KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

68. évfolyam 3. szám Budapest, 2018. március

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Projektvezető: NAGYNÉ SZOKOL ÁGNES
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Rácsok és csoportok 2.

Egy olimpiai versenyfeladat ürügyén

4. Vandermonde-mátrixok

Most rátérünk az olimpiai feladatban szereplő rács vizsgálatára. Rögzítsünk (a_i, b_i) egész számpárokat $(1 \leqslant i \leqslant k)$, ahol a_i és b_i relatív prímek. Adott $n > 0$ esetén legyen M_n az az egész elemű, k sorból és $n+1$ oszlopból álló mátrix, amelyben az i-edik sor j-edik eleme $a_i^{n-j+1} b_i^{j-1}$ és A_n az M_n oszlopai által generált csoport.

4.1. Az M_n determinánsosztóinak meghatározása. Fölhasználjuk az egész együtthatós többváltozós polinomok számelméletét. Az alábbiak a [3] könyv második és harmadik fejezetéből megérthetők, különös tekintettel a 3.4. szakaszra.

4.1. tétel. *A $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ polinomjai között igaz a számelmélet alaptétele, azaz minden nullától és egységtől különböző polinom sorrendtől és egységszerestől eltekintve egyértelműen bontható irreducibilisek szorzatára. A prím és irreducibilis polinomok ugyanazok, és csak ± 1 egység. A $\mathbb{Z}$-beli prímszámok prímek $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$-ben is.*

Egy polinom akkor *primitív,* ha együtthatóinak közös osztója csak egység lehet. Egy elsőfokú polinom nem feltétlenül irreducibilis, például $\mathbb{Z}[x]$-ben $2x$ nem az, hiszen a $2 \cdot x$ fölbontásban egyik tényező sem egység. Ha azonban primitív is, akkor már irreducibilis lesz, és egyben prímtulajdonságú. Ez akkor is igaz, ha az együtthatói nem egész számok, hanem egész együtthatós, akár többváltozós polinomok.

4.2. következmény. *A $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$-beli $x_i x_j - x_k x_\ell$ polinom irreducibilis abban az esetben, ha i, j, k, ℓ páronként különböző. Két ilyen polinom különböző négyelemű indexhalmazok esetében biztosan nem egymás egységszerese.*

4.3. lemma. *Legyen a $k \times k$-as K mátrixban az i-edik sor j-edik eleme $x_i^{k-j} y_i^{j-1}$. Ekkor* $\det(K) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (x_i y_j - y_i x_j)$.

Bizonyítás. Képzeljük először azt, hogy x_i és y_i változók, így a determináns elemei $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k]$-beli polinomok. Emeljünk ki a determináns i-edik sorából x_i^{k-1}-et mindegyik i-re (ez megtehető, mert $x_i \neq 0$). Az eredmény egy Vandermonde-determináns lesz az y_i/x_i generátorokkal, melynek értéke $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \big((y_j/x_j) - (y_i/x_i)\big)$. A nevezőkkel szorozva az állítást kapjuk.

Így azonosságot kaptunk. Ha az x_i és y_i helyébe bármilyen számokat (sőt polinomokat, akár mod p maradékosztályokat) helyettesítünk, az egyenlőség e helyettesítés után is érvényben fog maradni. (Még akkor is, ha valamelyik x_i helyébe nullát írunk.) □

4.4. állítás. *Ha $n+1 \geqslant k$, akkor az M_n mátrix k-adik determinánsosztója*

$$\Delta = \prod_{1 \leqslant i<j \leqslant k} (a_i b_j - b_i a_j) = \det(M_{k-1}),$$

az n értékétől függetlenül. (Ha $k=1$, akkor $\Delta = 1$, mint üres szorzat).

Bizonyítás. Legyen Δ_k az M_n mátrix k-adik determinánsosztója. Azt fogjuk megmutatni, hogy a Δ és Δ_k számok egymás osztói.

A $\Delta_k \mid \Delta$ bizonyításához legyenek x_i és y_i változók ($1 \leqslant i \leqslant n-k+1$). Egészítsük ki az M_n mátrixot úgy, hogy az utolsó k sora maradjon az, ami eredetileg volt, az első $n-k+1$ sorában pedig az i-edik sor j-edik eleme legyen $x_i^{n-j+1} y_i^{j-1}$. A kapott négyzetes mátrix determinánsát a 4.3. lemma segítségével számíthatjuk ki. Az így adódó szorzatot bontsuk három részre: $P_1P_2P_3$, ahol

(1) $$P_1 = \prod_{1 \leqslant i<j \leqslant n-k+1} (x_i y_j - y_i x_j).$$

(2) $$P_2 = \prod (x_i b_j - y_i a_j), \quad \text{ahol} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-k+1 \quad \text{és} \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

(3) $$P_3 = \prod_{1 \leqslant i<j \leqslant k} (a_i b_j - b_i a_j) = \Delta.$$

A Laplace-kifejtés (2.1. tétel) miatt a determináns $P_1P_2P_3$ értéke fölírható az M_n mátrix $k \times k$-as aldeterminánsainak olyan lineáris kombinációjaként, amelynek együtthatói $R = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{n-k+1}, y_1, \ldots, y_{n-k+1}]$-ből valók. Ezért R-ben a Δ_k szám osztója a $P_1P_2P_3 = P_1P_2\Delta$ szorzatnak.

Tegyük föl indirekt, hogy van olyan p prímszám, melynek Δ_k-beli kitevője nagyobb, mint a Δ-beli kitevője. Mivel R-ben igaz a számelmélet alaptétele, és p ebben is prímszám (4.1. tétel), ezért $p \mid P_1P_2$. Tehát vagy $p \mid x_i y_j - y_i x_j$, vagy $p \mid x_i b_j - y_i a_j$ alkalmas i, j-re. Ez azonban lehetetlen, mert a_j és b_j relatív prímek, és így mindkét polinom primitív. Tehát tényleg $\Delta_k \mid \Delta$.

A fordított oszthatósághoz azt kell igazolnunk, hogy Δ osztója $\det(K)$-nak, ha K az M_n egy tetszőleges $k \times k$-as részmátrixa. Vegyünk föl u_i, v_i változókat ($1 \leqslant i \leqslant k$), és írjuk föl az M_n mátrixot, valamint a Δ és $\det(K)$ számokat is a_i helyett u_i-vel és b_i helyett v_i-vel (azaz képzeljünk az a_i és b_i számok helyébe változókat). Nyilván elegendő az oszthatóságot ebben az esetben igazolni.

Rögzített $i<j$ mellett legyen $d = u_i v_j - v_i u_j$, és írjuk föl $\det(K)$ Laplace-kifejtését (2.1. tétel) arra az esetre, amikor a soroknak a kételemű $\{i, j\}$ indexhalmazát vesszük. Azt kapjuk, hogy $\det(K)$ előáll az i-edik és j-edik sorból képzett kétszer kettes aldeterminánsok lineáris kombinációjaként. Ezek a kétszer kettes aldeterminánsok mind oszthatók d-vel: ha a két oszlopindex $s<t$, akkor

$$\begin{vmatrix} u_i^{n-s+1} v_i^{s-1} & u_i^{n-t+1} v_i^{t-1} \\ u_j^{n-s+1} v_j^{s-1} & u_j^{n-t+1} v_j^{t-1} \end{vmatrix} = v_i^{s-1} u_i^{n-t+1} v_j^{s-1} u_j^{n-t+1} \begin{vmatrix} u_i^{t-s} & v_i^{t-s} \\ u_j^{t-s} & v_j^{t-s} \end{vmatrix},$$

és az $a-b \mid a^{t-s}-b^{t-s}$ szabály miatt $u_iv_j-v_iu_j \mid (u_iv_j)^{t-s}-(v_iu_j)^{t-s}$. Így $d \mid \det(K)$.

Beláttuk tehát, hogy $\det(K)$ osztható az $u_iv_j-v_iu_j$ mindegyikével. Ezek a polinomok azonban páronként relatív prímek a 4.2. következmény miatt. A számelmélet alaptétele miatt e polinomok szorzata, ami Δ, szintén osztója $\det(K)$-nak. □

4.5. feladat. *Számítsuk ki M_n összes determinánsosztóját.*

Útmutatás. Az a_i és a b_i relatív prímek, ezért $\Delta_1=1$. Ha $2\leqslant r\leqslant \min(k,n+1)$, akkor vegyük $\{1,\dots,k\}$ egy r elemű S részhalmazát, és álljon az M mátrix az M_n ennek megfelelő soraiból. A 4.4. lemma miatt az M mátrix $r\times r$-es aldeterminánsainak legnagyobb közös osztója azon $a_ib_j-b_ia_j$ számok Δ_S szorzata, amelyekre $i,j\in S$ és $i<j$. Az összes $r\times r$-es aldetermináns legnagyobb közös osztója tehát ezeknek a Δ_S számoknak a legnagyobb közös osztója. Így Δ_r sem függ az n választásától. □

4.2. Redukció prímhatvány modulusra. Egy vektort hívjunk s-sel oszthatónak, ha mindegyik komponense osztható s-sel. Az s-sel osztható vektorok halmazát jelölje $s\mathbb{Z}^k$. Azt mondjuk, hogy egy A csoport tartalmazza a $\mathbf{v}$ vektort mod s, ha $\mathbf{v}$ fölírható egy s-sel osztható és egy A-beli vektor összegeként, azaz $\mathbf{v}\in s\mathbb{Z}^k+A$.

4.6. lemma. *Legyen $A\subseteq\mathbb{Z}^k$ egy csoport, $\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^k$ és s, t relatív prím egészek. Ha A tartalmazza $\mathbf{v}$-t* mod s *és* mod t, *akkor tartalmazza* mod st *is.*

Bizonyítás. Legyen $v=su+g=tw+h$, ahol $g,h\in A$ és $u,w\in\mathbb{Z}^k$. Mivel $(s,t)=1$, van olyan $e,f\in\mathbb{Z}$, hogy $se+tf=1$. Ekkor $v=sev+tfv=se(tw+h)+tf(su+g)=st(ew+fu)+(seh+tfg)\in st\mathbb{Z}^k+A$. □

Ha A indexe $\mathbb{Z}^k$-ban Δ, akkor a 3.5. feladat szerint minden Δ-val osztható vektor eleme A-nak. Ha tehát be akarjuk látni, hogy $\mathbf{v}\in A$, akkor elegendő megmutatni, hogy a Δ index minden q prímhatvány-osztója esetén $\mathbf{v}$ benne van A-ban mod q.

4.3. Az olimpiai feladat megoldása. Ha $d_{ij}=a_ib_j-b_ia_j=0$ valamilyen $i\neq j$ esetén, akkor, mivel a_i és b_i, valamint a_j és b_j relatív prímek, csak az lehetséges, hogy (a_i,b_i) és (a_j,b_j) egyenlők vagy ellentettek. Az első esetben (a_j,b_j) elhagyható. A második esetben szintén, ha az n kitevőt párosnak választjuk (erre majd ügyelünk). Ezért a továbbiakban föltesszük, hogy d_{ij} soha nem nulla, és azt is, hogy $n\geqslant k-1$. Az M_n által generált A_n ekkor rács, hiszen a k-adik determinánsosztó a 4.4. állításban definiált Δ szám, ami nem nulla. Az A_n indexe tehát Δ, az n-től függetlenül.

4.7. lemma. *Legyen $q=p^m$, ahol p prím és $m\geqslant 1$. Tegyük föl, hogy az n szám osztható $2\varphi(q)$-val, és nagyobb vagy egyenlő, mint $2m$ és $k-1$. Ekkor A_n tartalmazza a konstans 1 vektort* mod q.

Bizonyítás. Ha $p\nmid a_i$, akkor az Euler–Fermat-tétel és $\varphi(q)\mid(n/2)$ miatt $a_i^{n/2}\equiv 1\ (q)$. Ha $p\mid a_i$, akkor $n/2\geqslant m$ miatt $a_i^{n/2}\equiv 0\ (q)$. Ugyanez igaz a b_i számokra is. Vegyük M_n első, középső és utolsó oszlopát (van középső, mert n páros). Mindegyikben csak 1 és 0 szerepelhet mod q, és a középső oszlop a két szélső szorzata mod q. Egy sor két szélső eleme nem lehet egyszerre nulla, mert a_i és b_i relatív prímek. Ezért a két szélső oszlop összegéből a középsőt kivonva konstans 1-et kapunk mod q. $\square$

Az előző szakasz eredményeivel kombinálva, ha n elég nagy, és $2\varphi(q) \mid n$ teljesül Δ minden q prímhatvány-osztójára, akkor a konstans 1 vektor A_n-ben van.

4.8. feladat. *Igazoljuk, hogy A_n és A_m vektorait komponensenként összeszorozva A_{n+m}-beli vektorokat kapunk, így az A_n rácsok periodikusan ismétlődnek ($n \geqslant k-1$).*

Útmutatás. Ha a konstans 1 vektor A_m-ben van, akkor $A_n \subseteq A_{n+m}$. Mivel az indexük ugyanaz a Δ szám, meg is egyeznek. $\square$

4.4. Az A_n rács vektorai. Most is föltesszük, hogy $d_{ij} = a_ib_j - b_ia_j \neq 0$ (amikor $i \neq j$). Ha $n \geqslant k-1$, akkor A_n indexe $\Delta = \prod\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant k} d_{ij}$, így A_n a $\mathbb{Z}^k$ vektorainak Δ-ad részét tartalmazza (ez pontos értelmet kap, ha egy nagy gömb vektorait tekintjük).

4.9. feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $k \geqslant 4$, akkor $A_n \neq \mathbb{Z}^k$, mert M_n-nek van két* mod 2 *egyenlő sora. Általánosítsuk ezt* 2 *helyett általános prím modulusra.*

Útmutatás. Ha p prím, akkor a $t = a_i/b_i$ osztás $p \nmid b_i$ esetén elvégezhető mod p, azaz van olyan t egész, hogy $tb_i \equiv a_i$ (p). Ha $p \mid b_i$, akkor $p \nmid a_i$, mert a_i és b_i relatív prímek, ilyenkor legyen $t = a_i/b_i$ a ∞ szimbólum. Ez tehát t-re $p+1$ lehetőség mod p.

Ha a_j/b_j is t mod p, akkor $p \mid a_ib_j - b_ia_j$. Mivel $p \mid a_i$ és $p \mid b_i$ egyszerre nem lehetséges, az a_j/a_i és b_j/b_i törtek egyike biztosan értelmes mod p, és ha mindkettő az, akkor ugyanaz az s értékük mod p, ha pedig valamelyik nem értelmes, akkor a számlálója és nevezője is nulla mod p. Így mindig $sa_i \equiv a_j$ (p) és $sb_i \equiv b_j$ (p). Ezért az M_n mátrix j-edik sora az i-edik sor s^n-szerese mod p. Ugyanez tehát A_n vektorainak megfelelő koordinátáira is igaz, vagyis ha $k > p+1$, akkor $A_n \neq \mathbb{Z}^k$. (A mod p vett M_n mátrix rangja a különböző mod p vett a_i/b_i törtek száma, hiszen ha r olyan sort vesszünk, melyekre a_i/b_i páronként különböznek mod p, akkor ennek a részmátrixnak az r-edik determinánsosztója nem osztható p-vel a 4.5. feladat miatt.) $\square$

Ha $i \neq j$, akkor $d_{ij} = a_ib_j - b_ia_j$ a legnagyobb modulus, melyre nézve a_j/a_i és b_j/b_i egyenlő. Az az s_{ij} szorzó, melyre $s_{ij}a_i \equiv a_j$ (d_{ij}) és $s_{ij}b_i \equiv b_j$ (d_{ij}) az $s_{ij} = e_ia_j + f_ib_j$ képlettel kapható, ahol $e_ia_i + f_ib_i = 1$ (van ilyen e_i, f_i, mert a_i és b_i relatív prímek). Legyen $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén $s_{ii} = 1$.

4.10. feladat. *Nyilván $\mathbf{s}_j = [s_{j1}, \ldots, s_{jk}]^T \in A_1$ és $\mathbf{d}_j = [d_{j1}, \ldots, d_{jk}]^T \in A_1$. Készítsünk egy olyan bázist A_n-ben az $\mathbf{s}_j$ és $\mathbf{d}_j$ komponensenkénti szorzásával a 4.8. feladat alapján, ahol a vektorok háromszögmátrixot alkotnak ($n \geqslant k-1$).*

Útmutatás. Legyen $1 \leqslant j \leqslant k$. A $\mathbf{d}_j$ vektor j-edik koordinátája nulla, ezért a j-edik bázisvektor elkészítéséhez tekintsük a $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{j-1}$ (komponensenkénti) szorzatát. Ennek az első $j-1$ koordinátája nulla. Ahhoz, hogy A_n-be jussunk, szorozzunk még $\mathbf{s}_j^{n-j+1}$-nel. A főátlóban álló elemek szorzata Δ, mert $s_{jj} = 1$ és a főátló j-edik eleme $d_{1,j} \cdot \ldots \cdot d_{j-1,j}$. Így a vektoraink függetlenek, és az általuk generált rács indexe Δ. De A_n indexe is Δ, ezért bázist kaptunk. $\square$

Ha az előző feladatban kapott háromszögmátrix K, akkor $\mathbf{v} = [c_1, \ldots, c_k]^T$ pontosan akkor van A_n-ben, ha a $K[x_1, \ldots, x_n]^T = \mathbf{v}$ lineáris egyenletrendszer (egyértelmű) megoldása egész x_i számokból áll. Ezt az egyenletrendszert föntről lefelé haladva könnyű megoldani. A K inverzével szorozva $[x_1, \ldots, x_n]^T = K^{-1}\mathbf{v} \in \in \mathbb{Z}^k$. Ez k oszthatósági feltétel, ahol a bal oldalon mindig Δ áll, mert ΔK^{-1} egész elemű. Az első ezek közül automatikusan teljesül, mert K első sorának első eleme 1.

4.11. példa. Legyenek a megadott párok $(1,1)$, $(1,3)$ és $(1,-1)$. Ekkor $n \geqslant 2$ esetén az összes A_n egyenlő, $d_{12} = 2$, $d_{13} = -2$, $d_{23} = -4$, $\Delta = 16$, mindegyik $s_{ij} = 1$, és $[c_1, c_2, c_3]^T$ pontosan akkor van A_n-ben, ha $16 \mid -8c_1 + 8c_2$ és $16 \mid -4c_1 + 2c_2 + 2c_3$.

5. Ortogonális rácsok

Zárásként belátjuk Peter McMullen egy gyönyörű tételét. Mostantól kicsit nagyobb tudást föltételezünk lineáris algebrából (például euklideszi tér, ortogonális kiegészítő altér). Legyenek $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^k$ lineárisan független vektorok és V az általuk generált altér. Ebben $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ egész együtthatós lineáris kombinációi egy r rangú B rácsot alkotnak. Ez tehát nem az egész $\mathbb{R}^k$-nak rácsa, hanem csak a V altérnek.

5.1. állítás. *Jelölje L a $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r]$ mátrix $r \times r$-es aldeterminánsainak négyzetösszegét ($r \geqslant 1$). Ekkor a B rács alap-parallelotópjának térfogata $\sqrt{L}$.*

Bizonyítás. Föltehető, hogy $r < k$. Legyen $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_k$ ortonormált bázis a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ által generált V altér $V^\perp$ ortogonális kiegészítő alterében (ezek egy „kockát” feszítenek ki), és $M = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$. Geometriai megfontolásokból kapjuk, hogy $\det(M)$ abszolút értéke a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ által generált rács alap-parallelotópjának d térfogata.

