A.725.

Schrettner Jakab
Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 11. o. t.
sch.jakab@gmail.com

Legyen $\mathbb{R}^+$ *a pozitív valós számok halmaza. Határozzuk meg azokat az* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *függvényeket, melyekre minden* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *esetén teljesül az alábbi egyenlőség:*

$$f(xy + f(y)^2) = f(x)f(y) + yf(y)$$

Jelöljük $P(x, y)$-nal azt az állítást, mely szerint
$f(xy + f(y)^2) = f(x)f(y) + yf(y)$.

Először megmutatjuk, hogy $f(1) = 1$. Ehhez tegyük fel, hogy $f(1) = c \neq 1$. Ekkor $P(x, 1)$-ből kapjuk, hogy

$$f(x + c^2) = cf(x) + c$$

Innen teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden n pozitív egészre

$$f(x + nc^2) = c^n f(x) + \frac{c(c^n - 1)}{c - 1}$$

Az előző állítás éppen ezt adja $n = 1$-re, és ha egy adott n-re igaz, akkor $P(x + nc^2, 1)$ miatt:

$$f(x + nc^2 + c^2) = c\left(c^n f(x) + \frac{c(c^n - 1)}{c - 1}\right) + c = c^{n+1}f(x) + \frac{c(c^{n+1} - 1)}{c - 1}$$

ami épp a bizonyítandó állítás.

Most legyen m egy rögzített pozitív egész, és tekintsük $P(x + nc^2, m)$-t:

$$f((x+nc^2)m+f(m)^2) = f(x+nc^2)f(m)+mf(m) = f(m)\left(m + c^n f(x) + \frac{c(c^n - 1)}{c - 1}\right)$$

Ugyanakkor $(x + nc^2)m + f(m)^2 = (xm + f(m)^2) + nm \cdot c^2$, azaz az indukcióval kapott állítást alkalmazva az nm pozitív egészre:

$$f((xm + f(m)^2) + nm \cdot c^2) = c^{nm} f(xm + f(m)^2) + \frac{c(c^{nm} - 1)}{c - 1}$$

A fenti két egyenlet bal oldalai megegyeznek, tehát a jobb oldalak is egyenlőek:

$$f(m)\left(m + c^n f(x) + \frac{c(c^n - 1)}{c - 1}\right) = c^{nm} f(xm + f(m)^2) + \frac{c(c^{nm} - 1)}{c - 1}$$

Ugyanakkor $P(x,m)$ miatt $f(xm+f(m)^2)=f(x)f(m)+mf(m)$, amit a fenti egyenletbe beírva:

$$f(m)\left(m+c^n f(x)+\frac{c(c^n-1)}{c-1}\right)=c^{nm}f(m)(f(x)+m)+\frac{c(c^{nm}-1)}{c-1}$$

Átrendezve:

$$f(x)[f(m)(c^{nm}-c^n)]=mf(m)+\frac{f(m)c(c^n-1)}{c-1}-c^{nm}mf(m)-\frac{c(c^{nm}-1)}{c-1}$$

Itt az egyenlet jobb oldala rögzített m mellett konstans, és ha $c\neq 1$, akkor megfelelő m mellett $c^{nm}-c^n\neq 0$, azaz átoszthatunk $f(m)(c^{nm}-c^n)$-nel (a függvény képhalmaza a pozitív valós számok, ezért $f(m)>0$) és kaphatjuk, hogy $f(x)$ konstans. Ugyanakkor ha $f(x)=a$ minden x pozitív valós számra, akkor $P(x,y)$ miatt

$$a=a^2+ay$$

minden y pozitív valós számra, ami nyilván nem lehet ($y=1$-re kapjuk, hogy $a^2=0$, azaz $a=0$, ami nem lehet, hiszen a függvény pozitív értékű). Ezek szerint tehát csak $c=1$ lehet, tehát $f(1)=1$.

Ekkor $P(x,1)$-ből $f(x+1)=f(x)+1$, ahonnan indukcióval látható, hogy minden n pozitív egészre $f(x+n)=f(x)+n$: $n=1$-re igaz, és ha egy adott n-re is az, akkor $P(x+n,1)$ miatt

$$f(x+n+1)=f(x+n)+1=f(x)+n+1$$

ami épp a bizonyítandó állítás. Ebből $f(1)=1$ miatt az is következik, hogy minden n pozitív egészre $f(n)=n$, mivel $n>1$-re
$f(n)=f(1+(n-1))=f(1)+n-1=n$.

