

A.709.: további megjegyzések

December 12, 2017

Érdekességek. Használjuk az [általánosított binomiális együtthatókat](#) (pozitív egész k -ra $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$, illetve még általánosabban, [Gamma-függvénnyel](#) $\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(y-x+1)}$ módon megadva). A Lemma voltaképpen azt látta be, hogy $x \rightarrow \infty$ -re $\binom{x}{a} = \Theta(x^a)$ nagyságrendű $x - a \in \mathbf{N}$ kikötéssel; ez például a [Stirling-formulával](#) tetszőleges x, a -ra általánosítható.

A C_a optimalitásának bizonyításánál használt $x_k = \binom{2a+k}{k-1} = \binom{2a+k}{2a+1}$ értékeknél az egyenlőtlenség két oldala zárt alakra is hozható. Az

$$\frac{1}{\binom{m}{b}} = \frac{b}{b-1} \left(\frac{1}{\binom{m-1}{b-1}} - \frac{1}{\binom{m}{b-1}} \right)$$

azonossággal teleszkópikus összeget alakítunk ki, $x_k - x_{k-1} = \binom{k+2a-1}{2a}$ és $\binom{x}{y} = \frac{x}{y} \binom{x-1}{y-1}$ azonosságok segítségével:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k - x_{k-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\binom{k+2a-1}{2a}} = \frac{2a}{2a-1} \left(\frac{1}{\binom{2a-1}{2a-1}} - \frac{1}{\binom{n+2a-1}{2a-1}} \right),$$

valamint

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k+a}{x_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{k+2a}{\binom{k+2a}{2a+1}} - \sum_{k=1}^n \frac{a}{\binom{k+2a}{2a+1}} = (2a+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\binom{k+2a-1}{2a}} - a \sum_{k=1}^n \frac{1}{\binom{k+2a}{2a+1}} = \\ &= (2a+1) \cdot \frac{2a}{2a-1} \left(1 - \frac{1}{\binom{n+2a-1}{2a-1}} \right) - a \cdot \frac{2a+1}{2a} \left(1 - \frac{1}{\binom{n+2a}{2a}} \right). \end{aligned}$$

Ezek az összegek $a > \frac{1}{2}$ esetén rendre $\frac{2a}{2a-1}$, illetve $(2a+1) \left(\frac{2a}{2a-1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{(2a+1)^2}{2(2a-1)}$ határértékekhez konvergálnak, ami $a > \frac{1}{2}$ -re igazolja $C_a = \frac{(2a+1)^2}{4a}$ élességét.

"Na de hogyan lehetett rájönni?"

Az alábbiakban egy lehetséges utat mutatunk, amivel könnyen eljuthatunk a megoldáshoz.

Legyen $k = 1, 2, \dots, n$ -re $y_k = x_k - x_{k-1}$, ekkor egyenlőtlenségünk $y_k > 0$ feltétel mellett az alábbi alakot ölti:

$$\frac{C_a}{y_1} + \frac{C_a}{y_2} + \dots + \frac{C_a}{y_n} > \frac{1+a}{y_1} + \frac{2+a}{y_1+y_2} + \dots + \frac{n+a}{y_1+\dots+y_n}.$$

Megtervezzük a becslésünket. (Ez az egyetlen kulcsötlet a megoldásban.) A [Titu-lemmát](#) fogjuk sokszor használni: alkalmas $w_1, w_2, \dots, w_k > 0$ súlyokkal felírt

$$\frac{w_1^2}{y_1} + \frac{w_2^2}{y_2} + \dots + \frac{w_k^2}{y_k} \geq \frac{(w_1 + w_2 + \dots + w_k)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_k}$$

alakú becsléseket fogunk $k = 1, 2, \dots, n$ -re összeadni. Ily módon, hogyha találhatunk olyan $w_{k,j} > 0$ súlyokat találni ($k = 1, 2, \dots, n; 1 \leq j \leq k$), melyekre a