Az M^TM mátrix két diagonális blokkból áll, és a többi eleme nulla. A második blokk a $(k-r) \times (k-r)$-es egységmátrix. Az első, $r \times r$-es blokkot jelölje N. Ekkor $d^2 = \det(M^TM) = \det(N)$. Alkalmazzuk a Cauchy–Binet-formulát (2.2. tétel) az M^TM szorzatra és az első r sorra/oszlopra. Ekkor $d^2 = L$ adódik. $\square$

Ha B rács $\mathbb{Z}^k$-ban és V altér $\mathbb{R}^k$-ban, akkor V-be B-nek kevés vektora is eshet. Például az $y = \sqrt{2}x$ egyenes nem tartalmaz egész koordinátájú pontot az origón kívül. Nevezzük V-t *racionális altérnek,* ha generálható racionális koordinátájú vektorokkal. Racionális vektorok egy családja pontosan akkor független $\mathbb{Q}$ fölött, ha $\mathbb{R}$ fölött az. Ha a V racionális altér r-dimenziós, akkor $V \cap \mathbb{Q}^k$ ortogonális komplementerének dimenziója $\mathbb{Q}^k$-ban $k-r$, és így az $\mathbb{R}^k$-ban vett ortogonális kiegészítő is racionális altér. Továbbá $\mathbb{Z}^k \cap V$-ben van r független vektor, hiszen egy racionális vektort alkalmas nem nulla egésszel megszorozva egész vektort kapunk. Ezért $\mathbb{Z}^k \cap V$ rács V-ben.

5.2. definíció. Egy B csoport $\mathbf{v}$ elemének B-beli *magassága* a legnagyobb olyan egész, amivel $\mathbf{v}$ elosztható úgy, hogy B-ben maradjunk. Ha $B = \mathbb{Z}^k$, akkor ez a $\mathbf{v}$ komponenseinek legnagyobb közös osztója. Tehát $\mathbf{v}$ akkor primitív, ha magassága $\mathbb{Z}^k$-ban 1. A B részcsoport *tiszta* $\mathbb{Z}^k$-ban, ha a vektorok magassága ugyanaz B-ben, mint $\mathbb{Z}^k$-ban. (Ez a 3.9. következmény (2) pontjában szereplő feltétel.)

5.3. lemma. *Ha V racionális altér $\mathbb{R}^k$-ban, akkor $V \cap \mathbb{Z}^k$ tiszta részrácsa $\mathbb{Z}^k$-nak.*

Bizonyítás. Valóban, ha $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^k$ és $m\mathbf{v} \in V \cap \mathbb{Z}^k$, akkor $\mathbf{v} \in V$ (hiszen V zárt az $1/m$ számmal való szorzásra), és így $\mathbf{v} \in V \cap \mathbb{Z}^k$. □

5.4. tétel (McMullen, [4])**.** *Legyen V racionális altér $\mathbb{R}^k$-ban. Ha $A_1 = V \cap \mathbb{Z}^k$ és $A_2 = V^\perp \cap \mathbb{Z}^k$, akkor A_1 és A_2 alap-parallelotópjának térfogata megegyezik.*

Bizonyítás. Legyen $\dim(V) = r$ és $0 < r < k$ (az $r = 0$ és $r = k$ esetben $\{\mathbf{0}\}$ térfogatát 1-nek tekintve igaz az állítás). Vegyük A_1-nek egy $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ és A_2-nek egy $\mathbf{b}_{r+1}, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázisát. Ezek együtt bázist alkotnak $\mathbb{R}^k$-ban, hiszen $A_1 \perp A_2$ (de $\mathbb{Z}^k$-ban általában nem). Az 5.3. lemma és a 3.9. következmény miatt a $[\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r]$ mátrix r-edik determinánsosztója 1. Az analóg állítás érvényes A_2 esetében is.

Tekintsük a $[\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k]$ mátrix első r oszlopa szerinti $e_1 f_1 g_1 + \ldots + e_m f_m g_m$ Laplace-kifejtését, ahol f_i az első r oszlophoz, g_i az utolsó $k - r$ oszlophoz tartozó aldeterminánsok, e_i a megfelelő előjelek, és $m = \binom{k}{r}$. Legyen $\mathbf{w}_1 = [e_1 f_1, \ldots, e_m f_m]$ és $\mathbf{w}_2 = [g_1, \ldots, g_m]$. Ekkor $\mathbf{w}_1$ és $\mathbf{w}_2$ skaláris szorzata a $[\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k]$ mátrix d determinánsa (aminek abszolút értéke a $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ által generált rács alap-parallelotópjának térfogata, azaz indexe).

Jelölje d_1 és d_2 az A_1, illetve A_2 rácsok alap-parallelotópjának térfogatát. Az 5.1. állítás miatt d_1^2 a $\mathbf{w}_1$ vektor komponenseinek négyzetösszege, hiszen a négyzetre emelés után az előjelek már nem számítanak, és ugyanez áll d_2-re és $\mathbf{w}_2$-re is. Mivel e két rács ortogonális, $d_1 d_2 = |d|$. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{w}_1$ és $\mathbf{w}_2$ vektorokra fölírt Cauchy-egyenlőtlenségben egyenlőség áll. Ezért $\mathbf{w}_1$ és $\mathbf{w}_2$ egymás skalárszorosai. Ez a skalár szükségképpen racionális szám, azaz alkalmas m_1 és m_2 nem nulla egészekre $m_1 \mathbf{w}_1 = m_2 \mathbf{w}_2$. De a $[\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r]$ mátrix r-edik determinánsosztója 1, ezért $\mathbf{w}_1$ (és hasonlóan $\mathbf{w}_2$ is) primitív vektorok. Tehát $\mathbf{w}_1 = \pm\mathbf{w}_2$, és így $d_1 = d_2$. □

6. Appendix: Vetítések és alkalmazásaik

Az alábbi feladatokban a mátrixok normálalakja helyett geometriai módszerekkel igazolunk korábbi állításokat. Szó lesz egy számelméleti alkalmazásról is. Fő eszközünk a vetítés. Ha az e_1 és e_2 egyenesek az origóban metszik egymást, akkor az e_1-re való e_2 irányú vetítés az a leképezés, amely a sík minden P pontjához az e_1 egyenes azon Q pontját rendeli, melyre PQ párhuzamos e_2-vel.

Ha U és W alterek, és $\mathbb{R}^k$ minden eleme egyértelműen fölírható egy U-beli és egy W-beli vektor összegeként, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbb{R}^k$ a V és W alterek *direkt összege,* jele $\mathbb{R}^k = U \oplus V$. Az egyértelműség feltétele, hogy $U \cap W$ csak a nullvektorból álljon. A bázisok nyelvén ez azt jelenti, hogy van olyan $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ bázis U-ban, és $\mathbf{b}_{r+1}, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázis W-ben, hogy ezek együtt bázist alkotnak $\mathbb{R}^k$-ban. Hasonlóan értelmezzük azt is, amikor $\mathbb{Z}^k$ az A és B csoportok direkt összege, azaz $\mathbb{Z}^k = A \oplus B$.

Ha $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, ahol $\mathbf{u} \in U$ és $\mathbf{w} \in W$, akkor az a leképezés, amely $\mathbf{v}$-hez $\mathbf{u}$-t rendeli, az $\mathbb{R}^k$-nak az U-ra való *vetítése a W irányban.* Ha $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k$, akkor $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{b}_r$, vagyis a vetítés „kinullázza" az utolsó $k - r$ koordinátát.

6.1. feladat. *Legyen $\mathbb{R}^k = U \oplus W$, ahol U egy $\mathbb{R}$ fölött r-dimenziós racionális altér. Igazoljuk, hogy W pontosan akkor racionális altér, ha $\mathbb{Q}^k$-nak az U-ra vett W irányú vetületében nincs r-nél több $\mathbb{Q}$ fölött független vektor.*

Útmutatás. Legyen $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ racionális bázis U-ban és $\mathbf{b}_{r+1}, \ldots, \mathbf{b}_s$ maximális számú, $\mathbb{R}$ fölött független racionális vektor W-ben. Ha $s < k$, akkor van olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^k$, ami $\mathbb{R}$ fölött független $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$-től. Ekkor $\mathbf{v}$ vetülete független $\mathbb{Q}$ fölött $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$-től. □

6.2. feladat. *Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^k$ független $\mathbb{Q}$ fölött akkor az általuk generált csoport nem diszkrét, ezért nem is rács.*

Útmutatás. Föltehető (k szerinti indukcióval), hogy $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ független $\mathbb{R}$ fölött, legyen B az általuk generált rács és P az általuk kifeszített parallelotóp. Tekintsük az $n\mathbf{v}_{k+1}$ vektorokat (n egész), és mindegyiket toljuk vissza P-be a B megfelelő elemével. A kapott pontok mind különbözők $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^k$ függetlensége miatt. □

6.3. feladat. *Igazoljuk, hogy minden irracionális szám egész többszöröseinek törtrészei* sűrűn *helyezkednek el* $[0,1]$*-ben (azaz minden rész-intervallumban van törtrész).*

Útmutatás. Az előző feladat $\mathbf{v}_1 = 1$ és $\mathbf{v}_2 = \alpha$ esetén azt adja, hogy $[0,1]$-ben végtelen sok ilyen törtrész van. Ezért minden $\varepsilon > 0$-ra lesz kettő ε-nál közelebb egymáshoz. A megfelelő egész szorzókat kivonva olyan törtrészt kapunk, ami a nullához van ε-nál közelebb. Minden ε hosszú intervallumba beleesik ennek valamelyik többese. □

Sokkal erősebb állítás is igazolható Minkowski rácsokról szóló tétele segítségével: ha α irracionális, akkor van végtelen sok olyan r/s tört, melyek bármelyike α-tól kevesebb, mint $1/(2s^2)$-tel tér el (lásd [2], 8.2. szakasz). Kronecker approximációs tétele arra ad feltételt, hogy $\mathbf{v}_{k+1}$ egész többesei P-ben alkossanak sűrű halmazt.

6.4. feladat. *Tegyük föl, hogy U racionális altér és C a $\mathbb{Z}^k$-nak az U-ra vett W irányú vetülete. Mutassuk meg, hogy C pontosan akkor rács U-ban, ha W is racionális altér.*

Útmutatás. Ha W racionális altér, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ racionális bázis U-ban és $\mathbf{b}_{r+1}, \ldots, \mathbf{b}_k$ racionális bázis W-ben, akkor írjuk föl ezekkel $\mathbb{Z}^k$ egy bázisát. Ha az együtthatók közös nevezője N, akkor minden $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^k$ vektor U-ra eső vetületének N-szerese benne van a $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ generálta csoportban. Így C diszkrét, és nyilván $\mathbb{R}$ fölött generálja az U alteret. Megfordítás: 6.1. és 6.2. □

6.5. feladat. *Mutassuk meg a normálalak használata nélkül, hogy a* 3.9. *következményben* (2)*-ből következik* (1).

Útmutatás. A (2) szerint valamely független $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r \in \mathbb{Z}^k$ által generált B csoport tiszta $\mathbb{Z}^k$-ban. Legyen $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ racionális bázisa $\mathbb{Q}^k$-nak, W a $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ által generált valós altér, és U a $\mathbf{b}_{r+1}, \ldots, \mathbf{b}_k$ által generált valós altér. A 6.4. feladat miatt $\mathbb{Z}^k$-nak az U-ra vett W irányú C vetülete rács U-ban, legyenek $\mathbf{c}_{r+1}, \ldots, \mathbf{c}_k \in \mathbb{Z}^k$ olyan vektorok, melyek vetülete bázis C-ben. Ekkor minden $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^k$ esetén vannak olyan z_i egészek, hogy $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} - z_{r+1}\mathbf{c}_{r+1} - \ldots - z_k\mathbf{c}_k \in W$. Tehát $\mathbf{v}_0$ fölírható $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ racionális együtthatós lineáris kombinációjaként, és ezért alkalmas $m \neq 0$ egészre $m\mathbf{v}_0 \in B$. Mivel B tiszta, $\mathbf{v}_0 \in B$ és ezért $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r, \mathbf{c}_{r+1}, \ldots, \mathbf{c}_k$ bázis $\mathbb{Z}^k$-ban. □

6.6. feladat. *Legyen $B \subseteq \mathbb{Z}^k$ rács, $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_k$ bázis $\mathbb{Z}^k$-ban, W a $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r$ által generált, U a $\mathbf{d}_{r+1}, \ldots, \mathbf{d}_k$ által generált valós altér. Vetítsük B-t U-ra W irányából. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r \in B$, akkor a vetület $B \cap U$, és $B = (B \cap W) \oplus (B \cap U)$.*

Útmutatás. A $\mathbf{v} = z_1\mathbf{d}_1 + \ldots + z_k\mathbf{d}_k$ vektor vetülete U-ra $\mathbf{u} = z_{r+1}\mathbf{d}_{r+1} + \ldots + z_k\mathbf{d}_k$. Ha $\mathbf{v} \in B$, akkor $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r \in B$ miatt $\mathbf{u} \in B$, azaz a vetület része $B \cap U$-nak. □

6.7. feladat. *Legyen $B \subseteq \mathbb{Z}^k$ rács, $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^k$ nem nulla vektor és C a $\mathbf{w}$-re merőleges B-beli vektorok halmaza. Vetítsük B-t merőlegesen a $\mathbf{w}$ egyenesére. Mutassuk meg, hogy van legrövidebb nem nulla vetület, és ha $\mathbf{v} \in B$ vetülete egy ilyen legrövidebb $\mathbf{w}_0$ vektor, akkor $B = A \oplus C$, ahol A a $\mathbf{v}$ egész többszöröseinek halmaza.*

Útmutatás. Az $\mathbf{u} \in B$ vektor $\mathbf{w}$-re eső vetületének hossza az $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = n$ skaláris szorzat osztva $\mathbf{w}$ hosszával. Mivel n egész, ezért a vetületek között tényleg van legrövidebb. Tehát B vetülete rács a $\mathbf{w}$ egyenesén, és ezért minden vektor vetülete $\mathbf{w}_0$ egész számszorosa. Ha $\mathbf{u}$ vetülete $m\mathbf{w}_0$, akkor $\mathbf{u} - m\mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{w}$-re, és ezért C-ben van. □

6.8. feladat. *Legyen $\mathbf{w}$ primitív vektor $\mathbb{Z}^k$-ban és C a $\mathbf{w}$-re ortogonális egész vektorok halmaza. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{w}$ hossza megegyezik C alap-parallelotópjának térfogatával. (Ez McMullen tételének speciális esete.)*

Útmutatás. Mivel $\mathbf{w}$ primitív, van olyan $\mathbf{v}$ vektor, melynek $\mathbf{w}$-vel vett skaláris szorzata 1 (oldjuk meg a lineáris diofantoszi egyenletet). Az előző feladatot a $B = \mathbb{Z}^k$ rácsra alkalmazva azt kapjuk, hogy $\mathbf{v}$ és C generálják $\mathbb{Z}^k$-t, azaz C egy P alap-parallelotópja $\mathbf{v}$-vel együtt egy 1 térfogatú parallelotópot feszít ki. Ennek alapja P, magassága pedig a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{w}$ irányú vetületének hossza, ami $\mathbf{w}$ hosszának reciproka. □

6.9. feladat. *Igazoljuk, hogy a háromdimenziós térben minden egész vektor előáll két egész vektor vektoriális szorzataként.*

Útmutatás. Föltehető, hogy $\mathbf{w}$ primitív, alkalmazzuk az előző feladatot. *Második, elemi megoldás:* ha (a_1, a_2, a_3)-at akarjuk (x_1, x_2, x_3) és (y_1, y_2, y_3) vektoriális szorzataként előállítani, akkor legyen $x_3 = y_3 = \text{lnko}(a_1, a_2) = d$. Föltehető, hogy $d \neq 0$; ha $a_1x_1 + a_2x_2 = -a_3x_3$, akkor $y_1 = a_2/d + x_1$ és $y_2 = -a_1/d + x_2$ megfelelő. □

6.10. feladat. *Mutassuk meg a normálalak fölhasználása nélkül, hogy ha $B \subseteq \mathbb{Z}^k$ rács, akkor van olyan $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ bázisa $\mathbb{Z}^k$-nak, hogy alkalmas $s_1, s_2, \dots, s_k$ egészekre $s_1\mathbf{c}_1, \dots, s_k\mathbf{c}_k$ bázis B-ben.*

Útmutatás. Vegyünk egy olyan $h\mathbf{v} \in B$ vektort, melynek $\mathbb{Z}^k$-beli h magassága a lehető legkisebb. Ekkor $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^k$ primitív, így van olyan $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^k$, melynek $\mathbf{v}$-vel vett skaláris szorzata 1. Jelölje C a $\mathbf{w}$-re merőleges egész vektorok halmazát. A 6.8. feladatban használt gondolatmenet miatt $\mathbf{v}$ és C generálja $\mathbb{Z}^k$-t, és ha $\mathbf{v}$ vetülete $\mathbf{w}$ egyenesére $\mathbf{w}_0$, akkor a $\mathbb{Z}^k$ merőleges vetülete $\mathbf{w}$ egyenesére a $\mathbf{w}_0$ egész többeseiből áll.

Vetítsük a $B \subseteq \mathbb{Z}^k$ rácsot is merőlegesen $\mathbf{w}$ egyenesére, és a vetület legrövidebb vektorát jelölje $m\mathbf{w}_0$. Ha $\mathbf{u} \in B$ vetülete $m\mathbf{w}_0$, akkor a 6.7. feladat miatt B-t generálja $\mathbf{u}$ és $C \cap B$. Az $\mathbf{u}$ magassága $\mathbb{Z}^k$-ban legyen g, föltevésünk szerint $h \leqslant g$. Az $(1/g)\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^k$ vektort $\mathbf{w}$ egyenesére vetítve $\mathbf{w}_0$ többszörösét kapjuk, ezért $g \mid m$. Mivel $h\mathbf{v} \in B$ vetülete $h\mathbf{w}_0$, ezért $m \mid h$. Ez csak úgy lehetséges, ha $g = h = m$.

Vagyis találtunk egy olyan $m\mathbf{v} \in B$ vektort, amelyre $\mathbf{v}$ és C generálja $\mathbb{Z}^k$-t, és $m\mathbf{v}$ és $B \cap C$ generálja B-t. Vegyünk egy bázist C-ben, és írjuk föl ebben $B \cap C$ elemeit is (ilyen átkoordinátázást használtunk a 3.11. feladatban). Az átkoordinátázás után C-ből $\mathbb{Z}^{k-1}$ lesz. Alkalmazzunk k szerinti indukciót, ekkor van olyan $\mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k$ bázis C-ben, hogy $s_2\mathbf{c}_2, \dots, s_k\mathbf{c}_k \in C$ bázis $B \cap C$-ben. Legyen $\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}$ és $s_1 = m$. □

Az alábbi feladat többszöri alkalmazásával elérhetjük az $s_1 \mid \dots \mid s_k$ oszthatóságot.

6.11. feladat. *Tegyük föl, hogy $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ bázis a C rácsban és $s_1\mathbf{c}_1, \dots, s_k\mathbf{c}_k$ bázis a $B \subseteq C$ rácsban. Legyen s az s_1 és s_2 legnagyobb közös osztója, $t = s_1s_2/s$ pedig a legkisebb közös többszörösük. Válasszunk olyan e és f egészeket, melyekre $es_1 + fs_2 = s$, legyen $\mathbf{c}_1' = (s_1/s)\mathbf{c}_1 - (s_2/s)\mathbf{c}_2$ és $\mathbf{c}_2' = f\mathbf{c}_1 + e\mathbf{c}_2$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{c}_1', \mathbf{c}_2', \mathbf{c}_3, \dots, \mathbf{c}_k$ bázis C-ben és $s\mathbf{c}_1', t\mathbf{c}_2', s_3\mathbf{c}_3, \dots, s_k\mathbf{c}_k$ bázis B-ben.*

Hivatkozások

[1] Freud Róbert: *Lineáris Algebra.* ELTE Eötvös Kiadó, 2014.
`www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_527_LinearisAlgebra`

[2] Freud Róbert, Gyarmati Edit: *Számelmélet.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.
`www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_519_Szamelmelet`

[3] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába.* TypoTEX Kiadó, 2007.
www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil

[4] Peter McMullen: *Determinants of lattices induced by rational subspaces,* Bull. London Math. Soc., **16** (1984), 275–277.

Kiss Emil és **Simányi Nándor**
e-mail: ewkiss@cs.elte.hu, simanyi@uab.edu

Maths Beyond Limits nemzetközi matematika tábor

Idén harmadik alkalommal kerül megrendezésre az intenzív és sokszínű Maths Beyond Limits (MBL) nemzetközi matematika tábor, 2018. szeptember 9. és 21. között. Helyszíne Milówka, egy kedves hegyvidéki falu Dél-Legyelországban, ami csodálatos hangulatot teremt a matekozáshoz, ismerkedéshez, illetve sporthoz. A szervezők középiskolás korú, a matematika iránt különösen fogékony fiatalok jelentkezését várják. A tábor minden meghívott számára ingyenes, az útiköltséget kivéve. Az MBL nyelve az angol, így jó nyelvismerettel érdemes érkezni, bár maga a tábor is kiváló lehetőség a nyelv gyakorlására.