Legyen ismét m egy pozitív egész, ekkor $P(x,m)$-ből:

$$f(mx+m^2)=f(m)f(x)+mf(m)=mf(x)+m^2$$

Ugyanakkor a fenti, indukcióval kapott állítást felírva az m^2 pozitív egészre:

$$f(mx+m^2)=f(mx)+m^2$$

Az előző két egyenlet bal oldala egyenlő, tehát a jobb oldalak is:

$$f(mx)+m^2=mf(x)+m^2$$

$$f(mx)=mf(x)$$

Ami tehát teljesül minden m pozitív egészre és x pozitív valósra. Most legyen r pozitív racionális szám, azaz $r = \frac{p}{q}$, ahol p, q pozitív egészek. Ekkor

$$pf(x) = f(px) = f\left(q \cdot \left(\frac{p}{q} \cdot x\right)\right) = qf\left(\frac{p}{q} \cdot x\right)$$

Azaz q-val átosztva:

$$\frac{p}{q} \cdot f(x) = f\left(\frac{p}{q} \cdot x\right)$$

$$rf(x) = f(rx)$$

Ami teljesül minden r pozitív racionális és x pozitív valós számra. Ebből minden $r > 0$ racionális számra $f(r) = f(r \cdot 1) = rf(1) = r$. Ugyanakkor ha r pozitív racionális szám, akkor

$$\frac{1}{r}f(x+r) = f\left(\frac{1}{r} \cdot x + 1\right) = f\left(\frac{1}{r} \cdot x\right) + 1 = \frac{1}{r}f(x) + 1$$

$$f(x+r) = f(x) + r$$

Ami így szintén teljesül minden pozitív racionális r-re és pozitív valós x-re.

Ha r pozitív racionális szám, akkor $P(x+r, y)$-ból:

$$f((x+r)y + f(y)^2) = f(x+r)f(y) + yf(y) = f(x)f(y) + rf(y) + yf(y)$$

Felhasználva, hogy $f(x)f(y) + yf(y) = f(xy + f(y)^2)$ a $P(x, y)$ miatt:

$$f((x+r)y + f(y)^2) = rf(y) + f(xy + f(y)^2)$$

$$f(ry + xy + f(y)^2) = rf(y) + f(xy + f(y)^2)$$

Vegyünk egy tetszőleges $z > f(y)^2$ valós számot. Ekkor y ismeretében megválaszthatjuk úgy az x pozitív valós számot, hogy $xy + f(y)^2 = z$ legyen (ekkor $x = \frac{z - f(y)^2}{y}$), ilyenkor a fenti egyenlet

$$f(z + ry) = f(z) + f(ry)$$

alakú, ami tehát teljesül minden y, z pozitív valós számpárra, melyekre $z > f(y)^2$, továbbá $r > 0$ racionális számokra. Tovább alakítva:

$$rf\left(\frac{z}{r} + y\right) = f(z) + rf(y)$$

$$f\left(\frac{z}{r} + y\right) = \frac{f(z)}{r} + f(y)$$

Tekintsünk tetszőleges $a, b > 0$ valós számokat, és legyen t olyan pozitív racionális szám, melyre $at > f(b)^2$ (ilyen nyilván van). Ekkor a fenti egyenlet szerint teljesül, hogy

$$f\left(\frac{at}{t} + b\right) = \frac{f(at)}{t} + f(b)$$
$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

Ami tehát teljesül minden $a, b > 0$ valós számpárra.

Azt állítjuk, hogy f-nek szigorú monoton növekvőnek kell lennie. Legyenek $x < y$ pozitív való számok. Ekkor van olyan d pozitív valós, hogy $y = x + d$, azaz

$$f(y) = f(x+d) = f(x) + f(d)$$

És mivel az f függvény pozitív értékű, ezért $f(d) > 0$, azaz
$f(y) = f(x) + f(d) > f(x)$, így $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$.

Láthattuk, hogy minden pozitív racionális r számra $f(r) = r$. Tekintsünk egy tetszőleges $v > 0$ valós számot. Ekkor létezik pozitív racionális számoknak olyan növekvő r_n sorozata, melyre

$$\lim_{n\to\infty} r_n = v$$

illetve van pozitív racionális számoknak olyan csökkenő R_n sorozata, melyre szintén

$$\lim_{n\to\infty} R_n = v$$

Ismert tétel, hogy konvergens monoton növekvő sorozat határértéke a sorozat felvett értékeinek szuprémuma, tehát minden n pozitív egészre $r_n \leq v$. Hasonlóan a csökkenő konvergens sorozat határértéke a felvett értékek infinuma, azaz $R_n \geq v$ minden n-re. Ekkor tehát minden pozitív egész n esetén

$$r_n = f(r_n) \leq f(v) \leq f(R_n) = R_n$$

Ugyanakkor $n \to \infty$ mellett az egyenlőtlenség mindkét oldala v-hez tart, ami csak úgy lehet, ha $f(v) = v$. Ezzel tehát megmutattuk, hogy $f(v) = v$ minden v pozitív egészre az egyetlen lehetséges megoldás. Behelyettesítve leellenőrizhetjük, hogy valóban jó, hiszen:

$$f(xy + f(y)^2) = xy + y^2 = f(x)f(y) + yf(y)$$

teljesül ekkor. Az egyetlen megfelelő f függvényre tehát $f(x) = x$ minden x pozitív valós számra.