$$\begin{bmatrix} w_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ w_{2,1} & w_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ w_{3,1} & w_{3,2} & w_{3,3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & w_{n,2} & w_{n,3} & \dots & w_{n,n} \end{bmatrix}$$

táblázatban minden oszlop négyzetösszege $\leq C$ és a k -adik sor összege $\geq \sqrt{k+a}$, akkor az egyenlőtlenség ezen $C_a = C$ -vel minden $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ szám- n -esre fennáll. Ugyanis ekkor csupán össze kell adnunk minden k -ra az alábbi becslést:

$$\frac{w_{k,1}^2}{y_1} + \frac{w_{k,2}^2}{y_2} + \dots + \frac{w_{k,k}^2}{y_k} \geq \frac{(w_{k,1} + w_{k,2} + \dots + w_{k,k})^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_k} \quad (*)$$

Ha kellő idő és energia rendelkezésre állna, megpróbálhatnánk például belátni, hogy egy ilyen jellegű becsléssorozattal belátható az optimális C_a -ra vonatkozó egyenlőtlenség is. Ehelyett kipróbáljuk a lehető legegyszerűbben kivitelezhető módszert, ami keveset veszít általánosságából, és ez szerencsére működni is fog.

Kitűzünk három irányelvet: ha esetleg kudarcot vallanánk, a hibát ezekben (vagy alapvető módszerünkben) kell majd keresnünk.

- Az adott n -hez tartozó minimális $C_a(n)$ konstans az előbbi tulajdonságú C értékek minimuma.
- Úgy érhetünk el legélesebb becslést (és minimális C -t), ha létezik olyan $(y_k) = (\mu_k)$ számsorozat, melyre minden $(*)$ alakú becslésünkben egyenlőség áll. Ennek az a feltétele, hogy alkalmas λ_k értékekkel

$$\forall k : \quad (w_{k,1}, w_{k,2}, \dots, w_{k,k}) = \lambda_k \cdot (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k).$$

- Végtelenítsünk, hogy eltűnjön a "széle", s így egyenlőségeket tehetünk fel. Az $y_n \rightarrow \infty$ választásból látjuk, hogy $C_a(1) \leq C_a(2) \leq \dots : C_a$, ha egyáltalán létezik, ezen sorozat határértéke lesz. Lényegében feltettük, hogy C_a az a minimális C , melyhez megadhatók olyan $(w_{k,j})$ konstansok ($k \geq 1, 1 \leq j \leq k$), melyekre

$$(1) : \forall j \quad \sum_{k=j}^{\infty} w_{k,j}^2 \leq C, \quad (2) : \forall k \quad w_{k,1} + \dots + w_{k,k} \geq \sqrt{k+a}.$$

Azt állítjuk, hogy létezik olyan C , melyre $w_{k,j} = \lambda_k \mu_j$ alakú, valamint (1)-ben és (2)-ben egyenlőség áll. Továbbá azt állítjuk, hogy ez éppen a keresett minimális C_a .

A rekurzió megoldása.

A következő rekurziót szeretnénk megoldani:

$$\forall j \geq 1 : \quad \mu_j^2(\lambda_j^2 + \lambda_{j+1}^2 + \dots) = C, \quad (1')$$

$$\forall k \geq 1 : \quad \lambda_k(\mu_1 + \dots + \mu_k) = \sqrt{k+a} =: A_k. \quad (2')$$

Mivel $\lambda_1 \mu_1 = A_1$, ezért a $(\mu_j), (\lambda_k) \rightarrow (\kappa \mu_j), (\kappa^{-1} \lambda_k)$ cserével (dehomogenizálva) feltehető $\mu_1 = 1$ és $\lambda_1 = A_1$.