Egy átlagos tábori nap során három időpontban matematikai előadáson vesznek részt a tábor lakói, minden időpontban három-három meghirdetett előadás közül választhatnak, érdeklődésüknek megfelelően. Néhány előadás témája: folyam gráfokban, választási rendszerek, véletlen módszer, p-adikus számok, projektív geometria, topológia, Galois-elmélet. Az előadásokat követően lehetőség nyílik az előadókkal való beszélgetésre, kérdések megvitatására. Esténként pedig számos szabadidős tevékenység közül lehet választani: akadt foci, röplabda, improvizáció, éneklés, illetve palacsintasütés is.

A táborra 2018. április 1-jétől április 30-áig lehet jelentkezni, hét feladat megoldásával, valamint a jelentkezési lap kitöltésével a következő címen:

http://mathsbeyondlimits.eu/recruitment.

További információra, illetve a tavalyi táborból bőséges mennyiségű matematikára lehet lelni a tábor 144 oldalas brosúrájában:

http://mathsbeyondlimits.eu/mbl2017.

A táborral kapcsolatos információk, hírek elérhetőek a tábor Facebook-oldalán:

https://www.facebook.com/mathsbeyondlimits/.

A tavalyi résztvevők élményeiről készült rövidfilm a következő címen nézhető meg:

https://www.youtube.com/watch?v=DPlm862AV-o&feature=share.

Jó matekozást, sikeres jelentkezést kívánnak minden érdeklődőnek a szervezők!

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket (ha a megoldás pontos értéke nem racionális szám, akkor közelítő értéket is adjunk):

a) $3^{2x+2}+9^{2x+1}=4.$ (*5 pont*)

b) $\log_2(x-3)+\big(\log_4(8x-24)\big)^2=6{,}25.$ (*7 pont*)

2. Egy háromszög oldalhosszai olyan számtani sorozat első három eleme, amelynek második eleme 6.

a) Adjuk meg azt a számhalmazt (a legegyszerűbb alakú) pontos értékekkel, amelynek elemei az ilyen háromszögek területei. (*7 pont*)

b) Van-e az ilyen háromszögek között maximális területű, van-e minimális területű? Ha igen, akkor melyik az? (*2 pont*)

c) Van-e az ilyen háromszögek között két olyan, amelyeknél a beírt kör sugara egyenlő? Ha igen, akkor melyek azok? (*3 pont*)

3. Egy ügyfél egy bankból 1980-ban felvett egymillió Ft kölcsönt, évi 5%-os kamatra, 20 évi, évente egyszeri, azonos összegű törlesztési kötelezettséggel.

a) Mennyi volt az évi törlesztési összeg, 10 Ft-ra kerekítve? (*5 pont*)

A kölcsönszerződést nem lehetett megváltoztatni a növekvő infláció ellenére sem, pedig 1992-ben (12 évvel a tárgyalt hitelfelvétel után) már a bank adott 10%-os kamatot a nála elhelyezett pénzre. Ezért a bank a fent leírt kölcsön felvevőjének felajánlotta, hogy hátralevő tartozását megszüntetheti, ha az éppen fennálló tartozásának 90%-át kifizeti.

b) Mennyivel tartozott az ügyfél 12 év leteltével? (*4 pont*)

c) Mennyit helyezzen el az ügyfél egy (másik) bankban, hogy abból az eredeti törlesztő részletét évente kivéve és 10%-os kamattal számolva 8 év alatt megszüntesse a tartozását? Érdemes-e elfogadni a bank ajánlatát, vagy kisebb összegnek egy (másik) bankban való elhelyezésével érdemes tovább törleszteni a tartozását? (*4 pont*)

4. Jelölje k azt a kört, amelyik érinti a koordináta-rendszer x tengelyét, és érinti az $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+20)$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény grafikonját a függvénynek a 2 abszcisszájú pontjában. (A függvény grafikonjának az érintése egy pontban azt jelenti, hogy az érintő kör ebben a pontban érinti a grafikonhoz az adott pontban húzott érintőt, és az érintő elválasztja a grafikont és a kört.)

a) Írjuk fel a k kör egyenletét. (*7 pont*)

b) Mennyi annak a korlátos síkidomnak a területe, amelyet az y tengely, az x tengely, a k kör és a függvény grafikonja határol? (*7 pont*)

II. rész

5. *a*) Oldjuk meg az X halmazra az $A \setminus X = B$; $A \cup X = C$ egyenletrendszert, ahol az adott A, B, C halmazokra $B \subset A \subset C$ teljesül. (*6 pont*)

b) Igazoljuk, hogy az A és B ítéletekre az $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ és A ítéletek ekvivalensek. (*6 pont*)

c) Igaz-e, hogy $\forall H \subset \mathbb{R}^+$ és $\forall h \in H$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy $\frac{1}{n} < h < n$? Ha nem, akkor adjunk rá példát, ha igen, akkor írjuk le, hogy az ilyen n függ-e a h-tól, vagy nem? Állításunkat bizonyítani nem kell. (*4 pont*)

6. *a*) Hány olyan 2018 pontú, páronként nem izomorf fagráf van, amelyekben nincs háromnál több élt tartalmazó út? (*11 pont*)

b) Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azoknak a 2018 pontú fagráfoknak a pontjai, amelyek mindegyikének pontja az origó, és minden élének a két végpontja olyan $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ pont, amelyre x_1, y_1, x_2, y_2 egész számok, és az $(x_1 - x_2)$, $(y_1 - y_2)$ számoknak az egyike 0, a másik 0, 1, vagy -1. (*5 pont*)

7. Egy társaság 5 nőből és 5 férfiből áll, és köztük két házaspár van.

a) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha minden nő mindkét oldalán férfi ül? Két leülés különböző, ha van olyan személy a társaságban akinek a két leülésnél legalább az egyik oldal (jobb vagy bal) felől nem ugyanaz ül, mint a másik leülésnél. (*4 pont*)

b) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha minden nő mindkét oldalán férfi ül, és mindkét férj a felesége jobb oldalán ül (két leülés különböző olyan módon, mint az *a*) esetnél). (*4 pont*)

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a társaság úgy ül le, hogy minden nő mindkét oldalán férfi ül, de egyik férfi sem ül a felesége mellett? (*8 pont*)

8. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \left|2\sin(x-\pi)\right|, & \text{ha } \pi \leqslant x \leqslant 3\pi. \end{cases}$$

a) Differenciálható-e a függvény az $x_0 = \pi$ pontban? (*4 pont*)

b) Adjuk meg azt a legbővebb halmazt, amelyen a függvény szigorúan monoton növekvő, és amelyen szigorúan monoton csökkenő. (*6 pont*)

c) Adjuk meg bizonyítás nélkül a függvény szélsőértékeinek helyét és értékét, de jelezzük nem csak azt, hogy minimum vagy maximum, hanem a szélsőértéknek a szigorú, a helyi és az abszolút tulajdonságát is. (*6 pont*)

9. Egy könyvesboltban három kiadónak (jelölésük legyen A, B, C) mind a négy középiskolai évfolyam részére szóló matematika tankönyve megtalálható, áruk az évfolyamtól nem, csak a kiadótól függően rendre 1500 Ft, 1800 Ft és 2000 Ft. A könyvekről a boltban levő példányok számára vonatkozóan az alábbi adatok állnak rendelkezésünkre.

9. évfolyamos:	A-ból 102 db, B-ből 120 db, C-ből 78 db van;
10. évfolyamos:	összesen 220 db van, áruk átlagosan 1750 Ft;
11. évfolyamos:	összesen 210 db van, áruk átlagosan 1760 Ft;
12. évfolyamosról:	nincs adat,

de tudjuk, hogy a négy évfolyaméból együtt (tehát az összes könyv) 810 db van, áruk átlagosan 1760 Ft. (Az átlagok egészre kerekített értékek).

a) Mennyi a raktáron levő 9. évfolyamos könyvárak módusza, mediánja, átlaga és szórása? (*6 pont*)

b) Mit tudunk a fenti adatok alapján a 12. évfolyamos könyvek számáról és átlagáráról? (*5 pont*)

c) Ha az A kiadó raktárban levő könyveinek a száma 305, akkor mennyi a B és a C kiadók raktárban levő könyveinek száma, egészre kerekítve (az átlagok is egészre kerekített értékek voltak)? (*5 pont*)

Kántor Sándor
Debrecen

Helyesbítés

A 2018/1. számú feladatsor **8.***b*) feladatának megoldásában az első bekezdésbeli esetvizsgálat nem teljes. Ennek részletezése helyett mutatunk egy egyszerűbb megoldást. Köszönjük *Kántor Sándornak.*

Megoldás. Nevezzük a nem kiválasztott három versenyző sorszámát „visszamaradónak”. Az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számsorban a hat kiválasztott számot a három visszamaradó szám csak úgy választhatja szét, hogy legalább két helyen szomszédosak a kiválasztott számok. Ha a visszamaradó számok nem választják szét a kiválasztottakat (tehát a visszamaradók éppen az $1, 2, 3$ vagy a $7, 8, 9$), akkor is van legalább két helyen szomszédos szám.

Ha a szomszédos kiválasztott számok között vannak olyanok, melyekre $a < a+1 < b < b+1$ teljesül, akkor $a+(b+1) = (a+1)+b$, tehát van egyező összeg. Ha nincsenek ilyenek, akkor a két-két szomszédos szám az a, $a+1$ és az $a+1$, $a+2$. Ekkor a maradék három kiválasztott számot ezektől és egymástól is elválasztja egy-egy visszamaradó szám. Tehát van két kiválasztott szám, melyre vagy $a < a+1 < a+2 < b < b+2$, vagy $b-2 < b < a < a+1 < a+2$. Az első esetben $a+(b+2) = (a+2)+b$, a másodikban is lesz egyező összeg. Tehát Botondnak nincs igaza.

Megoldásvázlatok a 2018/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Egy bolthálózat húszéves fennállása alkalmából azzal kedveskedik a vásárlóknak, hogy* 20% *kedvezményt kapnak vásárlásuk összegéből, ha* 4 *kockával dobva a dobott számok összege legalább* 20.

a) Mekkora ennek a valószínűsége?

b) Becsüljük meg, mennyibe kerül a vállalatnak ez az akció a jubileumi évben, ha 38 000 *vásárlóra számítanak és a vásárlások összegszerű megoszlását az alábbi* táblázatban *adták meg:*

0 – 4999 Ft	12%
5000 – 9999 Ft	36%
10 000 – 14 999 Ft	47%
15 000 – 50 000 Ft	5%

(*11 pont*)

Megoldás. *a*) Az összes esetek száma: $N_{\text{ö}} = 6^4 = 1296$.

Kedvező esetek:

$6+6+6+6=24$, $5+5+5+5=20$	$2 \cdot 1 = 2$ eset
$5+6+6+6=23$, $4+6+6+6=22$, $3+6+6+6=21$, $2+6+6+6=20$, $5+5+5+6=21$	$5 \cdot \binom{4}{1} = 5 \cdot 4 = 20$ eset
$5+5+6+6=22$, $4+4+6+6=20$	$2 \cdot \binom{4}{2} = 2 \cdot 6 = 12$ eset
$4+5+6+6=21$, $4+6+5+5=20$, $3+5+6+6=20$	$3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 = 3 \cdot 12 = 36$ eset

$$N_{\text{k}} = 70.$$

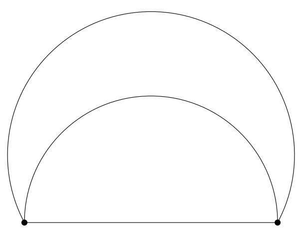
A keresett valószínűség: $p = \frac{N_{\text{k}}}{N_{\text{ö}}} = \frac{70}{1296} \approx 0{,}054$.

b) A várható 38 000 vásárló közül a kapott valószínűség szerint 2052 fog nyerni. A nyerteseket a vásárlások megoszlása szerint szétosztva, és a megadott összeghatárok középértékével számolva:

2 500 Ft	12%	246	615 000
7 500 Ft	36%	739	5 542 500
12 500 Ft	47%	964	12 050 000
32 500 Ft	5%	103	3 347 500
Összesen:	100%	2,052	21 555 000

Tehát várhatóan 21 555 000 Ft-ba fog kerülni a jubileumi akció a cégnek.

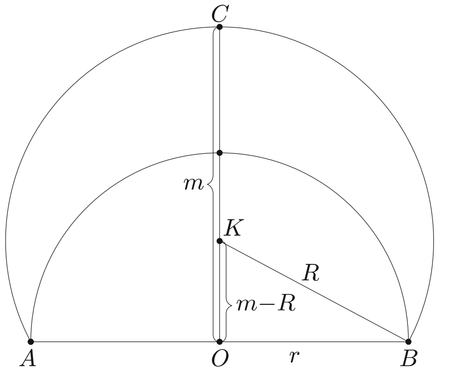
2. *Egy LED lámpát úgy alakítottak ki, hogy a LED fényforrásokat egy félgömb felületén helyezték el és azért, hogy a felülete ne legyen vakító, egy gömbszelet alakú opálos burát helyeztek fölé az ábrának megfelelően. A két bura falvastagsága elhanyagolható. A félgömb sugara* 15 cm, *a bura felülete pedig pont kétszerese a félgömb felszínének. A lámpákat a gyárban négyzetes oszlop alakú papírdobo-*



zokba csomagolják úgy, hogy a csillárok ne mozdulhassanak el a dobozban. Mekkorák legyenek a dobozok külső méretei, ha a rétegelt papír vastagsága $d = 5$ mm?

(*12 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. A félgömb középpontja legyen O, sugara $r = 15$ cm, a gömbszelet középpontja K, sugara R, magassága m.



A félgömb felszíne: $A = 2\pi r^2$, a bura felszíne: $A_B = 2\pi Rm$. A feltétel szerint $A_B = 2A$, vagyis $2\pi Rm = 4\pi r^2$, amiből $Rm = 2r^2$. A BKO derékszögű háromszögben írjuk fel a Pitagorasz-tételt:

$$(m-R)^2 + r^2 = R^2,$$

$$m^2 - 2mR + R^2 + r^2 = R^2,$$

$$m^2 = 2mR - r^2.$$

Behelyettesítve Rm értékét: $m^2 = 3r^2$. Mivel $m > 0$, így $m = \sqrt{3}r \approx 25{,}98$ cm és

$$R = \frac{2r^2}{m} = \frac{2r^2}{\sqrt{3}r} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = 17{,}32 \text{ cm}.$$

A doboz külső méretei: $a = 2(R+d) \approx 35{,}64$ cm és $m \approx 25{,}98$ cm.

3. *Egy személyautó fedélzeti számítógépe az átlagfogyasztást az előzőleg megtett* 100 km *alapján számítja. A tankban lévő üzemanyag mennyiségét is ismerve így azt is jelzi, hogy hány* km*-t tudunk még autózni a meglévő üzemanyaggal, nevezzük ezt hatótávolság. Egy alkalommal induláskor a hatótáv kijelzett értéke* 500 km. *Egyenletes sebességgel haladunk autópályán.* 50 km *megtétele után a kijelző* 588 km*-es hatótávot jelez. Ezután még* 680 km*-t teszünk meg ugyanezzel az egyenletes sebességgel, amikor az üzemanyag jelző vészvillogó kigyullad, jelezve, hogy már csak* 5 l *üzemanyagunk van. Mennyi üzemanyag volt a tankban induláskor?*

Megoldás. Legyen a tankban lévő üzemanyag induláskor x liter, az autópályán történő egyenletes haladáskor a fogyasztás y liter/km. Mivel a hatótáv induláskor 500 km, így az előzőleg megtett 100 km-en $\frac{x}{500}$ liter/km volt az átlagfogyasztás.

50 km megtétele után a gépkocsi $50y$ liter üzemanyag fogyasztott, ezért a tankban most $x - 50y$ liter benzin van. Az előző 100 km-en az átlagfogyasztás:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{500} + y\right).$$

Ezzel a fogyasztással számolva a tankban lévő üzemanyag még 588 km-re lenne elegendő, így

$$\frac{588}{2}\left(\frac{x}{500} + y\right) = x - 50y.$$

Indulástól a vészvillogó kigyulladásáig $50+680=730$ km-t tettünk meg y liter/km átlagfogyasztással, vagyis $730y$ liter üzemanyagot fogyasztottunk el, ezért $x-730y=5$. A második egyenletből x-et kifejezve: $x=730y+5$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe és rendezve:

$$294\left(\frac{730y+5}{500}+y\right)=730y+5-50y,$$

$$723{,}24y+2{,}94=680y+5,$$

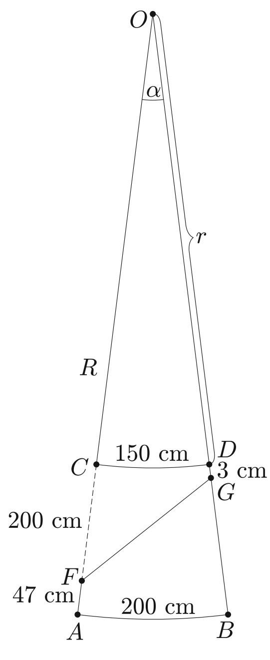
$$43{,}24y=2{,}06,$$

$$y\approx 0{,}047\,641.$$

Ezt beírva a második egyenletbe: $x\approx 39{,}78$. Tehát induláskor 39,78 liter üzemanyag volt a tankban.

4. *Egy torony csonkakúp alakú kupolája alul* 4 m, *felül* 3 m *kerületű, alkotója pedig* 2 m. *A kupola egyik oldalán egy hangya mászik fel a torony tengelyének síkjában,* 47 cm*-re van a kupola alsó szegélyétől. A vele átellenes oldalon egy másik hangya mászik felfelé ugyanabban a síkban, és már csak* 3 cm *hiányzik, hogy elérje a kupola tetejét. Ekkor a két hangya az eredeti úti célt feladva, a lehető legrövidebb úton egymás felé indul. Mekkora távolságot tesznek meg a találkozásig, ha egyenlő sebességgel haladnak?* (*14 pont*)

Megoldás. Egészítsük ki a csonkakúp palást felét körcikké. Használjuk az *ábra* jelöléseit.



Legyen $OA=OB=R$, $OC=OD=r$. Az első hangya helyét jelölje az F pont, így $AF=47$ cm, a másodikét a G pont, így $GD=3$ cm. $AC=BD=200$ cm, így $R=r+200$. Az adott kerület értékekből következik, hogy a körívek hossza: $AB=200$ cm, $CD=150$ cm. Az OCD és OAB körcikkek hasonlósága miatt:

$$\frac{R}{200}=\frac{r}{150},\quad \text{vagyis}\quad \frac{r+200}{200}=\frac{r}{150},$$

amiből $r=600$ cm adódik. Számoljuk ki az α szöget:

$$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{CD_{\text{ív}}}{2r\pi},\quad \text{amiből}\quad \alpha=\frac{150}{2\cdot 600\pi}\cdot 360^\circ\approx 14{,}32^\circ.$$

Az OFG háromszögben keressük az FG oldalt, $OF=r+CF=600+153=753$ cm, $OG=r+3=$ $=603$ cm. Használjuk a koszinusz-tételt:

$$FG^2=753^2+603^2-2\cdot 753\cdot 603\cdot\cos 14{,}32^\circ.$$

Ebből $FG\approx 225{,}20$ cm. Mivel azonos sebességgel haladnak, ezért egy hangyának ennek a felét, 112,62 cm-t kell megtenni.

II. rész

5. *a) Oldjuk meg az alábbi egyenletet:*

$$5|x| = x \cdot \left(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}\,\right).$$

b) Határozzuk meg az $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ és a $g(x) = 5|x|$ függvények által közrezárt területrész nagyságát. *(16 pont)*

Megoldás. $x = 0$ megoldása az egyenletnek, mert ekkor a gyökjel alatti kifejezés értéke pozitív és mindkét oldal 0.

