1C , B_1C_1A , C_1A_1B háromszögek körülírt köréi egymást páronként metszik a B_1 , C_1 , A_1 pontok közül egyben-egyben, így a három körnek együtt legfeljebb egy közös pontja lehet. Ez van is, a H_1 , amit tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög $A_2B_2C_2$ nélkül is meghatároz.

Ezzel az III. és V. tételt egyszerre igazoltuk.

Feltehetjük, hogy vizsgált háromszögünk körülírt körének középpontja a komplex számsík origója és a körülírt kör az egységgör. Az O_1 középpontú $A_1B_1C_1 \in \mathcal{H}_1$ háromszöggel kapcsolatban a(6) egyenletben leírt összefüggéseket alkalmazzuk.

Az $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ relációk így írhatók át algebrai formába:

$$\begin{aligned} (O_1 + u) &+ \overline{BC(O_1 + \bar{u})} &= B + C \\ (O_1 + \omega u) &+ \overline{CA(O_1 + \bar{\omega} \bar{u})} &= C + A \\ (O_1 + \omega^2 u) &+ \overline{AB(O_1 + \bar{\omega}^2 \bar{u})} &= A + B \end{aligned} \quad (10)$$

¹Itt nem eltoltjai egymásnak, hiszen az $A_1A_2 = BC$, $B_1B_2 = CA$, $C_1C_2 = AB$ egyenesek nem párhuzamosak

²52. oldal 2.8.3. ábra

Ezekből az egyenletekből kiejthetők u és $\overline{u}$, ha rendre a $CA - AB\omega$, $AB - BC\omega$, $BC - CA\omega$ számokkal szorozzuk őket, majd összeadjuk a hármat miközben felhasználjuk, hogy $\omega^2 = \overline{\omega}$ és $\omega = \overline{\omega^2}$, továbbá $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Kapjuk, hogy

$$O_1 [CA + AB + BA - \omega(AB + BC + CA)] + \overline{O_1} ABC [A + B + C - \omega(A + B + C)] = \\ 3ABC(1 - \omega) + (C^2A + A^2B + B^2C) - \omega(B^2A + A^2C + C^2B),$$

amiből $ABC(1 - \omega)$ -val való leosztás után kapjuk a

$$O_1(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) + \overline{O_1}(A + B + C) = 3 + \frac{C\overline{B} + B\overline{A} + A\overline{C} - \omega(B\overline{C} + C\overline{A} + A\overline{B})}{1 - \omega} \quad (11)$$

összefüggést. Ebben a jobb oldalon álló mennyiség csak az ABC háromszög adataitól függ, az $A_1B_1C_1 \in \mathcal{H}_1$ háromszög választásától független, így az 5. Lemma alapján igazolást nyert, hogy a $\mathcal{H}_1$ -beli háromszögek középpontjainak egyenesre merőleges az Euler egyenesre.

Elemente der Mathematik Volume 57 (2002), Number 1, 26-31, DOI: 10.1007/PL00000556