1. lépés. Kivonva, a következő ekvivalens (!) feltételrendszert kapjuk: $\mu_1 = 1, \lambda_1 = A_1, \mu_k > 0$ és $\lambda_j > 0$, és

$$\forall j \geq 1 : \quad \lambda_j^2 = \frac{C}{\mu_j^2} - \frac{C}{\mu_{j+1}^2} (\geq 0),$$

$$\forall k \geq 2 : \quad \mu_k = \frac{A_k}{\lambda_k} - \frac{A_{k-1}}{\lambda_{k-1}}.$$

2. lépés. Legyen $\boxed{\theta_k = \frac{A_k}{\lambda_k}}$, ekkor $\theta_1 = 1$ és (θ_k) szigorúan növekvő. Utóbbit előbbibe helyettesítve:

$$\forall j \geq 2 : \quad \frac{A_j^2}{\theta_j^2} = \frac{C}{(\theta_j - \theta_{j-1})^2} - \frac{C}{(\theta_{j+1} - \theta_j)^2},$$

míg a $j = 1$ esetre $\mu_1 = 1 = \theta_1$ miatt felírható

$$\frac{A_1^2}{\theta_1^2} = \frac{C}{(\theta_1 - 0)^2} - \frac{C}{(\theta_2 - \theta_1)^2}, \quad (\dagger)$$

így az előzőkkel ekvivalens feltételrendszert kapunk $\theta_0 := 0$ bevezetésével. (Ugyanis ha ez a rekurzió teljesül, akkor $\lambda_k = \frac{A_k}{\theta_k}$ és $\mu_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ megfelel.)

3. lépés. Ez homogén összefüggés, így legyen $j \geq 1$ -re $\boxed{\frac{\theta_{j+1}}{\theta_j} =: r_j}$. (Feltétel: $r_j > 1$.) Ezzel

$$\forall j \geq 2 : \quad \frac{A_j^2}{C} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{r_{j-1}})^2} - \frac{1}{(r_j - 1)^2}.$$

Végül legyen $\boxed{q_j := \frac{1}{r_j - 1}}$ (feltétel: $q_j > 0$), amivel már megoldhatónak látszik a rekurzió:

$$\forall j \geq 2 : \quad \frac{A_j^2}{C} = (q_{j-1} + 1)^2 - q_j^2.$$

Eközben a $(\dagger)$ feltétel megfelelője, hogy $q_0 := 0$ definícióval

$$\frac{A_1^2}{C} = (q_0 + 1)^2 - q_1^2.$$

4. lépés. Jelen esetben $A_j^2 = j + a$ alakú. Emiatt egy $q_j = \alpha j + \beta$ alakú lineáris megoldás működni fog, mégpedig pontosan akkor, ha $\beta = 0$ (mert $q_0 = 0$) és

$$\frac{j+a}{C} = (\alpha(j-1) + 1)^2 - (\alpha j)^2 = (\alpha(2j-1) + 1)(-\alpha + 1),$$

vagyis

$$\frac{1}{C} = 2\alpha(-\alpha + 1), \quad \frac{a}{C} = (-\alpha + 1)^2,$$

ahonnan $a = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$, így $\alpha = \frac{1}{2a+1}$, mellyel valóban $q_j > 0$, és hozzá

$$C = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} = \frac{(2a+1)^2}{4a}.$$

Az ehhez tartozó értékek pedig: $j \geq 1$ -re

$$r_j = \frac{1}{q_j} + 1 = \frac{2a+1}{j} + 1 = \frac{j + (2a+1)}{j},$$

$$\theta_k = (r_{k-1} \dots r_1)\theta_1 = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{j + (2a+1)}{j},$$

$$(k \geq 2) : \quad \mu_k = \theta_k - \theta_{k-1} = (r_{k-1} - 1)\theta_{k-1} = \frac{2a+1}{k-1} \cdot \prod_{j=1}^{k-2} \frac{j + (2a+1)}{j},$$

$$\lambda_k = A_k \prod_{j=1}^{k-1} \frac{j}{j + (2a+1)}.$$

Ezek az ekvivalens lépések miatt megfelelnek az eredeti (1'), (2') összefüggéseknek is.