Legyen $x > 0$. Ekkor

$$5x = x \cdot \left(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}\,\right).$$

A $-x^2 - 2x + 8 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai -4 és 2. Így $-x^2 - 2x + 8 \geqslant 0$ akkor teljesül, ha $0 < x \leqslant 2$. Ekkor mindkét oldalt osztva x-szel:

$$5 = 3x + 2 - 2\sqrt{-x^2 - 2x + 8}\,,$$

$$2\sqrt{-x^2 - 2x + 8} = 3x - 3.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve (ez $x \geqslant 1$ esetén ekvivalens átalakítás):

$$4(-x^2 - 2x + 8) = 9x^2 - 18x + 9.$$

Rendezve:

$$0 = 13x^2 - 10x - 23.$$

A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{23}{13}$ és $x_2 = -1$.

A kezdő feltétel és a kikötés miatt az egyenlet megoldása: $x_1 = \frac{23}{13}$.

Legyen $x < 0$. Ekkor

$$-5x = x \cdot \left(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}\,\right).$$

A $-x^2 - 2x + 8 \geqslant 0$ egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-4 \leqslant x < 0$. Mindkét oldalt osztva x-szel:

$$-5 = 3x + 2 - 2\sqrt{-x^2 - 2x + 8}\,,$$

$$2\sqrt{-x^2 - 2x + 8} = 3x + 7.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve (ez $x \geqslant -\frac{7}{3}$ esetén ekvivalens lépés):

$$4(-x^2 - 2x + 8) = 9x^2 + 42x + 49.$$

Rendezve:

$$0 = 13x^2 + 50x + 17.$$

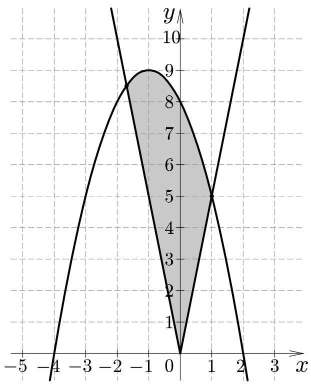
A másodfokú egyenlet gyökei:

$$x_3 = \frac{-25-2\sqrt{101}}{13} \approx -3{,}4692 \quad \text{és} \quad x_4 = \frac{-25+2\sqrt{101}}{13} \approx -0{,}3769.$$

Mindkét megoldás megfelel a kikötéseknek.

Összegezve: Négy megoldást találtunk. Ebből három kielégíti az egyenletet.

b) Határozzuk meg a metszéspontok x koordinátáit.



$x \geqslant 0$ esetén $5x = -x^2 - 2x + 8$, vagyis

$$x^2 + 7x - 8 = 0.$$

A pozitív megoldás $x_1 = 1$.

$x < 0$ esetén $-5x = -x^2 - 2x + 8$, vagyis

$$x^2 - 3x - 8 = 0.$$

A negatív megoldás $x_2 \approx -1{,}7$.

A közrezárt területrész nagysága:

$$T = \int_{-1,7}^{0} -x^2 - 2x + 8 - (-5x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} -x^2 - 2x + 8 - 5x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1,7}^{0} -x^2 + 3x + 8\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} -x^2 - 7x + 8\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 8x\right]_{-1,7}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 8x\right]_{0}^{1} \approx 7{,}63 + 4{,}17 = 11{,}8.$$

6. *Egy üzemanyagtöltő állomás földalatti benzintároló tartálya egy fekvő hengerpalástból és a két végét lezáró két félgömbből áll. Teljes hossza* 6 m, *sugara* 1,2 m.

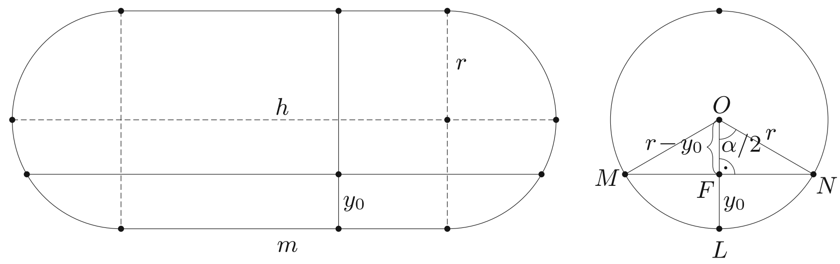
a) *Mekkora a tartály térfogata?*

b) *Mennyi benzin van benne, ha a szintmérő úszó éppen a sugár felénél áll?*

c) *Egy tartálykocsiból feltöltik a tárolót. Mennyi benzint engedtek bele, ha a szintmérő* 92 cm*-rel emelkedett?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Használjuk az *ábra* jelöléseit. $h = 6$ m, $r = 1{,}2$ m. A tartály térfogata egy henger és egy gömb térfogatának az összege. A henger magassága $m = h - 2r = 3{,}6$ m.

$$V = r^2\pi m + \frac{4r^3\pi}{3} = 1{,}2^2\pi \cdot 3{,}6 + \frac{4 \cdot 1{,}2^3\pi}{3} \approx 23{,}524 \text{ m}^3.$$



b) A szintmérő $y_0 = \frac{r}{2} = 0{,}6$ m magasan áll. Az OFN derékszögű háromszögben

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r-y_0}{r} = \frac{0{,}6}{1{,}2} = \frac{1}{2}, \quad \text{ezért} \quad \frac{\alpha}{2} = 60^\circ, \quad \alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad.}$$

Az LMN körszelet területe:

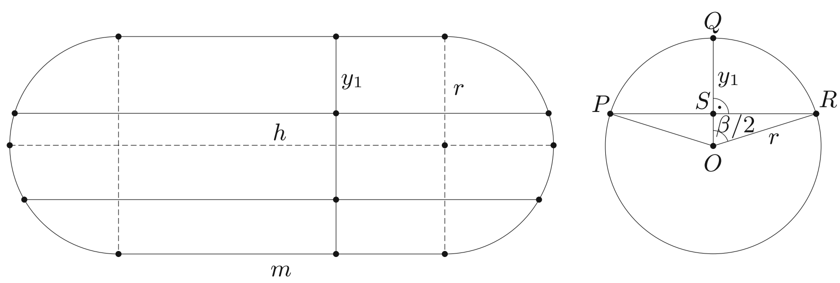
$$T_{\text{sz}} = \frac{1}{2}r^2(\alpha_r - \sin\alpha) = \frac{1}{2}1{,}2^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin 120^\circ\right) \approx 0{,}884\,426\ \text{m}^2.$$

Az üzemanyag térfogata egy gömbszelet és egy körszelet alapú hasáb térfogatának összege. A gömbszelet magassága y_0.

$$V_0 = V_{\text{gsz}} + V_{\text{h}} = \pi r y_0^2 - \frac{\pi y_0^3}{3} + T_{sz}\cdot m \approx \pi\cdot 1{,}2\cdot 0{,}6^2 - \frac{\pi\cdot 0{,}6^3}{3} + 0{,}884\,426\cdot 3{,}6,$$
$$V_0 \approx 4{,}315\ \text{m}^3.$$

Tehát 4,315 m^3 benzin van a tartályban.

c) Ha a szintmérő 92 cm-t emelkedik, akkor $0{,}6 + 0{,}92 = 1{,}52$ m magasan fog állni, vagyis a tartály tetejéig még $y_1 = 2,4 - 1{,}52 = 0{,}88$ m távolság van. Számítsuk ki a tartályban lévő levegő térfogatát a *b*) pontban alkalmazott módszerrel és ebből már egyszerűen megkaphatjuk, mennyi benzint engedtek a tartályba.



Az ORS derékszögű háromszögben

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{r-y_1}{r} = \frac{0{,}32}{1{,}2} = \frac{4}{15}, \quad \text{ezért} \quad \frac{\alpha}{2} \approx 1{,}300\,86\ \text{rad}, \quad \alpha \approx 2{,}601\,73\ \text{rad.}$$

Az LMN körszelet területe:

$$T_{\mathrm{sz1}} = \frac{1}{2}r^2(\alpha_r - \sin\alpha_r) \approx \frac{1}{2}1{,}2^2(2{,}601\,73 - \sin 2{,}601\,73) \approx 1{,}503\,15\ \mathrm{m}^2.$$

A gömbszelet magassága y_1.

$$V_1 = V_{\mathrm{gsz1}} + V_{\mathrm{h1}} = \pi r y_1^2 - \frac{\pi y_1^3}{3} + T_{\mathrm{sz1}} \cdot m =$$

$$= \pi \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}88^2 - \frac{\pi \cdot 0{,}88^3}{3} + 1{,}503\,15 \cdot 3{,}6 \approx 7{,}617\,12\ \mathrm{m}^3,$$

$$V_1 \approx 7{,}617\ \mathrm{m}^3.$$

A tartályba töltött benzin mennyisége:

$$V_{\mathrm{BE}} = V - V_0 - V_1 = 23{,}524 - 4{,}315 - 7{,}617 = 11{,}592\ \mathrm{m}^3.$$

7. *Egy ismeretlen alapú számrendszerben az $\overline{ab}_x$ kétjegyű szám és a számjegyei felcserélésével kapott $\overline{ba}_x$ kétjegyű szám között a következő összefüggések állnak fenn:*

1. $$\overline{ab}_x + \overline{ba}_x = \overline{110}_x,$$

2. $$\overline{ab}_x - \overline{ba}_x = \overline{20}_{10}.$$

a) Határozzuk meg a számrendszer alapját.

b) Az ilyen alapú számrendszerekben milyen oszthatósági szabály érvényes a 3-mal és az 5-tel való oszthatóságra?

c) Határozzuk meg a c és d számjegyek értékét úgy, hogy az $\overline{12c45d}_x$ alakú szám a lehető legnagyobb 15-tel osztható szám legyen ezekben a számrendszerekben.

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az első egyenletben az 1-es helyiértékű számjegyeket összeadva látszik, hogy $b + a = x$, vagyis $b = x - a$. A második egyenletből:

$$ax + b - bx - a = 20.$$

Ebbe beírva az első egyenletből kapott összefüggést:

$$ax + x - a - (x - a) \cdot x - a = 20.$$

Rendezve:

$$2ax - 2a - x^2 + x = 20,$$

$$2a(x - 1) - x(x - 1) = 20,$$

$$(2a - x)(x - 1) = 20.$$

Ha x páros szám, akkor $(x - 1)$ páratlan, $(2a - x)$ pedig páros. Ha x páratlan szám, akkor $(x - 1)$ páros és $(2a - x)$ páratlan. A két szorzótényező tehát ellenkező paritású. 20 osztóit figyelembe véve 4 esetet kell megvizsgálnunk:

1. $(2a-x)(x-1)=1\cdot 20$. Ekkor $x-1=20$, vagyis $x=21$, és $2a-x=1$, vagyis $a=11$. Ez megoldás.

2. $(2a-x)(x-1)=20\cdot 1$. Ekkor $x-1=1$, vagyis $x=2$, és $2a-x=20$, vagyis $a=11$. Mivel $a>x$, ezért ez nem megoldás.

3. $(2a-x)(x-1)=4\cdot 5$. Ekkor $x-1=5$, vagyis $x=6$, és $2a-x=4$, vagyis $a=5$. Ez megoldás.

4. $(2a-x)(x-1)=5\cdot 4$. Ekkor $x-1=4$, vagyis $x=5$, és $2a-x=5$, vagyis $a=5$. Mivel $a=x$, ezért ez nem megoldás.

Tehát a számrendszer alapja $x=6$ vagy $x=21$ lehet.

b) Egy 6 vagy 21 alapú számrendszerben pontosan akkor osztható 3-mal egy szám, ha az utolsó számjegye osztható, hiszen a számrendszer alapja osztható 3-mal.

Mivel $6=5+1$ és $21=4\cdot 5+1$, ezért a 6 és 21 minden hatványa 5-tel osztva 1-et ad maradékul. Így ezekben a számrendszerekben egy szám akkor osztható 5-tel, ha számjegyeinek összege osztható 5-tel.

c) Legyen $x=6$. Ekkor az $\overline{12c45d}_6$ akkor lesz 15-tel osztható, ha 3-mal és 5-tel is osztható. 3-mal akkor osztható, ha utolsó számjegye $d=0$ vagy $d=3$.

$\overline{12c450}_6$ esetén a számjegyek összege $12+c$. Ez csak $c=3$ esetén lesz 5-tel osztható, így a szám $\overline{123450}_6$.

$\overline{12c453}_6$ esetén a számjegyek összege $15+c$. Ez csak $c=5$ esetén lesz 5-tel osztható. Ekkor a szám $\overline{125453}_6$. Ez a nagyobb szám.

Legyen $x=21$. Ekkor az $\overline{12c45d}_{21}$ utolsó számjegye lehet 18. Ekkor a számjegyek összege $30+c$. Az 5-tel való oszthatósághoz lehet $c=20$. Ez a legnagyobb számjegy a 21-es számrendszerben, így biztosan ez a feltételeknek megfelelő legnagyobb szám, tehát

$$\overline{12(20)45(18)}_{21}.$$

8. *Péter egy* 5,2 *millió Ft értékű új autót vásárol egy autókereskedőtől. Az összeg* 40%*-a az önrész, amit átvételkor ki kell fizetnie, az ár fennmaradó részét* 5 *év alatt törleszti, évi egyenlő részletekben* 8%*-os éves kamattal.*

a) *Mennyi lesz Péter éves törlesztő részlete?*

A kereskedő ajánlata, hogy ha 5 *év múlva egy ugyanilyen értékű kocsit vesz nála, akkor ezt az autót visszavásárolja tőle, évi* 10% *értékcsökkenést figyelembe véve és csak az árkülönbözetet kell kifizetnie.*

b) *Mennyit kell fizetnie Péternek az új autóért* 5 *év múlva, ha elfogadja az ajánlatot?*

Péter elhatározza, hogy elfogadja a kereskedő ajánlatát és előtakarékoskodik az 5 *év múlva esedékes autócserére. A bank legjobb ajánlata évi* 2,4%*-os kamat* 5 *éves futamidőre havi egyenlő részletekben történő befizetéssel, havi kamatozással. (A havi kamat az éves kamat tizenketted része.)*

Mekkora összeget fizessen be a bankba havonta, hogy az 5 *év után kivett összegből fedezni tudja az autó cseréjét?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az $5200\cdot 0{,}6=3120$ eFt hitelt 8% kamattal évi x eFt-os egyenlő részletekben 5 év alatt törleszti úgy, hogy az utolsó befizetéskor a hitel lejár.

$$3120\cdot 1{,}08^5 = x\cdot 1{,}08^4 + x\cdot 1{,}08^3 + x\cdot 1{,}08^2 + x\cdot 1{,}08^1 + x,$$

$$4584{,}3036 = x\cdot \frac{1{,}08^5-1}{1{,}08-1} = 5{,}8666x,$$

$$x\approx 781{,}424 \text{ eFt.}$$

Az éves törlesztő részlet 781 424 Ft lesz.

b) 5 év múlva a 10% értékcsökkenést figyelembe véve az autó értéke $5\,200\,000\cdot 0{,}9^5\approx 3\,070\,548$ eFt lesz, ezért Péternek $5\,200\,000-3\,070\,548=2\,129\,452$ eFt-ot kell fizetni 5 év múlva a kereskedőnek a cseréért.

c) 5 év alatt, havi x Ft-os befizetéssel, évi 2,4%-os, vagyis havi 0,2%-os kamattal 2 129 452 Ft-ot kell összegyűjtenie.

$$x\cdot 1{,}002^{60} + x\cdot 1{,}002^{59} + \ldots + x\cdot 1{,}002^2 + x\cdot 1{,}002 = 2\,129\,452,$$

$$1{,}002\cdot x\cdot \frac{1{,}002^{60}-1}{1{,}002-1} = 2\,129\,452,$$

$$x\approx 33\,373 \text{ Ft.}$$

Tehát 33 373 Ft-ot kell havonta befizetnie, hogy 5 év múlva a kivett összegből fedezni tudja az autó cseréjét.

9. *Egy* 12 *pontú egyszerű gráfnak* 56 *éle van.*

a) *Legalább hány kilencnél nagyobb fokszámú csúcsa van a gráfnak?*

b) *Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő.*

Egy asztalitenisz csapatnak 6 *férfi és* 6 *nő versenyzője van.*

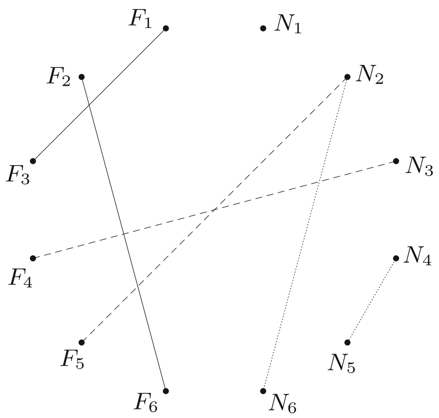
c) *Az edzőnek két férfi, két női és két vegyes párost kell kiválasztania egy közelgő versenyre. Egy versenyző legfeljebb két különböző típusú párosban játszhat. Hányféle kiválasztás lehetséges?*

d) *Mennyi az esélye annak, hogy az egyik női versenyző, Tímea, egyik párosba sem kerül be?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Ha minden csúcsnak 9 lenne a fokszáma, akkor a fokszámok összege $12\cdot 9=108$ lenne. Az 56 él miatt a fokszámok összege 112, a különbség 4. Egy csúcs maximális fokszáma 11 lehet, tehát lehet két 11 fokszámú csúcs és 10 csúcs, aminek 9 a fokszáma. Ez megvalósítható úgy, hogy egy 12 pontú teljes gráfban két pontban minden élt meghagyunk. A maradék 10 pontot egy szabályos 10 szög csúcsainak képzelve elhagyjuk a szomszédos csúcsokat összekötő éleket. Ekkor ezek fokszáma 9-re csökken.

Tehát legalább kettő 9-nél nagyobb fokszámú csúcsa van a gráfnak.

b) A 11 pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{11\cdot 10}{2}=55$. Mivel ennek a gráfnak 56 éle van, így a 12. pontból is indul legalább egy él, ezért a gráf összefüggő.



c) A 6 férfiversenyző közül két férfi pároshoz kell kiválasztani játékosokat, úgy, hogy egy férfi játékos nem szerepelhet mindkét párosban (*ábra*).

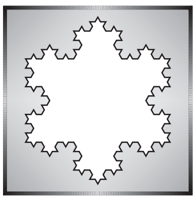
Ez $n_{\mathrm{F}} = \frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2} = 90$-féleképpen lehetséges. Hasonlóan $n_{\mathrm{N}} = 90$-féleképpen lehet kiválasztani a női páros tagjait a 6 nő közül. A vegyes páros tagja bármelyik nő és bármelyik férfi lehet, mert eddig mindenki legfeljebb egy párosban szerepel. Így a két vegyes páros tagjait $n_{\mathrm{V}} = 6\cdot 6\cdot 5\cdot 5 = 900$-féleképpen lehet kiválasztani. Összesen tehát $n_{\ddot{o}} = n_{\mathrm{F}}\cdot n_{\mathrm{N}}\cdot n_{\mathrm{V}} = 7\,290\,000$ féle kiválasztás lehetséges.

d) Ha Tímea egyik párosba sem kerül be, akkor a női párosok tagjait csak 5 nő közül választhatjuk ki, így $n_{\mathrm{N1}} = \frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{3\cdot 2}{2} = 30$. A vegyes páros tagjait 6 férfi és 5 nő közül választhatjuk, vagyis $n_{\mathrm{V1}} = 6\cdot 5\cdot 5\cdot 4 = 600$. Tehát a kedvező esetek száma: $n_{\mathrm{K}} = n_{\mathrm{F}}\cdot n_{\mathrm{N1}}\cdot n_{\mathrm{V1}} = 1\,620\,000$.

Így annak az esélye, hogy Tímea egyik párosba sem kerül be:

$$p = \frac{n_{\ddot{o}}}{n_{\mathrm{K}}} = \frac{1\,620\,000}{7\,290\,000} = 0{,}2 = 20\%.$$

Lorántfy László
Dabas



C gyakorlat megoldása

C. 1444. *Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:*

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x \leqslant 96.$$

I. megoldás. Alakítsuk a fenti egyenlőtlenséget a következőképpen:

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 96 \leqslant 0.$$

Mint ismeretes, amennyiben egy egész együtthatós polinomnak gyöke egy egész szám, úgy az a konstans tagjának osztója. Így érdemes megvizsgálni a -96 osztóit, annak reményében, hogy találunk köztük megoldást.

