

I/S. 54.

Nyelv: C++

Környezet: Visual Studio 2019

Bizonyítsuk be, hogy ha a gyöngyök száma nem osztható 3-mal, akkor mindig meg lehet csinálni, hogy minden gyöngyszem ugyanolyan színű legyen! Használjuk a következő eljárást: Vegyük az első kék gyöngyöt és azt, illetve az utána lévő 2 gyöngyöt cseréljük le ellenkező színűekre! Folytassuk az eljárást a láncan negatív irányba haladva addig amíg csak az utolsó 3 gyöngy között lesz kék! (pl.: PKKPPKKPKP → PPPKPPKKPKP → PPPPKKKKKPKP → PPPPPPPKPK)

Vizsgáljuk az utolsó 3 golyót! Ekkor 4 eset van:

- 1.) Mindegyik kék: ekkor ezt a hármat pirosra cserélve egyszínű lesz a lánc.
- 2.) Csak az egyik kék: ekkor ha $3k + 1$ hosszú a lánc, akkor a maradék $3k$ piros golyót kékre változtatjuk k lépésben és készen vagyunk. Ha $3k + 2$ hosszú a lánc akkor a kék golyót és a tőle jobbra lévő 2 golyót lecseréljük, vagyis 2 egymás melletti kék golyó és $3k$ piros golyó lesz, amiket k lépésben kékre cserélünk, és készen vagyunk.
- 3.) Cseréljük le a két kék golyót és egy melléjük vagy közéjük eső pirosat! Ekkor a 2. eset miatt készen vagyunk.
- 4.) Mindegyik piros: Ekkor minden golyó egyszínű, vagyis készen vagyunk

Ha $3k$ hosszú a lánc, akkor számozzuk be a golyókat úgy hogy az n . golyó az n 3-mal osztási maradékát kapja! (1. golyó: 1, 2. golyó: 2, 3. golyó: 0 ... $3k - 1$. golyó: 2, $3k$. golyó: 0)

Állítás: Akkor és csak akkor lehet $3k$ hosszú lánc esetén egyszínűre cserélni a gyöngyöket, ha a 0-ás, 1-es és 2-es számozású gyöngyök között megegyezik a kékek számának a paritása

Bizonyítás:

Először bizonyítsuk be, hogy ez egy szükséges feltétel! Minden lépésben mindegyik csoportban 1-gyel változtatjuk a kékek számát, hiszen 3 egymás melletti golyó, 3 különböző csoportba tartozik. Vagyis ha az egyik csoport paritása nem egyezik meg a másikéval, akkor az azt követő lépésben sem fog. Mivel egyszínűnek kellene lennie a gyöngysornak, és mindegyik csoportba ugyanannyi gyöngy tartozik (hiszen a gyöngyök száma osztható 3-mal), így mindegyik csoport paritásának meg kell, hogy egyezzen. Tehát ez egy szükséges feltétel, bizonyítsuk be, hogy elégséges is! Használjuk a fentiekben leírt eljárást! Ez után csak az utolsó 3 között van kék gyöngy. Ha mindegyik csoportban megegyezik a kékek számának a paritása és csak az utolsó 3 gyöngy között van kék, akkor az a 3 gyöngy vagy mind kék (ezeket pirosra váltva kész vagyunk), vagy mind piros (ekkor mindegyik golyó piros, vagyis készen vagyunk). Vagyis elégséges a feltétel.