Megoldás a μ_j -k segítségével. Belátjuk, hogy $C_a = \frac{(2a+1)^2}{4a}$ az optimális konstans. Egyrészt, mivel $\mu_1 + \dots + \mu_k = \theta_k$ és $\lambda_k \theta_k = A_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ -re

$$\lambda_k^2 \left(\frac{\mu_1^2}{y_1} + \frac{\mu_2^2}{y_2} + \dots + \frac{\mu_k^2}{y_k} \right) \geq \lambda_k^2 \cdot \frac{(\mu_1 + \dots + \mu_k)^2}{y_1 + \dots + y_k} = \frac{k+a}{y_1 + \dots + y_k},$$

s így ha ezen becsléseket összeadjuk, a bal oldalon minden $\frac{1}{y_j}$ kisebb súllyal fog szerepelni, mint C_a , s így a bal oldal $< C_a \left(\frac{1}{y_1} + \dots + \frac{1}{y_n} \right)$. Tehát C_a megfelel.

Másrészt, hogyha $(y_1, \dots, y_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, akkor egyenlőség áll, azaz

$$\sum_{k=1}^n \frac{\mu_k^2 (\lambda_k^2 + \dots + \lambda_n^2)}{y_k} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{k+a}{y_1 + \dots + y_k}}_{=:T}.$$

Itt $\lambda_k^2 + \dots + \lambda_n^2 = \frac{C_a}{\mu_k^2} - \frac{C_a}{\mu_{n+1}^2}$, ezért a bal oldal csupán

$$C_a \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{y_k}}_{=:S} - \frac{C_a}{\mu_{n+1}^2} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\mu_k^2}{y_k}}_{=\mu_1 + \dots + \mu_n = \theta_n},$$

s így

$$\frac{T}{S} = C_a - \frac{C_a \theta_n}{\mu_{n+1}^2 S}.$$

Állítás. $\frac{S\mu_{n+1}^2}{\theta_n} \rightarrow \infty$, ahogy $n \rightarrow \infty$, hogyha $a > \frac{1}{2}$.

Bizonyítás. Mivel $\mu_{k+1} = (r_k - 1)\theta_k$ és $\theta_k = r_{k-1} \dots r_1$, ahol $r_k - 1 = \frac{2a+1}{k}$, ezért:

$$S\mu_{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(r_n - 1)\theta_n}{(r_k - 1)\theta_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} (r_{n-1} \dots r_k),$$

$$r_{n-1} \dots r_k = \prod_{j=k}^{n-1} \frac{j+2a+1}{j} = \prod_{j=k}^{n-1} \frac{j+1}{j} \cdot \prod_{j=k}^{n-1} \frac{(j+1)+2a}{(j+1)} = \frac{n}{k} \prod_{i=k+1}^n \frac{i+2a}{i},$$

és itt utóbbi szorzatot az alábbi technika szerint, a $\log x \geq 1 - \frac{1}{x}$ [becsléssel](#) minorálhatjuk:

$$\log \prod_{i=k+1}^n \frac{i+2a}{i} \geq \sum_{i=k+1}^n \left(1 - \frac{i}{i+2a} \right) = 2a \cdot \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i+2a} \geq$$

$$\geq 2a \cdot \int_{k+1}^{n+1} \frac{dx}{x+2a} = 2a \cdot (\log(n + (2a+1)) - \log(k + (2a+1))),$$

amit az eredetibe beírva kapjuk:

$$S\mu_{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot \frac{n}{k} \cdot \left(\frac{n + (2a + 1)}{k + (2a + 1)} \right)^{2a}.$$

Ebból világosan leolvasható, hogy $a > \frac{1}{2}$ esetén

$$\frac{S\mu_{n+1}^2}{\theta_n} = S\mu_{n+1}(r_n - 1) = \frac{2a + 1}{n}.$$

Az Állításból következik, hogy C_a -nál kisebb konstans nem választható $a > \frac{1}{2}$ esetén, hisz akkor elég nagy n -re az $(y_1, y_2, \dots, y_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ választással hamisnak adódik az egyenlőtlenség. Az $a \leq \frac{1}{2}$ esetben pedig elég az $y_n = \Theta(n)$ választást alkalmazni, mint fentebb láttuk.