Első esetben $-96 = (-1) \cdot 96 = -96 = 1 \cdot (-96)$. Behelyettesítve láthatjuk, hogy egyik osztó sem megoldás.

Második esetben $-96 = (-2) \cdot 48 = 2 \cdot (-48)$. Behelyettesítve láthatjuk, hogy $x = -2$ gyöke az egyenletnek. Polinomosztással a következő harmadfokú függvényt kapjuk:

$$\left(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 96\right) : (x + 2) = x^3 - 6x^2 + 20x - 48.$$

A fenti elvet tovább alkalmazva: $-96 = 4 \cdot (-24)$ és $-96 = (-4) \cdot 24$. Behelyettesítve láthatjuk, hogy $x = 4$ szintén gyöke az egyenletnek. Egy további polinomosztással a már megkapott harmadfokú függvény alapján a következőt kapjuk:

$$\left(x^3 - 6x^2 + 20x - 48\right) : (x - 4) = x^2 - 2x + 12.$$

Azonban ezen másodfokú polinom esetén a diszkrimináns értéke $4 - 4 \cdot 12 < 0$, vagyis nincs valós gyöke. Tehát az $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 96$ függvény görbéje pontosan két pontban metszi az x-tengelyt. Mivel $f(-3) = f(5) = 189 > 0$ és $f(0) = -96 < 0$, ezért a függvény a $(-\infty; -2)$ és az $(4; \infty)$ intervallumon pozitív értékeket, míg a $(-2; 4)$ intervallumon negatív értékeket vesz fel. Minthogy grafikonja máshol nem metszi az x-tengelyt, így értéke nem is változhat pozitívról negatívra vagy fordítva egyéb helyeken. Mivel a feladatban szereplő egyenlőtlenség megengedi az egyenlőséget is, ezért $-2 \leqslant x \leqslant 4$ esetén teljesül.

Pszota Máté (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Sokan számítógépes programmal ábrázolták az $f(x)$ függvényt, és úgy olvasták le a két gyököt. Ám ekkor még egyrészt ellenőrzéssel meg kell róla győződni, hogy valóban gyök a két leolvasott érték (hiszen lehetne a valódi gyök mondjuk $-2{,}00004$ is), másrészt be kell látni, hogy más megoldás nincsen (hiszen bármilyen programmal is ábrázoljuk, mindenképpen csak egy adott intervallumon látszódik a függvény görbéje).

II. megoldás. Azonos átalakításokkal az egyenlőtlenség bal oldala a következő szorzattá alakítható:

$$(x^2 - 2x)\left((x^2 - 2x) + 4\right).$$

Vezessünk be új változót: $y = x^2 - 2x = x(x - 2)$, ezzel a megoldandó egyenlőtlenségünk a következő egyszerű alakot ölti:

$$y^2 + 4y \leqslant 96.$$

Adjunk az egyenlőtlenség mindkét oldalához 4-et, így teljes négyzetet kapunk:

$$(y + 2)^2 \leqslant 100.$$

Ennek megoldása: $-10 \leqslant y + 2 \leqslant 10$, amiből $0 \leqslant y \leqslant 8$ vagy $-12 \leqslant y < 0$.

Térjünk vissza a régi változóra. A következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$-12 \leqslant x(x - 2) < 0, \quad \text{illetve} \quad 0 \leqslant x(x - 2) \leqslant 8.$$

Az $f(x) = x(x - 2)$ függvény negatív és zéró értéket a $[0; 2]$ intervallumon vesz fel, minimális értéke $f\left(\frac{0+2}{2}\right) = f(1) = -1$, tehát minden pontban igaz, hogy

$x(x-2) \geqslant -12$. Vagyis az első egyenlőtlenség $x(x-2)<0$, azaz $x \in (0;2)$ esetén teljesül.

A vizsgált függvény pozitív értékeket az előbbi intervallumon kívül, vagyis $x \notin (0,2)$ esetén vesz fel, itt teljesülni kell az $x(x-2) \leqslant 8$ egyenlőtlenségnek. Az $x^2-2x-8=0$ egyenlet gyökei

$$\frac{2-\sqrt{4+4\cdot 8}}{2}=-2 \quad \text{és} \quad \frac{2+\sqrt{4+4\cdot 8}}{2}=4,$$

tehát ha $x \notin (0,2)$, akkor az $x(x-2) \leqslant 8$ egyenlőtlenség megoldása $x \in [-2;0] \cup$ $\cup\, [2;4]$.

Végül az eredeti egyenlőtlenség megoldása $x \in [-2;4]$.

Werner András (Budapest, Piarista Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Sokan oldották meg a honlapunkon is látható módon a feladatot: az egyenlőtlenséget

$$(x-1)^4+2(x-1)^2-99 \leqslant 0$$

alakra hozva, majd bevezetve az $y=(x-1)^2$ változót.

205 dolgozat érkezett. 5 pontos 112, 4 pontos 33, 3 pontos 17, 2 pontos 9, 1 pontos 19, 0 pontos 10 dolgozat. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

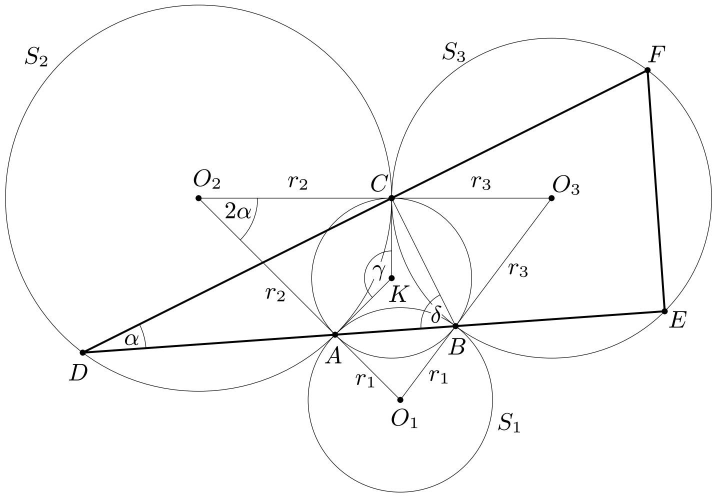
B. 4891. *Az S_1, S_2, S_3 körök páronként kívülről érintik egymást. Legyenek A, B és C rendre az S_1 és S_2, S_1 és S_3, S_2 és S_3 körök közös pontjai. Az AB egyenes ismételten elmetszi az S_2 és S_3 köröket a D, illetve az E pontokban. A DC egyenes újabb metszéspontja az S_3 körrel legyen az F pont. Bizonyítsuk be, hogy a DEF háromszög derékszögű.*

(*5 pont*) (*Kvant*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit.

Az $O_1O_2O_3$ háromszög oldalait az A, B, C pontok úgy osztják fel, mint a háromszög beírt körének érintési pontjai, hiszen $O_1A=O_1B=r_1$, $O_2A=O_2C=$ $=r_2$ és $O_3B=O_3C=r_3$. Ezért az ABC háromszög körülírt köre éppen az $O_1O_2O_3$ háromszög beírt köre.

Legyen $ADC\sphericalangle=\alpha$. Ekkor a kerületi és középponti szögek tétele miatt az AC ívhez tartozó középponti szög: $AO_2C\sphericalangle=2\alpha$. Mivel K a beírt kör középpontja, O_2A és O_2C pedig érintők, azért $O_2CK\sphericalangle=90^\circ$ és $O_2AK\sphericalangle=90^\circ$, mert az érintők merőlegesek a sugarakra. Ebből adódik, hogy az AO_2CK négyszögben, ami egy



derékszögű deltoid, $CKA\sphericalangle = \gamma = 180^\circ - 2\alpha$. Ez a szög középponti szög az ABC háromszög körülírt körében, ezért az AC ívhez tartozó kerületi szög:

$$ABC\sphericalangle = \delta = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

A BCD háromszögben $BCD\sphericalangle = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$.

A $BCFE$ húrnégyszögben $BCF\sphericalangle = 180^\circ - BCD\sphericalangle = 90^\circ$, ezért a vele szemben lévő $BEF\sphericalangle$ is 90°, vagyis a DEF háromszög derékszögű. Ezt kellett bizonyítani.

Olosz Adél (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk., Gimn., Szakgimn. és Óvoda, 11. évf.) és
Nagy Nándor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

114 dolgozat érkezett. 5 pontos 91, 4 pontos 7, 3 pontos 2, 2 pontos 8, 1 pontos 6 dolgozat.

B. 4901. *Törpfalván járvány ütötte fel a fejét azt követően, hogy csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Az állapot megváltozása mindig éjszaka, alvás közben következik be. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha egy beteg törp egy nem immunis, egészséges törppel találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván* 100 *törp él, akkor a járványnak a kitörését követő* 101. *napon már biztosan vége van.*

(*6 pont*) *BME VIK folklór*

Megoldás. Jelölje B_1 azoknak a törpöknek a halmazát, akik a legelső napon (a járvány kitörésekor) betegek. Legyen továbbá B_2 azoknak a halmaza, akiket a B_1-beli törpök (az 1. napon) megfertőznek; nyilván a B_2 és a B_1 halmazok diszjunktak. Jelölje ezután B_3 azon törpök halmazát, akik a 3. napra megbetegednek; ez csak úgy történhet, hogy a 2. napon megfertőződtek B_2-beli barátaiktól (hiszen akkor csak azok voltak betegek). Értelemszerűen a B_3 és a B_2 halmazok diszjunktak; megmutatjuk, hogy ráadásul B_3 a B_1-től is diszjunkt. Ez abból következik, hogy a 2. napon minden B_1-beli törp immunis volt, így akkor nem fertőződhetett meg – tehát nem tartozhat B_3-ba.

Hasonlóan definiáljuk a $B_4, B_5, \dots$ halmazokat: minden j-re legyen B_j azoknak a törpöknek a halmaza, akik a j-edik napon betegek. Nyilván a B_j-beliek a B_{j-1}-hez tartozó barátaiktól kapták a fertőzést a $(j-1)$-edik napon. Megmutatjuk, hogy a $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots, B_j$ halmazok páronként diszjunktak. A $j = 1, 2, 3$ értékekre ez világos; tegyük fel, hogy igaz minden $j < n$-re. Vizsgáljuk ezután B_n státuszát. A B_n-nek és a B_{n-1}-nek nincs közös eleme, hiszen az $(n-1)$-edik napon beteg B_{n-1}-beli törpök az n-edik napon éppen egészségesek (sőt, immunisak), ezért egyikük sem tartozhat B_n-be. Mivel az $(n-1)$-edik napon B_{n-2} elemei immunisak, azért egyikük sem betegedik meg aznap, vagyis az n-edik napon valamennyien egészségesek; tehát B_n és B_{n-2} is diszjunktak.

A B_n-nek a $B_1, B_2, \dots, B_{n-3}$ halmazokhoz való viszonyát tisztázandó tegyük fel indirekten, hogy valamelyikükhöz nem diszjunkt; legyen $1 \leqslant k \leqslant n-3$ olyan érték, amelyre B_n-nek és B_k-nak létezik egy közös T eleme. Jelölje S az egyik olyan elemét B_{n-1}-nek, akitől az $(n-1)$-edik napon T megfertőződött. Az indukciós feltevés szerint S sem B_k-nak, sem pedig B_{k-1}-nek nem eleme, azaz a k-adik napon nem beteg és nem is immunis. Így azonban S-et a k-adik napon megfertőzi beteg barátja T, ezért a $(k+1)$-edik napon S beteg lesz, vagyis $S \in B_{k+1}$. Ebből következik, hogy B_{n-1} és B_{k+1} nem diszjunktak, ami $k+1 < n-1 < n$ és az indukciós feltevés szerint lehetetlen. Ezzel állításunk n-re is teljesül, tehát j minden értékére igaz.

Ha E-vel jelöljük azoknak a törpöknek a halmazát, akik sosem kapják el a betegséget, akkor az E, B_1, B_2, $\dots$ – páronként diszjunkt – halmazok egyesítése a 100 lakosból álló teljes Törpfalva. Ha a $B_1, B_2, \dots B_{100}$ halmazok egyike sem üres, akkor B_{101} már szükségképpen az; ha pedig valamelyikük üres, akkor az utána következő többi is. A 101-edik napon tehát semmiképpen nincs beteg, a járvány véget ér.

139 dolgozat érkezett. 6 pontos 61, 5 pontos 21, 4 pontos 17, 3 pontos 17, 2 pontos 13, 1 pontos 8, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4902. *Adott a síkon négy különböző hosszúságú, egymással párhuzamos szakasz, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 és A_4B_4. Tetszőleges $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ esetén legyen M_{ij} az A_iB_j és A_jB_i egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy az $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$ és $M_{14}M_{23}$ egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.*

(*6 pont*)

Megoldás. A feladatot az (ideális egyenessel kibővített) projektív síkon, a Desargues-tétel többszöri alkalmazásával fogjuk igazolni. Ehhez néhány definíciót, és magát Desargues tételét mondjuk ki először.

1. definíció. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egy e *egyenesre nézve (tengelyesen) perspektívek,* ha az AB és $A'B'$, az AC és $A'C'$, illetve a BC és $B'C'$ egyenespárok P, Q, R metszéspontjai mind rajta vannak az e egyenesen.

Megjegyzés. Az ideális egyenessel kibővített projektív síkon két háromszöget akkor is tengelyesen perspektívnek tartunk a definíció alapján, ha megfelelő oldalpárjaik párhuzamosak (ekkor azok metszéspontjai mind rajta vannak az ideális egyenesen).

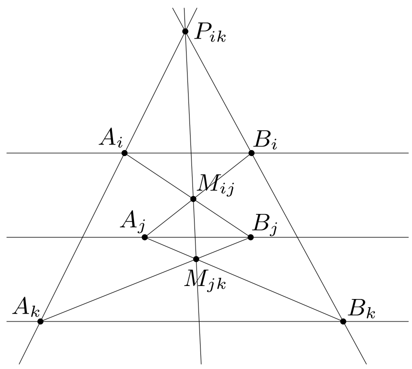
2. definíció. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egy S *pontra nézve (centrálisan) perspektívek,* ha az AA', a BB', és a CC' egyenesek mind átmennek az S ponton.

Desargues tétele. Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek pontra nézve perspektívek, akkor egyenesre nézve is azok, és fordítva is igaz: ha a háromszögek egyenesre nézve perspektívek, akkor pontra nézve is azok.

Ezután térjünk rá a feladat bizonyítására.

Tetszőleges $1 \leqslant i \neq j \leqslant 4$ esetén jelölje P_{ij} az A_iA_j és B_iB_j egyenesek metszéspontját (mivel a megadott szakaszok különböző hosszúságúak, ezért a P_{ij} pontok nem ideális pontok). Legyen továbbá az egymással párhuzamos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 egyenesek közös (ideális) pontja D_∞.

Tekintsük az $A_iB_jA_k$ és a $B_iA_jB_k$ (ahol i, j, k tetszőleges különböző $1 \leqslant \leqslant i, j, k \leqslant 4$ indexek) háromszögeket. Mivel a két háromszög a D_∞ pontra nézve perspektív, így Desargues tétele alapján tengelyesen is perspektív, azaz az A_iB_j, A_jB_i, az A_jB_k, A_kB_j, illetve az A_iA_k, B_iB_k egyenespárok M_{ij}, M_{jk} P_{ik} metszéspontjai egy egyenesre esnek (lásd az *ábrát*).



Az i, j, k indexek megfelelő választásával adódik a következő hat darab ponthármasra, hogy az adott ponthármasok mind egy egyenesre esnek: (1) M_{13}, M_{23}, P_{12}; (2) M_{12}, M_{23}, P_{13}; (3) M_{12}, M_{13}, P_{23}; (4) M_{14}, M_{24}, P_{12}; (5) M_{14}, M_{34}, P_{13}, illetve (6) M_{24}, M_{34}, P_{23} mind (külön-külön) egy egyenesre esik.

Továbbá mivel az $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ háromszögek a D_∞ pontra nézve perspektívek, Desargues tétele alapján tengelyesen is perspektívek, azaz az A_1A_2, B_1B_2, az A_1A_3, B_1B_3, illetve az A_2A_3, B_2B_3 egyenespárok P_{12}, P_{13}, P_{23} metszéspontjai is (akár az imént) egy egyenesre esnek.

Utoljára tekintsük az $M_{12}M_{13}M_{23}$ és $M_{34}M_{24}M_{14}$ háromszögeket.

A fentiek szerint

$$(1+4 \Rightarrow)\ M_{13}M_{23} \cap M_{14}M_{24} = P_{12}, \quad \text{illetve}$$

$$(2+5 \Rightarrow)\ M_{12}M_{23} \cap M_{14}M_{34} = P_{13} \quad \text{és} \quad (3+6 \Rightarrow)\ M_{12}M_{13} \cap M_{24}M_{34} = P_{23},$$

azaz a két háromszög a $P_{12}P_{13}P_{23}$ egyenesre perspektív, de akkor Desargues tétele alapján az $M_{12}M_{13}M_{23}$ és $M_{34}M_{24}M_{14}$ háromszögek pontra nézve is perspektívek, azaz az $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$ és $M_{14}M_{23}$ egyenesek valóban egy ponton mennek át.

Megjegyzés (diszkusszió). Előfordulhat az A_i, B_i pontok megfelelő választása esetén, hogy az az S pont, amire nézve az $M_{12}M_{13}M_{23}$ és $M_{34}M_{24}M_{14}$ háromszögek perspektívek az ideális egyenes egy pontja. Ekkor – mivel projektív síkon dolgoztunk – természetesen az $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$ és $M_{14}M_{23}$ egyenesek párhuzamosak lesznek.

Döbröntei Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.) és
Molnár-Sáska Zoltán (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 23 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 21 versenyző, 5 pontos 1. 4 pontos további 1 tanuló dolgozata.

B. 4903. Határozzuk meg azokat az a, b, c, d pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $abcd-1 \mid a+b+c+d$.

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

Megoldás. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. A számnégyesben szereplő 1-esek száma szerint öt eset lehetséges.

1. eset: a, b, c és d közül mind a négy egyenlő 1-gyel.

Ekkor $abcd-1=0$, tehát $a+b+c+d=0$ kellene, hogy legyen, de ez nem teljesül.

2. eset: a, b, c és d közül három egyenlő 1-gyel. Ekkor a megoldás elején tett feltevésünk miatt $a=b=c=1$. Ezt behelyettesítve ezt kapjuk: $d-1 \mid d+3$. Ekkor $d-1 \mid d+3-(d-1)=4$ is fennáll.

Mivel d pozitív egész, ezért a következő lehetőségek vannak: $d-1=1$, azaz $d=2$, és ez megoldás is; $d-1=2$, azaz $d=3$, ez is megoldás; végül $d-1=4$, azaz $d=5$, ami szintén megoldás. Mivel a 4-nek csak ez a három pozitív egész osztója van, ezért itt nem lesz több megoldás.

Ezentúl használni fogjuk a következő két összefüggést: ha $abcd-1 \mid a+b+c+d$, akkor $abcd-1 \leqslant a+b+c+d$ (ez pozitív egészek esetén teljesül); illetve $a+b+c+d \leqslant 4d$.

3. eset: a, b, c és d közül kettő egyenlő 1-gyel: $a=b=1$. Ekkor $cd-1 \mid c+d+2$. Ezt az esetet tovább bontjuk c értéke szerint.

Ha $c=2$, akkor felírhatjuk ezt az összefüggést:

$$2d-1 \leqslant d+4,$$
$$d \leqslant 5.$$

Itt a $d=2,3,4,5$ eseteket megvizsgálva azt kapjuk, hogy a $d=2$ és a $d=5$ ad megoldást.

Ha $c=3$, akkor ezt írhatjuk fel:

$$3d-1\leqslant d+5,$$
$$d\leqslant 3.$$

Mivel $c\leqslant d$, ezért itt csak a $d=3$ eset lehetséges, ami megoldást is ad.

Ha pedig $c>3$, akkor ezt írhatjuk fel:

$$4d-1\leqslant cd-1\leqslant c+d+2\leqslant 2d+2, \quad \text{amiből}$$
$$2d\leqslant 3.$$

Mivel $d>3$, ezért ez nem lehetséges.

Tehát itt megtaláltuk az összes megoldást.

4. eset: a, b, c és d közül egy egyenlő 1-gyel: $a=1$. Ekkor $bcd-1 \mid b+c+d+1$. Mivel $2\leqslant b\leqslant c\leqslant d$, felírhatjuk a következő összefüggést:

$$2\cdot 2\cdot d-1=4d-1\leqslant bcd-1\leqslant a+b+c+d=b+c+d+1\leqslant 3d+1, \quad \text{amiből}$$
$$4d-1\leqslant 3d+1,$$
$$d\leqslant 2.$$

Mivel $d>1$, ezért itt csak a $d=2$ eset lehetséges, ami ad is egy megoldást $b=c=2$ esetén.

5. eset: a, b, c és d közül egyik sem 1. Mivel $2\leqslant a\ \leqslant b\leqslant c\leqslant d$, ezért felírható az alábbi összefüggés:

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot d-1=8d-1\leqslant abcd-1\leqslant a+b+c+d\leqslant 4d, \quad \text{amiből}$$
$$8d-1\leqslant 4d,$$
$$4d\leqslant 1.$$

Ennek pedig $2\leqslant d$ esetén nem lesz megoldása, tehát itt nincs megoldás.

Összefoglalva, a következő megoldásokat kaptuk: $a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=2$; $a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=3$; $a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=5$; $a=1,\ b=1,\ c=2,\ d=2$; $a=1,\ b=1,\ c=2,\ d=5$; $a=1,\ b=1,\ c=3,\ d=3$; $a=1,\ b=2,\ c=2,\ d=2$.

Kálóczi Kristóf (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések. 1. Egy másik, többek által használt gondolatmenet: feltesszük, hogy $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$, amiből $abcd-1\leqslant a+b+c+d\leqslant 4d$. Ebből $abcd\leqslant 4d+1\leqslant 5d$, azaz $abc\leqslant 5$ adódik. Innen (szintén esetszétválasztással) megkaphatóak a megoldások.

2. Több beküldőnél előfordult a következő hiba: az oszthatóság definíciója alapján felírták, hogy $(abcd-1)k=a+b+c+d$, amiből $abcdk=a+b+c+d+k$, továbbá a szimmetria miatt feltették, hogy $k\geqslant d\geqslant c\geqslant b\geqslant a$, amiből az $abcdk\leqslant 5k$ összefüggést kapták. Végül k-val osztva az $abcd\leqslant 5$ egyenlőtlenséghez jutottak. Ezt vizsgálva azonban nem az összes megoldást kapjuk meg. A hiba ott van a gondolatmenetben, hogy $k\geqslant d$ nem feltétlenül teljesül.

3. Honlapunkon egy harmadik megoldás olvasható.

139 dolgozat érkezett. 4 pontos 81, 3 pontos 29, 2 pontos 15, 1 pontos 10, 0 pontos 4 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (583–588.)

K. 583. Egy egész számot nevezzünk *prímának,* ha igaz rá, hogy az első számjegye prím, az első két számjegyének összege is prím, az első három számjegyének összege is prím és így tovább. Határozzuk meg a csupa különböző számjegyekből álló príma számok közül a legnagyobbat.

K. 584. A Mikulás nagyon erős, ám puttonyában legfeljebb 100 kg ajándékot bír felvinni az emeletre. A Toldi utca 6-ba háromféle ajándékcsomagot vitt: A, B és C típusút. Mind a három fajta csomag egész kilogramm tömegű. Nyolc A-t és nyolc B-t egyszerre fel tud vinni, de abban a körben már semelyik ajándékból sem vihet többet (sem A-ból, sem B-ből, sem C-ből). Hasonlóképpen nem terhelheti meg jobban már a puttonyát, ha 10 A-t, 4 B-t és 4 C-t visz fel egyszerre. Hány kg-os lehet az A, B és C típusú ajándék?

K. 585. András felír a táblára három (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számot, melyek 2018-nál kisebbek. Egy lépésben András a táblán lévő számokat (A, B és C) letörli és ezen számok helyett az

$$\frac{A+B}{2}, \quad \frac{B+C}{2}, \quad \frac{A+C}{2}$$

számokat írja fel a táblára. Ezt a lépést összesen 11-szer megismételve három olyan egész szám van a táblán, melyek közül az egyik a 100. Melyik a táblán lévő másik két szám?

K. 586. Egy szabályos hatszög egy belső pontja három egymást követő csúcstól rendre 4, 4 és 8 egységnyire van. Hány egység a hatszög egy oldala?

K. 587. A 2014, 2015, 2016 és 2017 számok közül hány áll elő hat, nem feltétlenül különböző páratlan szám négyzetének összegeként?

K. 588. Legyenek A és B olyan négyjegyű számok, melyekre $A > B$, továbbá A számjegyeinek sorrendjét megfordítva B-t kapjuk. Mi lehet $A - B$ legkisebb, illetve legnagyobb értéke?

❄

Beküldési határidő: 2018. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1469–1475.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1469. Az ABC háromszög C csúcsából induló magasság talppontja T (az AB oldal belső pontja), R pedig a szögfelezőé: $AB=10$, $AT=3$, $AR=4$. Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát.

C. 1470. Mekkora annak a két egyforma gömbnek a sugara, amelyek középpontjai az egységkocka szomszédos lapjainak középpontjai, és érintik egymást?

Feladatok mindenkinek

C. 1471. Igazoljuk, hogy minden négynél nagyobb kettő-hatvány felírható két páratlan négyzetszám különbségeként. Például $32=81-49$.

C. 1472. Egy társasjátékban különböző kártyákat lehet gyűjteni, ezeken másmás dolgok találhatók. Minden kártyán az alábbi kilenc dolog közül szerepel pontosan kettő: színek (piros, fehér vagy zöld), elemek (levegő, föld, tűz vagy víz), vagy állatok (nyúl vagy bárány), de egy kategóriából legfeljebb egy lehet rajta. Hányféleképpen tudunk négy kártyát kiválasztani úgy, hogy azokon összesen nyolc különböző dolog legyen, ha a játék minden lehetséges lapot tartalmaz?

C. 1473. Mennyi annak a $2a$ alapú számrendszerbeli abc számnak az alapja, amelyről tudjuk, hogy $c-b=b-a=1$, és értéke megegyezik a tízes számrendszerbeli $(29a^2+9a+9)$-cel?

Feladatok 11. évfolyamtól

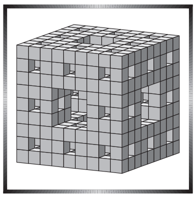
C. 1474. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjait jelölje P, Q és R, amelyek az oldalakat $BP:PA=1:2$ és $AQ:QC=3:1$ arányokban osztják. Határozzuk meg, hogy R milyen arányban osztja a BC oldalt.

C. 1475. Legfeljebb mekkora lehet egy egységnyi sugarú gömbbe írt henger palástjának felszíne?

❄

Beküldési határidő: 2018. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4939–4947.)

B. 4939. Mutassuk meg, hogy egy konvex 2018-szöget nem lehet háromszögekre darabolni úgy, hogy minden keletkező háromszög szögei fokokban mérve egészek legyenek.

(*3 pont*)

B. 4940. Milyen értékeket vehet fel az $x+y+z$ összeg, ha

$$x^4+4y^4+16z^4+64=32xyz?$$

(*3 pont*)

B. 4941. A hegyesszögű ABC háromszög körülírt körének O középpontját tükrözzük a magasságok talppontjaira. Igazoljuk, hogy e három pont által meghatározott kör ugyanakkora sugarú, mint az ABC háromszög körülírt köre.

(*4 pont*)

B. 4942. A nemzetközi kombinatorikai konferenciára érkező száz matematikust egy szállodában helyezik el, ahol a szobák egytől százig vannak megszámozva. A recepciós azt tervezi, hogy a matematikusokat érkezésük sorrendjében az adott sorszámú szobába küldi. Az elsőnek érkező vendégnek viszont elfelejti a megfelelő utasítást megadni, így ő a szobák közül véletlenszerűen választ egyet. Végül a recepciós a többieknek azt az utasítást adja, hogy az érkezési sorszámuknak megfelelő szobát egyesével foglalják el; illetve ha az már foglalt, akkor válasszanak a szabad szobák közül egyet tetszés szerint. Hányféleképpen költözhettek be a szobákba a vendégek?

(*4 pont*) Javasolta: *Faragó András* és *Káspári Tamás* (Paks)

B. 4943. Egy téglatest alakú tégla egyik lapjának mindegyik csúcsában van egy-egy hangya. A hangyák mindegyike a szemközti csúcshoz, azaz a saját csúcsához tartozó testátló másik végpontjába szeretne eljutni. Át tudnak-e menni a hangyák a tégla felszínén a szemközti csúcsba úgy, hogy az útvonalaik ne messék egymást és mind a négy hangya a lehető legrövidebb úton haladjon?

(*4 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

B. 4944. Jelölje t egy konvex $\mathcal{S}$ síkidomba írt (valamely) maximális területű háromszög területét, míg T az $\mathcal{S}$ köré írt (valamely) minimális területű háromszög területét. Mekkora a $\frac{T}{t}$ hányados maximuma?

(*5 pont*)

B. 4945. Határozzuk meg azokat az n pozitív egészeket, amelyekre

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + n \cdot 2^{n-1}$$

négyzetszám.

(*5 pont*) *Németh László* (Fonyód) javaslata alapján

B. 4946. Az $f(x)$ valós együtthatós polinomra igaz, hogy minden, 10-es számrendszerben 5-re vagy 8-ra végződő k pozitív egész esetén $f(k)$ értéke egész szám.

a) Igazoljuk, hogy $f(0)$ egész szám.

b) Mutassunk példát olyan $f(x)$ polinomra, amire a fenti feltételek teljesülnek, de $f(1)$ nem egész szám.

(*6 pont*)

B. 4947. Igazoljuk, hogy egy kockát a keletkező darabok egybevágóságától eltekintve egyféleképpen lehet pontosan öt darab tetraéderre darabolni.

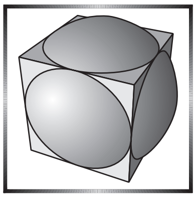
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2018. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (719–721.)



A. 719. Legyen ABC nem egyenlőszárú háromszög körülírt körének, illetve beírt körének középpontja O, illetve I. Az A-val szemköztes hozzáírt kör BC-t A_1-ben érinti, a B-vel szemköztes hozzáírt kör CA-t B_1-ben érinti, továbbá a C-vel szemköztes hozzáírt kör AB-t C_1-ben érinti. Legyen P az AB_1C_1 háromszög magasságpontja, H pedig az ABC háromszög magasságpontja. Igazoljuk, hogy ha M a PA_1 felezőpontja, akkor HM és OI párhuzamosak.

Javasolta: *Michael Ren* (Andover, Massachusetts, USA)

A. 720. Egy pozitív egész számot *elevennek* nevezünk, ha van $10^{10^{100}}$-nál nagyobb prímosztója. Bizonyítsuk be, hogy ha S eleven pozitív egészekből álló végtelen halmaz, akkor létezik olyan végtelen T részhalmaza, melynek bármely véges nemüres részhalmazában az elemek összege eleven szám.

A. 721. Legyen $n \geqslant 2$ pozitív egész szám, továbbá $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olyan pozitív valós számok, melyek összege 1, négyzetösszege pedig S. Mutassuk meg, hogy ha $b_i = \frac{a_i^2}{S}$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor tetszőleges $r > 0$ mellett

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1-a_i)^r} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(1-b_i)^r}.$$

❄

Beküldési határidő: 2018. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 451. Kukac-robot egy számsoron szeretne végighaladni, végigkúszni. A robot onnan kapta a nevét, hogy mozgása a kukacokéra emlékeztet. A kúszás két fázisból áll: először összehúzza magát úgy, hogy testének első része helyben marad a számsoron és a végét előre húzza, amíg csak lehet; majd másodszor fordítva, testének utolsó pontja marad egy helyben és előre kinyúlik, amíg a szabályok engedik.

Szabályok:

- Összehúzott állapotban a Kukac-robot alatt lévő számok összege legalább K, és a lefedett számok száma kettőnél nem lehet kevesebb.
- Kinyújtott állapotban legfeljebb L lehet az alatta levő számok összege és nem nyúlhat öt számnál hosszabban.
- A Kukac-robot induló helyzete: az első két számon helyezkedik el összehúzott állapotban. (A kezdőállapotra a szabályokat nem kell vizsgálni.)
- Beérkezésnek számít az a kinyújtott állapot, amikor a számsor utolsó tagját lefedi.

Készítsünk programot `i451` néven, amely meghatározza, hogy Kukac-robot végig tud-e menni a számsoron és ha igen, akkor legkevesebb hány lépésben.

A program standard bemenetének első sorában 3 szám van: N $(10 \leqslant N \leqslant 10\,000)$ a számsor hossza, K $(2 \leqslant K \leqslant 20)$ összehúzott állapotban a Kukac-robot alatti és L $(K < L \leqslant 45)$ a kinyújtott állapot alatti számok összege. Az ezt követő sorban a számsor tagjait adjuk meg szóközzel elválasztva, azaz N darab számot x_i $(0 \leqslant x_i \leqslant 9)$.

A program írja ki a standard kimenetre, hogy legkevesebb hány megnyúlás alatt kúszik át a Kukac-robot a számsoron. Ha nem tud a számsoron végigkúszni, akkor a kimenet legyen `-1`.

Példa a bemenetre	Kimenet
`12 10 30` `6 7 8 0 4 9 9 8 9 1 1 8`	`5`
`10 9 17` `2 8 0 2 2 4 8 8 2 1`	`-1`

Beküldendő egy tömörített `i451.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 452 (É). A feladat a brit Nemzeti Statisztikai Iroda által 2017. július 10-én közzétett, az Egyesült Királyságban dolgozó kelet-európai vendégmunkásokról szóló felmérésének feldolgozása táblázatkezelő program segítségével.

1. Nyissuk meg a honlapunkról letölthető `eu_angliafelmeres.txt` tabulátorokkal tagolt UTF-8 kódolású szövegfájlt a táblázatkezelő program munkalapjára az A1-es cellától kezdődően. Munkánkat `i452` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Írassuk ki képlet segítségével a D2:D29-es tartományban az eredeti forrásban használt jelöléseket (EU8, EU15, EU Other) az alábbiak szerint:

EU8	2004-ben csatlakozott országok
EU15	2004 előtt csatlakozott országok
EU Other	más évben csatlakozott országok, valamint Málta és Ciprus

3. A 31. sortól kezdődően a forrás többi részében az angol országneveket cseréljük le a megfelelő magyar országnevekre.
4. Az egyes országokat a brit Nemzeti Statisztikai Iroda több szempont alapján hasonlította össze. Mi hét szempontot fogunk vizsgálni, melyeket az A oszlopban lévő Összehasonlítás szó vezet be. Számozzuk meg ezeket 1-től kezdődően a következő formátumban: 1. összehasonlítás, …, az utolsó a 7. összehasonlítás legyen.
5. Az 1. összehasonlítás az EU8 országokból érkezett vendégmunkások számának életkor szerinti eloszlását tartalmazza. Határozzuk meg korosztályonként a 39. sorban, hogy melyik országból érkezett a legtöbb vendégmunkás. Jelenítsük meg az ország neve alatt a 40. sorban, két tizedesjegy pontossággal, hogy ez az adott korosztály hány százaléka.
6. A 2. összehasonlítást követő A47-es cellába számítsuk ki, hogy összesen hány ezer fő érkezett Angliába 2011-ig az EU8 és EU14 országaiból.
7. A 3. összehasonlítás C50-es cellája a 16–64 éves korosztály létszámát tartalmazza. Az alatta lévő sorokban számítsuk ki, hogy hány főt jelentenek a megadott százalékok országonként.

8. A 4. összehasonlítás alatt feltételes formázás segítségével jelöljük meg piros háttérrel azon iparág nevét, ahol a legnagyobb, és kék színnel, ahol a legkisebb az eltérés az EU8 és a többi ország munkavállalói között.
9. A J60-as cellába írjuk be: „EU8 országon kívül”. Számítsuk ki az alatta lévő cellákban a „Kiskereskedelem és vendéglátás”, a „Gyári munka”, valamint a „Pénzügy” területén mennyi az EU8 országain kívüli országokból érkezett vendégmunkások száma. (Szlovénia nem szerepel a felsorolásban jogi problémák miatt.)
10. Az 5. összehasonlítás adatai alapján határozzuk meg, hogy melyik két ország között volt legtöbbször a legnagyobb különbség az egyes utazási típusokat tekintve. Írjuk ki képlettel a két ország nevét az A77-es cellába, valamint az eltérések számát az A78-as cellába.
11. A 6. összehasonlításnál – az alábbi mintának megfelelően – válaszoljunk a következő kérdésre: az Anglián kívül, más EU-s országokban élő angol népességnek hány százaléka van 15–64 év között, és ezek hány százaléka van abban az országban, ahol egyébként a legtöbb angol él, és ez melyik ország.

	A	B	C
79	**6. öszehasonlítás**		
80	**Angol nemzetségűek az EU más országaiban, év szerinti megoszlásban (fő)**	**kevesebb, mint 15 éves**	**15-29 év között**
81	Csehország	294 fő	357 fő
82	Magyarország	247 fő	729 fő
83	Lengyelország	171 fő	281 fő
84	Szlovákia	247 fő	198 fő
85	Észtország	44 fő	132 fő
86	Szlovénia	34 fő	23 fő
87	Lettország	17 fő	39 fő
88	Litvánia	18 fő	28 fő
89	**Az összes kint élő népességnek -a van 15-64 év között, amiből % -ban.**		

12. A 7. összehasonlításnál a 28 napnál rövidebb utazásokat hasonlítjuk össze. Adjuk meg az A97-es cellában, hogy melyik ország esetén legkisebb az eltérés az oda beutazó angol nemzetségűek és az onnan Angliába beutazók száma között. (Az Angliába érkező utazók utazásainak számát az 5. összehasonlításnál találjuk.)
13. Készítsünk diagramot, amely összehasonlítja az angol nemzetségűek Litvániába, illetve a litvánok Angliába történő, 28 napnál rövidebb utazásainak számát. A diagram az összehasonlítást „vakációk”, „látogatások”, „üzleti út”, és „egyéb” kategóriánként szemléltesse. A diagram háttere legyen Litvánia zászlaja, a betűszínt úgy válasszuk meg, hogy minden adat olvasható legyen.

Beküldendő egy tömörített `i452.zip` állományban a megoldást adó táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja a felhasznált táblázatkezelő nevét és verzióját.

Forrás: `https://www.ons.gov.uk/peoplepopulationandcommunity/populationandmigration/internationalmigration/articles/livingabroad/migrationbetweenbritainandtheeu8` (utolsó letöltés: 2017-11-26).

I. 453. Feladatunk egy síkbeli bolyongás szimulációja és az eredményének megmutatása. Egy $N \times M$ méretű négyzetháló celláiban egész számok vannak. A cellák jelentős részében a 0, míg néhány cellában a -5 vagy $+5$ található. Ezeket a cellákat megjelöljük, és a bennük lévő számot rögzítjük, vagyis nem fog változni a szimuláció során. A kezdetben nulla értékű cellák mindegyikéből elindulunk, és egy ideig véletlenszerűen bolyongunk a cellák között, amíg meg nem érkezünk egy megjelölt cellába. Ekkor a kezdetben nulla értékű cella számához hozzáadjuk annak a megjelölt cellának a számát, ahová eljutottunk.

Ezt a bolyongást minden, kezdetben nulla értékű cellából S-szer végezzük el, tehát az ilyen cellák számértéke S-szer fog változni. A bolyongás során minden esetben egy celláról egy vele csúcsban vagy oldalánál érintkező szomszédos cellára lépünk. Ha az S-szeri bolyongást minden nem megjelölt cellára elvégeztük, akkor a szimuláció véget ér. Ekkor minden megjelölt cella értékét megszorozzuk S-sel. Az így kialakult számértékekhez rendeljünk lineárisan egy színskáláról színeket, és a kapott képet jelenítsük meg grafikusan.

A program bemenete a négyzetháló mérete ($50 \leqslant N, M \leqslant 100$), az egy cellából induló bolyongások száma ($50 \leqslant S \leqslant 1000$), valamint a nem nulla kezdőértékű cellák száma ($1 \leqslant Z \leqslant 100$), és soronként egy-egy megjelölt cella koordinátái és -5 vagy $+5$ értéke.

A feladat megoldásaként a versenykiírásban szereplő eszközökkel elkészíthető alkalmazások mellett a webes vagy mobil applikációkat is elfogadjuk. A bemeneti adatok egyszerű bevitelét az alkalmazás jellegétől függően lehessen megadni.

Beküldendő egy `i453.zip` tömörített állományban a program forráskódja és a működéséhez szükséges egyéb fájlok, továbbá a hozzá kapcsolódó felhasználói dokumentáció, valamint a leírás, amely tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 25. Egy cégnél N ember dolgozik összesen P projekten. Egy ember több projektcsoportnak is tagja lehet, de egynek biztosan tagja. A vezetőség meg akarja hívni egy találkozóra a lehető legtöbb olyan munkatársat, akik közül senki nem dolgozik egy másik meghívottal sem közös projekten. Sajnos a vezetőség nem tudja megállapítani, hogy legföljebb hány meghívott lesz, ezért segítségünket kérte. Készítsünk programot, amely a projektcsoportok tagjainak ismeretében meghatározza a meghívottak legnagyobb számát. A munkatársakat pozitív egész számokkal azonosítjuk.

A program standard bemenete N és P értéke, majd a következő P sor mindegyikében egy-egy projekten dolgozó munkatárs azonosítója szerepel szóközzel elválasztva. A program adja meg a standard kimeneten a meghívottak létszámának maximumát.

Példa (az újsor karaktereket `/` jelöli):

Bemenet	**Kimenet**
`8 6 / 1 2 / 7 2 8 / 4 5 / 6 4 3 / 5 7 / 1 5 /`	`3 /`

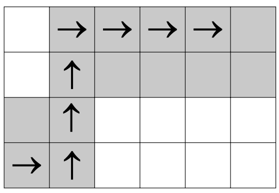
Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 1000$, $2 \leqslant P \leqslant 1000$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb N és P értékek esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `is25.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

S. 124. Kertész barátunk telke téglalap alakú, oldalainak hossza a és b egység. A kertre terítsünk gondolatban egy egység oldalú négyzethálót. Barátunk szeretné a kert bizonyos részeit egység nagyságú, négyzet alakú járólapokkal lefedni, hogy a kertben utakat hozzon létre. A járólapok a négyzetháló egy-egy négyzetében helyezkednének el. A kert egyik kiválasztott sarkában lenne az első járólap, és a szemközti sarkában az utolsó. A járólapokon szépen át lehetne sétálni az első járólapról indulva a szemközti sarokba. Szabály, hogy az egyik járólapról a másikra csak akkor léphetünk, ha oldalaik érintkeznek, illetve séta közben mindig távolodnunk kell az első járólaptól. A kertész szeretné úgy elhelyezni a járólapokat, hogy a lehetséges séták száma éppen egy előre kitalált k érték legyen. Ugyanakkor szeretné az utak létrehozásához a legkevesebb járólapot vásárolni, de sajnos nem tudja meghatározni, hogy ez mennyi legyen. Készítsünk programot, amely megadja ezt a legkisebb értéket.

A program standard bemenete a telek a és b mérete, illetve a lehetséges séták k száma. A program adja meg a standard kimeneten a k-féleképp sétálható utak közül a legkevesebb járólappal rendelkező utakhoz szükséges járólapok számát, illetve -1-et, ha nem lehetséges k-féleképp bejárható úthálózatot készíteni. A mellékelt *ábra* a lenti példa egy lehetséges megoldását szemlélteti, illetve egy sétát mutat a nyilakkal.



Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`4 6 10`	`14`

Korlátok: $2 \leqslant a, b \leqslant 20$, $2 \leqslant k \leqslant 10^6$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb bemeneti értékek esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `s124.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2018. április 10.

❄

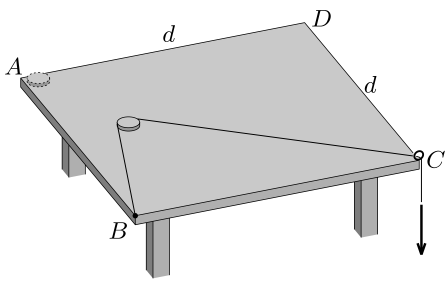
Beszámoló a 2017. évi Eötvös-versenyről

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2017. évi Eötvös-versenye október 13-án délután 3 órai kezdettel tizennégy magyarországi helyszínen* került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 42 versenyző adott be dolgozatot, 15 egyetemista és 27 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

❄

1. feladat. *Az* 1. ábrán *látható, d oldalhosszúságú, négyzet alakú asztallap A sarkánál egy m tömegű, kis pénzérme nyugszik. Az asztal B sarkához egy horgászzsinór egyik végét rögzítjük, majd a zsinórt az érmén „átvetve” az asztal C sarkához rögzített szemescsavaron vezetjük át. A zsinór szabad végét igen lassan húzni kezdjük addig, amíg az érme végül leesik az asztalról. Az asztallap és az érme közötti csúszási súrlódási együttható μ, máshol a súrlódás elhanyagolható.*



1. ábra

a) *Hol esik le az érme az asztalról?*

b) *Becsüljük meg, mennyi munkát végeztünk a folyamat közben!*

Adatok: $m = 7{,}7$ g, $d = 1{,}0$ m, $\mu = 0{,}3$.

(*Vigh Máté*)

Megoldás. A pénzérmére három erő hat: a két zsinórszárban ható erő, valamint a pénzérme és az asztal között fellépő csúszási súrlódási erő. A pénzérmét lassan mozgatjuk, a gyorsulások elhanyagolhatók, így a három erő eredője jó közelítéssel nulla. A zsinór nem súrlódik a pénzérmén, így benne mindenhol azonos nagyságú erő hat. Ebből következően a pénzérme mindig a zsinórszárak pillanatnyi szögfelezőjének irányába fog mozogni (hiszen a csúszási súrlódási erő mindig a sebességgel ellentétes irányú). Ennek a sebességvektornak mindkét zsinórszárra

*Részletek a verseny honlapján: `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

ugyanakkora a vetülete, így a két zsinórszár mindig azonos mértékben rövidül – tehát a hosszaik különbsége a mozgás során nem fog változni.

a) Ennek alapján:

$$\sqrt{2}d - d = x_2 - x_1 \qquad \text{és} \qquad x_1 + x_2 = d,$$

ahol x_1 és x_2 a két zsinórdarab hossza, amikor a pénzérme eléri az asztal szélét.

Az egyenletrendszert megoldva megkapjuk, hogy a pénzérme az asztal B sarkától

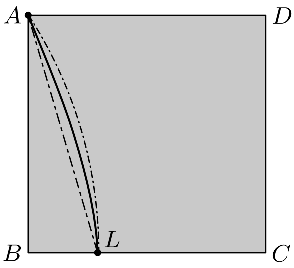
$$x_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) d \approx 0{,}293\,\mathrm{m}$$

távolságra esik le az asztalról.

b) A munkavégzés megegyezik a súrlódási munka abszolút értékével. Mivel a súrlódási erő állandó, így a munka a súrlódási erő és a pénzérme által befutott s út szorzata:

$$W = \mu mg \cdot s.$$

A két zsinórszár hosszának különbsége állandó, tehát a pénzérme egy hiperbolaíven fog mozogni. (A hiperbola fókuszai az asztal B és C sarkai.) A hiperbolaív hosszát elemi úton nem tudjuk meghatározni – ezért is kért a feladat *becslést* –, de alsó és felső közelítést adhatunk rá.



2. ábra

Alsó becslés az asztal A sarkát és a leesés L pontját összekötő egyenes szakasz hossza (*2. ábra*):

$$s_{\min} = \sqrt{d^2 + x_1^2} \approx 1{,}042 \text{ m},$$

felső becslés pedig az A és L pontokon átmenő és a BC szakaszt merőlegesen metsző körvonal hossza. A kör sugara egyszerű geometriai megfontolások alapján:

$$R = \frac{d^2 + x_1^2}{2x_1} \approx 1{,}854 \text{ m},$$

amiből a keresett ívhossz:

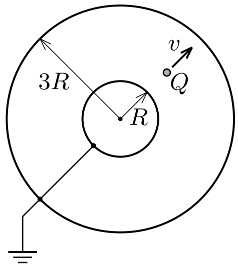
$$s_{\max} = R \arcsin \frac{d}{R} \approx 1{,}056 \text{ m}.$$

Láthatjuk, hogy a két érték elég közel van egymáshoz. (A hiperbolaív hosszát számítógéppel numerikusan is kiszámolhatjuk, akkor $s \approx 1{,}048$ m-t kapunk.)

Ezek alapján, valamint a megadott adatokkal és $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$-tel a keresett munkavégzés:

$$0{,}0236\,\mathrm{J} < W < 0{,}0239 \text{ J}.$$

2. feladat *Egy gömbkondenzátor fegyverzeteinek sugara R és $3R$. A gömböket rövidre zárjuk, és a nagyobb gömböt leföldeljük. A két fémgömb között egy Q ponttöltést mozgatunk állandó v sebességgel sugárirányban kifelé* (3. ábra).



3. ábra

Mekkora áram folyik a gömböket összekötő vezetékben, amikor a mozgó töltés éppen „félúton”, a gömbök középpontjától $2R$ távolságban van? (A rövidrezáró vezeték elektrosztatikus terét ne vegyük figyelembe!)

(*Gnädig Péter*)

I. megoldás. A feladat nehézsége abban rejlik, hogy a fémgömbök eredetileg fennálló gömbszimmetriáját elrontja a Q ponttöltés jelenléte. Emiatt a gömbökön kialakuló töltéseloszlás erősen inhomogén lesz, és az elektromos mező szerkezete is meglehetősen bonyolult. Szerencsére a töltéseloszlás meghatározása elkerülhető, amint azt az alábbi megoldásban látni fogjuk.

Jelöljük a kis fémgömb pillanatnyi töltését q_1-gyel, a nagyobb gömbét q_2-vel, a ponttöltés pillanatnyi távolságát a gömbök középpontjától pedig r-rel! A kisebb fémgömb potenciálja a földelés miatt nulla, és mivel a fém ekvipotenciális, ugyanez a középpontjára is igaz. A gömbökön elhelyezkedő töltések azonos (R, illetve $3R$) távolságra helyezkednek el a gömbök közös középpontjától, ezért itt a potenciált könnyen felírhatjuk:

$$k\frac{q_1}{R}+k\frac{Q}{r}+k\frac{q_2}{3R}=0. \tag{1}$$

A nagy gömbön kívül a földelés miatt nincs elektromos tér (a belső töltések terét a nagy gömb teljesen leárnyékolja), így a Gauss-törvény értelmében a rendszer össztöltése nulla:

$$Q+q_1+q_2=0. \tag{2}$$

A fenti két egyenletből a kisebb gömb töltésének abszolút értéke kifejezhető r függvényében:

$$q_1(r)=-\left(\frac{3R}{2r}-\frac{1}{2}\right)Q. \tag{3}$$

Mivel a gömbök össztöltése állandó ($-Q$), így a ponttöltés mozgása közben csak a gömbök közötti vezetékben folyik áram, a földbe jutó vezetékben nem. A kis gömbre vonatkozó kontinuitási egyenletből a gömbök között folyó áram deriválással (vagy a kis megváltozásokra érvényes formulák segítségével) meghatározható:

$$I=\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}r}=v\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}r}=\frac{3}{2}\frac{QvR}{r^2},$$

az áram iránya pedig a kis gömb felé mutat. Tehát az áramerősség értéke, amikor a ponttöltés éppen $r=2R$ távolságra van a gömbök középpontjától:

$$I=\frac{3}{8}\frac{Qv}{R}.$$

II. megoldás. Az első megoldás kulcsa az volt, hogy észrevettük: a potenciál értéke könnyen kiszámítható a gömbök közös középpontjában. Az (1) és (2) egyenletekhez más módon, a szuperpozíciós elv segítségével is eljuthatunk.

Képzeljük el, hogy a gömbök középpontjától r távolságra elhelyezkedő Q ponttöltést gondolatban N-edrészére csökkentjük. Ekkor a gömbök q_1 és q_2 töltése is N-edrészére csökken. Forgassuk el ezt az elrendezést a gömbök középpontja körül egy kicsit, és szuperponáljuk rá az eredeti elrendezésre! Így már két Q/N ponttöltés helyezkedik el a középponttól r távolságra, a gömbök töltése pedig rendre $2q_1/N$ és $2q_2/N$. Ismételjük meg ezt az eljárást még $(N-2)$-ször úgy, hogy végül összesen Q töltés legyen az r sugarú gömbfelületen, a lehető legegyenletesebb elrendeződésben. Az $N\to\infty$ határesetben a ponttöltést ilyen módon végül „szétkenhetjük" egy r sugarú, egyenletes felületi töltéssűrűségű, Q össztöltésű gömbhéjjá, miközben a fémgömbök q_1 és q_2 töltése változatlan marad. Ennek az az előnye, hogy az eredeti feladatot visszavezettük egy könnyebb, gömbszimmetrikus problémára.

Ismert, hogy egy egyenletesen töltött gömbhéj potenciálja kívül úgy számítható, mintha a gömb töltése a középpontjában összpontosulna, belül pedig ugyanakkora, mint a gömb felületén. A legkülső, földelt gömb felületén tehát a potenciált a három (q_1, Q és q_2 töltésű) gömbhéj potenciáljának összegeként kaphatjuk meg:

$$k\frac{q_1}{3R}+k\frac{Q}{3R}+k\frac{q_2}{3R}=0,$$

ami ekvivalens a (2) egyenlettel. A kis gömb felületén a (szintén nulla) potenciált teljesen hasonlóan, három tag összegeként írhatjuk fel: a legkülső gömb járuléka $kq_2/(3R)$, a „szétkent" ponttöltésé kQ/r, míg a legbelső gömbé kq_1/R. Ez végül az (1) egyenletre vezet. Az (1) és (2) egyenletek birtokában a végeredményhez az I. megoldással azonos módon juthatunk el.

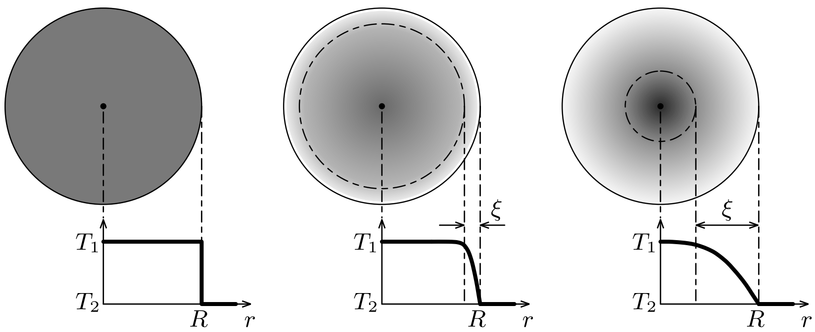
Megjegyzés. Az egyik második díjat nyert versenyző, *Marozsák Tóbiás* egy harmadik úton oldotta meg a feladatot. Ismert, hogy ha egy földelt, vezető gömbhéj közelébe egy ponttöltést helyezünk, akkor a gömbön megosztott töltések helyettesíthetők egy, a gömbfelület ponttöltéssel átellenes oldalán elhelyezett tükörtöltéssel. Ennek a tükörtöltésnek a nagysága és helyzete kiszámolható abból a feltételből, hogy a gömb teljes felülete nulla potenciálú. A feladatban szereplő két, koncentrikus gömbhéj esetén a Q töltést először „tükröznünk" kell mindkét gömbre, majd az így kapott tükörtöltésekkel is folytatni kell az eljárást. Végül váltakozó előjelű tükörtöltések végtelen sorát kapjuk a kis gömbön belül és a nagy gömbön kívül. A kis gömbön belüli tükörtöltések össztöltése (azaz q_1) egy geometriai sor felösszegzésével kiszámítható, és így közvetlenül a (3) egyenlethez jutunk. Bár ez a módszer matematikailag sokkal nehezebb, mint a fenti két, részletesen ismertetett megoldás, elvben lehetőséget ad a gömbök között kialakuló elektromos tér (legalább numerikus) meghatározására is.

3. feladat. *Egy* 30 mm *sugarú, homogén, tömör üveggolyó igen hosszú ideje forrásban lévő vízbe merül. A golyót hirtelen jeges vízzel telt edénybe merítjük* 30 *másodpercre, majd onnan kiemelve hőszigetelő edénybe helyezzük. (A vízcseppeket gyorsan letöröljük.) Becsüljük meg, mennyi lesz az üveggolyó egyensúlyi hőmérséklete hosszú idő elteltével!*

További adatok: *Az üveg sűrűsége* 2500 kg/m^3, *fajhője* 830 J/(kg K), *hővezetési tényezője* 0,95 W/(m K).

(*Vigh Máté*)

I. megoldás. A hosszú ideje lobogó vízbe merülő golyó belsejében a hőmérséklet mindenhol $T_1 = 100$ °C-os. Amikor a golyót a $T_2 = 0$ °C-os, jeges vízbe tesszük, akkor annak külső része kezd el először lehűlni, majd ez a „hidegfront" halad fokozatosan a golyó belseje felé. A hőszigetelő edénybe helyezve a golyó belső energiája már nem változik tovább, csak annyi történik, hogy a hőmérséklet a belsejében kiegyenlítődik. Vajon mekkora tipikus ξ mélységig hatol be a hidegfront a golyóba 30 másodperc alatt? Elképzelhető, hogy csak a golyó legkülső, vékony „kérge" hűl le a jeges vízben, de az is, hogy szinte az egész golyó lehűl, csak a közepe táján marad meleg (*4. ábra*).

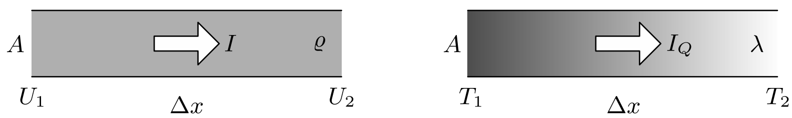


4. ábra

A golyó belseje és a jeges vízzel érintkező (0 °C-os) felülete közötti hővezetést a Fourier-törvény írja le, amely analóg a fémek elektromos vezetését leíró Ohm-törvénnyel (*5. ábra*). Míg egy állandó A keresztmetszetű, Δx hosszúságú egyenes vezetékben folyó elektromos áram (I) a vezeték végei közötti ΔU potenciálkülönbséggel arányos, addig ugyanezen vezetékben terjedő hőáram (I_Q) a ΔT hőmérsékletkülönbséggel arányos:

$$I = -\frac{1}{\varrho} A \frac{\Delta U}{\Delta x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad I_Q = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

ahol $1/\varrho$ a vezeték anyagának elektromos vezetőképessége (a fajlagos ellenállás reciproka), λ pedig a hővezetési tényező.



5. ábra

Sajnos golyó (gömbgeometria) esetén a Fourier-törvény matematikai alakja a fentinél bonyolultabb. További nehézség, hogy a feladatban a hőmérsékleteloszlás nem állandó (nem stacionárius), hanem a hőáram hatására időben változik. Ilyen körülmények között reménytelen a feladatra matematikailag egzakt választ adni. Megpróbálhatjuk azonban dimenzionális megfontolásokkal kitalálni, hogy hogyan függ a hidegfront ξ behatolási mélysége az időtől.

Első lépésként vizsgáljuk meg, milyen mennyiségektől függhet ξ. Természetesen függ az időtől, ezen kívül függ még a golyó λ hővezetési tényezőjétől (rossz hővezető esetén ξ lassabban növekszik), az üveg ϱ sűrűségétől és c fajhőjétől. A golyó R sugara is fontos paraméter lehet, de ha $\xi \ll R$ (azaz a jeges vízbe merítés ideje viszonylag rövid), akkor a hidegfront terjedésére lényegében nincs hatással a golyó véges mérete. Mi a helyzet a golyó közepe és a felülete közötti hőmérséklet-különbséggel? A Fourier-törvény szerint kétszer akkora hőmérséklet-különbséghez kétszer akkora hőáram tartozik, de ekkor a golyó egyes rétegeinek lehűtéséhez szükséges hőelvonás is megkétszereződik. Tehát a hidegfront időbeli terjedését nem, csupán a „magasságát” befolyásolja $\Delta T = T_1 - T_2$ értéke.

Keressük tehát a ξ behatolási mélységet a következő alakban:

$$\xi \sim \lambda^\alpha \varrho^\beta c^\gamma t^\delta,$$

ahol α, β, γ és δ dimenziótlan konstans kitevők. A jobb oldalon álló mennyiségek mértékegységei:

$$[\lambda] = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^3 \mathrm{K}}, \quad [\varrho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, \quad [c] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2 \mathrm{K}}, \quad [t] = \mathrm{s}.$$

Ezekből csak egyféleképpen „keverhetünk ki” méter dimenziójú mennyiséget:

$$\xi(t) \sim \sqrt{\frac{\lambda t}{c\varrho}}.$$

Egy dimenziótlan faktor erejéig most már ismerjük a $\xi(t)$ függvényt, de vajon mi az arányossági tényező? Nem tudjuk, de várhatóan egységnyi nagyságrendű, és mivel becslésről volt szó, vegyük 1-nek! A megadott adatok alapján tehát $t = 30$ s alatt a „hidegfront” behatolási mélysége:

$$\xi \approx \sqrt{\frac{\lambda t}{c\varrho}} \approx 3{,}7\ \mathrm{mm},$$

ami majdnem egy nagyságrenddel kisebb a golyó $R = 30$ mm-es sugaránál. Előzetes feltevésünk, mely szerint ξ sokkal kisebb R-nél, utólag beigazolódott.

A T_∞ egyensúlyi hőmérsékletet becsüljük úgy, hogy a ξ vastagságú kéreg hőmérséklete $T_2 = 0\ ^\circ\mathrm{C}$, azon belül pedig $T_1 = 100\ ^\circ\mathrm{C}$. A hőmérséklet kiegyenlítődését kifejező egyenlet:

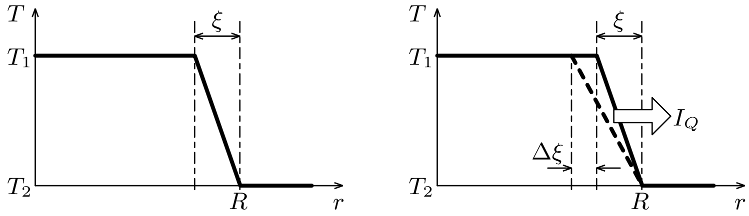
$$\frac{4}{3}\pi(R-\xi)^3 T_1 + \frac{4}{3}\pi\left[R^3 - (R-\xi)^3\right] T_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 T_\infty,$$

amiből $\xi \ll R$ felhasználásával (csak a ξ-ben elsőfokú tagokat tartva meg) megkapjuk a golyó egyensúlyi hőmérsékletét:

$$T_\infty \approx T_1 - \frac{3\xi}{R}(T_1 - T_2) \approx 63\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Mivel becslésről van szó, ezért az eredmény második értékes jegyét nem szabad nagyon komolyan vennünk.

II. megoldás. Használjuk a Fourier-törvényt, és közelítsük a hőmérsékletprofilt a *6. ábra* bal oldalán látható, szakaszonként lineáris függvénnyel! (Könnyen belátható, hogy egy ilyen hőmérsékletprofil később nem marad szakaszonként lineáris, de ez a becslésünk érvényességét nem befolyásolja majd.)



6. ábra

A várhatóan kis ξ behatolási mélység miatt a problémát kezelhetjük egydimenziósként (azaz golyó helyett egy végtelen féltér esetét vizsgáljuk). Tegyük fel, hogy t idő után a „lineáris hidegfront" szélessége ξ. Ekkor a golyó belsejéből a jeges vízbe átmenő hőáram nagysága (teljesítmény):

$$I_Q = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{\xi}. \tag{4}$$

Ez a kiáramló teljesítmény okozza Δt idő alatt a hidegfront $\Delta\xi$ szélesedését (*6. ábra* jobb oldala):

$$I_Q \Delta t = c\varrho A\left[T_1\Delta\xi + \frac{T_1+T_2}{2}\xi\right] - c\varrho A\frac{T_1+T_2}{2}(\xi + \Delta\xi),$$

ahol a behatolási mélységnek megfelelő rész energiáját a szélein mért hőmérsékletek átlagának segítségével fejeztük ki. Ebből rendezés után adódik:

$$I_Q = c\varrho A \frac{T_1 - T_2}{2}\,\frac{\Delta\xi}{\Delta t}. \tag{5}$$

A hőáramokra kapott (4) és (5) összefüggéseket egyenlővé téve kapjuk:

$$\xi\,\Delta\xi = \frac{2\lambda}{c\varrho}\Delta t.$$

Összegezzük fel ennek az egyenletnek mindkét oldalát! Ekkor a jobb oldalon a vízbe merítés t ideje, a bal oldalon pedig $\xi^2/2$ jelenik meg (ezt beláthatjuk pl. egy összenyomott rugóban tárolt energia analógiájával vagy integrálással). Tehát a „lineáris hidegfront" behatolási mélysége az idő függvényében:

$$\xi(t) = 2\sqrt{\frac{\lambda}{c\varrho}t} \sim \sqrt{t},$$

ami egy 2-es faktor erejéig egyezik a dimenzióanalízis eredményével.

A hőmérséklet kiegyenlítődését kifejező egyenlet ($\xi \ll R$ közelítésben):

$$\frac{4}{3}\pi(R-\xi)^3 T_1 + 4\pi R^2 \xi \frac{T_1+T_2}{2} \approx \frac{4}{3}\pi R^3 T_\infty,$$

ebből

$$T_\infty \approx T_1 - \frac{3\xi}{2R}(T_1 - T_2).$$

Végül a szakaszosan lineáris hőmérsékletprofilra levezetett ξ behatolási mélységet felhasználva kapjuk a becslés végső formuláját:

$$T_\infty = T_1 - \frac{3}{R}\sqrt{\frac{\lambda t}{c\varrho}}(T_1 - T_2).$$

Az adatokat behelyettesítve $T_\infty \approx 63\ ^\circ\mathrm{C}$ egyensúlyi hőmérséklet adódik, egyezésben a dimenzióanalízissel kapott értékkel.

❄

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2017. november 24-én délután került sor az ELTE TTK Konferenciatermében. Meghívást kaptak az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. Jelen volt a 25 évvel ezelőtti díjazottak közül *Gefferth András, Maulis Ádám* és *Pálfalvi László,* akik az akkori feladatok ismertetése után röviden beszéltek a versennyel kapcsolatos emlékeikről és pályájukról.

Ezután következett a 2017. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását *Tichy Géza,* a 2. feladatét *Vankó Péter,* a 3. feladatét *Vigh Máté* ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Sólyom Jenő,* az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Mindhárom feladat helyes megoldásáért *első díjat* és Eötvös-érmet nyert **Kovács Péter Tamás,** a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium érettségizett tanulója, *Pálovics Róbert* és *Juhász Tibor* tanítványa, aki jelenleg a BME fizikus hallgatója.

Két feladat helyes megoldásáért *második díjat* nyert **Marozsák Tóbiás,** az Óbudai Árpád Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Gärtner István* tanítványa.

Egy feladat helyes megoldásáért *harmadik díjat* nyert **Németh Balázs,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Dvorák Cecília* és *Csefkó Zoltán* tanítványa, valamint **Németh Róbert,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, *Horváth Gábor* és *Szokolai Tibor* tanítványa – az ELTE fizikus hallgatója.

Egy feladat lényegében helyes megoldásáért *dicséretet* kapott **Fajszi Bulcsú,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 10. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* és *Csefkó Zoltán* tanítványa; **Fehér Szilveszter,** az Óbudai Gimnázium érettségizett tanulója, *Fehér Gabriella* tanítványa – az ELTE fizikus hallgatója; **Gyulai Márton,** a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Pál Mihály* és *Zámborszky Ferenc* tanítványa; **Kürti Zoltán,** az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium érettségizett tanulója, *Zsigri Ferenc* tanítványa – az ELTE fizikus hallgatója; **Mocskonyi Mirkó,** a szentendrei Ferences Gimnázium érettségizett tanulója, *Adolf Géza* és *Borbély Venczel* tanítványa – az ELTE fizikus hallgatója; **Olosz Adél,** a PTE Gyakorló Általános Iskola, Gimnázium és Szakgimnázium 11. osztályos tanulója, *Koncz Károly* és *Kotek László* tanítványa; **Simon Dániel Gábor,** a Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Bakk János* tanítványa; **Szakály Marcell,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Csefkó Zoltán* és *Dvorák Cecília* tanítványa, valamint **Tófalusi Ádám,** a Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Tófalusi Péter* és *Zámborszky Ferenc* tanítványa.

Az első díjjal *Zimányi Gergely* adományából 63 ezer, a második díjjal 45 ezer, a harmadik díjjal 25 ezer forint pénzjutalom járt, a dicséretesek könyv- és tárgyjutalmat, a díjazottak tanárai pedig a Typotex Kiadó könyveit kapták. A verseny megszervezését az Eötvös Loránd Fizikai Társulat a MOL támogatásából fedezte.

Tichy Géza, Vankó Péter, Vigh Máté

Megoldásvázlatok a 2018/2. szám emelt szintű fizika gyakorló feladatsorához

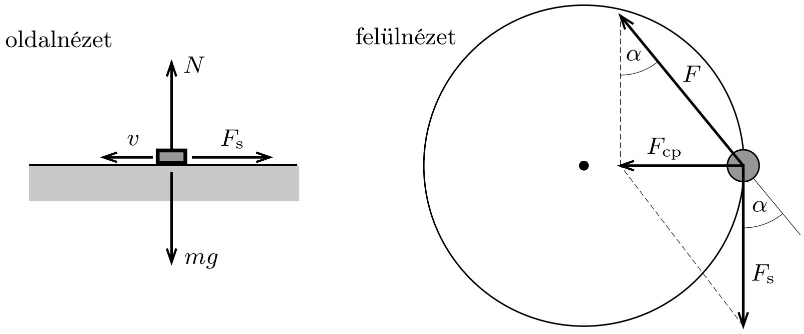
Tesztfeladatok

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	A	D	B	C	D	A	C	A	D	A	C	A	D	C

Számolásos feladatok

1. *a*) Összesen négy erő hat a testre, kettő vízszintes és kettő függőleges. Függőleges irányban az mg nehézségi erő és az asztal N tartóereje kiegyenlítik egymást. A vízszintes erők egyike az F fonálerő, a másik pedig a csúszási súrlódási erő ($F_\mathrm{s} = \mu N = \mu mg \approx 0{,}25 \cdot 0{,}6\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1{,}5\ \mathrm{N}$). Ezek eredője szolgáltatja a centripetális erőt ($F_\mathrm{cp} = \frac{mv^2}{r} = 1{,}2\ \mathrm{N}$). Tudjuk, hogy a centripetális erő a kör középpontja felé mutat, a csúszási súrlódási erő pedig a sebességgel ellentétes, vagyis a körpálya érintője menti. Ennek alapján a fonálerőről megállapíthatjuk, hogy a súrlódási erővel vektorosan összeadva megkapjuk a centripetális erőt, valamint a vektorösszeadás olyan derékszögű háromszöget eredményez, amelynek egyik befogója a súrlódási erő, átfogója a fonálerő és másik befogója a centripetális erő (*1. ábra*). Az F fonálerő nagyságát a Pitagorasz-tétel segítségével számíthatjuk ki:

$$F = \sqrt{F_\mathrm{s}^2 + F_\mathrm{cp}^2} \approx \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}2^2}\ \mathrm{N} = 1{,}9\ \mathrm{N}.$$



1. ábra

b) A fonálerő és a test sebességvektora közötti szöget a tangensfüggvény segítségével számolhatjuk ki:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{\mathrm{cp}}}{F_{\mathrm{s}}} \approx \frac{1{,}2}{1{,}5} = 0{,}8,$$

amiből $\alpha = 38{,}7^\circ$.

c) A fonálerő pillanatnyi teljesítményét nem egyszerűen a fonálerő és a sebesség szorzata adja, mert ezek a vektorok nem egyirányúak. Csak a sebességvektorral párhuzamos erőösszetevő (1,5 N) végez munkát, a merőleges komponens munkája, és így a teljesítménye is nulla. Ezért a fonálerő pillanatnyi teljesítménye: $1{,}5\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m/s} = 1{,}5\ \mathrm{W}$.

Megjegyzés. Mivel a sebesség állandó, a mozgási energia nem változik, a fonálerő munkáját tehát teljesen felemészti a súrlódási veszteség.

2. *a*) Alkalmazzuk a hosszú egyenes vezető mágneses terére vonatkozó összefüggést:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = 4\pi 10^{-7}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot \frac{20\ \mathrm{A}}{2\pi(3\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})} = 1{,}33 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}.$$

b) Lényegében az előző összefüggést kell alkalmaznunk (ami az Ampère-féle gerjesztési törvényből következik), azonban csak azt az áramot kell figyelembe vennünk, ami az $r < R = 1$ mm-es sugáron belül folyik. Mivel az áramsűrűség a vezető keresztmetszete mentén azonos, és a felület a sugár négyzetével arányos, így a kérdéses sugáron belül folyó áram:

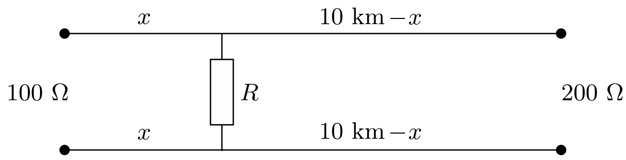
$$I(r) = I(R) \cdot \frac{r^2}{R^2}.$$

Ennek felhasználásával a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$B = 1{,}33 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r} = \mu_0 \cdot \frac{I(R)\cdot \frac{r^2}{R^2}}{2\pi r} = \mu_0 \cdot \frac{I(R)\cdot r}{2\pi R^2} =$$
$$= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot \frac{(20\ \mathrm{A})\cdot r}{2\pi(1\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2} = \left(4\ \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{m}}\right)\cdot r,$$

amiből a kérdéses sugarat egyszerűen leolvashatjuk: $r = 0{,}33 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 0{,}33$ mm.

3. A feladat *a*) és *b*) részének megoldása összekapcsolódik. Írjuk fel az ellenállásokat a nyugati és a keleti oldalra; mindkét esetben a dupla kábelellenálláshoz sorosan kell hozzáadnunk az átvezetés ellenállását (*2. ábra*):



2. ábra

$$100\ \Omega = 2 \cdot \left(13\ \frac{\Omega}{\text{km}}\right) \cdot x + R,$$

$$200\ \Omega = 2 \cdot \left(13\ \frac{\Omega}{\text{km}}\right) \cdot (10\ \text{km} - x) + R.$$

a) Ha a két egyenletet kivonjuk egymásból, kiesik az R ellenállás, és x-re egy elsőfokú egyenletet kapunk:

$$100\ \Omega = 260\ \Omega - 52\ \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot x,$$

amelynek megoldása: $x = \frac{40}{13}$ km $\approx 3{,}1$ km.

b) Ha x-et akármelyik fenti egyenletbe behelyettesítjük, megkapjuk az átvezetés ellenállását: $R = 20\ \Omega$.

4. *a*) A megadott 10 pm $= 10^{-11}$ m-nek meg kell felelnie az elektronok de Broglie-féle hullámhosszának:

$$\lambda_{\text{elektron}} = \frac{h}{p},$$

ahol h a Planck-állandó és p az elektronok impulzusa, amit így már könnyen kiszámíthatunk:

$$p = m \cdot v = \frac{h}{\lambda_{\text{elektron}}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{10^{-11}\ \text{m}} = 6{,}63 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}}.$$

Ha a fenti képletben lévő m tömeget az elektron nyugalmi tömegének tekintjük, akkor az elektron sebességére

$$v = \frac{p}{m} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 7{,}29 \cdot 10^{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

értéket kapunk, ami a fénysebességnek közel negyedrésze. Ha az elektron energiáját egyszerűen az $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiaként számítjuk ki (vagy használhatjuk a $\frac{p^2}{2m}$ összefüggést is), akkor az elektron mozgási energiájára a következő értéket kapjuk:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}\left(9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\right)\left(7{,}29 \cdot 10^{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 2{,}4 \cdot 10^{-15}\ \text{J} = 15\ \text{keV}.$$

Megjegyzés. Egy százalékon belül azonos eredményre jutunk akkor is, ha a mozgási energiát relativisztikusan számoljuk:

$$E_{\text{mozg.}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \approx 2{,}4\cdot 10^{-15}\ \text{J} = 15\ \text{keV}.$$

b) Az ugyanekkora (10 pm) hullámhosszúságú fotonok energiája:

$$E_{\text{foton}} = h\cdot f = h\cdot\frac{c}{\lambda} = (6{,}63\cdot 10^{-34}\ \text{Js})\cdot\frac{3\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10^{-11}\ \text{m}} \approx 2\cdot 10^{-14}\ \text{J} = 125\ \text{keV}.$$

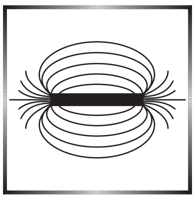
Megjegyzés. A feladat *a*) és *b*) része egymástól függetlenül is megoldható.

c) A mikroszkópoktól elvárjuk, hogy ne tegyék tönkre a preparátumokat, amelyeket bennük vizsgálunk. Tudományosabban megfogalmazva az elvárás az, hogy a mérőműszer minél kevésbé befolyásolja a vizsgálandó tárgyat, jelenséget. Ezért az elektronmikroszkóp látszik alkalmasabbnak, mert annak kisebb energiájú elektronokra van szüksége, mint a fénymikroszkópnak.

Megállapíthatjuk azonban, hogy hiába kisebb az elektronok energiája az ugyanakkora hullámhosszúságú fotonokéhoz képest, a $2{,}4\cdot 10^{-15}$ J = 15 keV energiájú elektronok is nagy rombolást tudnak végrehajtani (főleg az atomok külső és középső elektronhéjain), tudományosan megfogalmazva ezek az elektronok rugalmatlanul szóródnak az atomi elektronokon. Ezért az elektronhéjak mintázatát még nem sikerült közvetlen módon megfigyelnünk.

A 10 pm hullámhosszúságú fotonok a kemény röntgensugárzás tartományába esnek (energiájuk 125 keV körüli). Még nem találták meg annak a módját, hogy ezeket a röntgensugarakat fókuszálják, vagyis mai tudásunk szerint röntgenlencsék, és így röntgenmikroszkópok sem léteznek.

Honyek Gyula
Budapest



Fizika feladatok megoldása

P. 4958. *Egy uránércdarabban* 200 *millió* ^{233}U *atom található. Az* ^{233}U *izotóp felezési ideje* $1{,}6\cdot 10^5$ év, *és* ^{229}Th-*ra bomlik, melynek felezési ideje* $7,8\cdot 10^3$ év. *Ez tovább bomlik* ^{225}Ra-*ra, melynek felezési ideje* 15 *nap. Becsüljük meg az uránércdarabban levő* ^{225}Ra *atommagok számát!*

(*5 pont*) *Országos Szilárd Leó Fizikaverseny,* Paks

Megoldás. Mivel az urán felezési ideje sokkal nagyobb, mint a tóriumé, az pedig sokkal nagyobb, mint a rádium felezési ideje, vagyis

$$T_{1/2}^{\mathrm{U}} \gg T_{1/2}^{\mathrm{Th}} \gg T_{1/2}^{\mathrm{Ra}},$$

az urán aktivitása (időegység alatt bekövetkező bomlások száma) állandónak tekinthető:

$$a(t)^{\mathrm{U}} \approx a(0)^{\mathrm{U}} = \ln 2 \frac{N(0)^{\mathrm{U}}}{T_{1/2}^{\mathrm{U}}}.$$

Elegendően hosszú idő elteltével radioaktív egyensúly (ún. szekuláris egyensúly) áll be: időegység alatt ugyanannyi atommag bomlik el az egyik fajtából, mint amennyi a bomlási sor azt megelőző tagjából keletkezett. Egyensúlyban a bomlási sor egyes tagjainak aktivitása megegyezik:

$$a^{\mathrm{U}} = a^{\mathrm{Th}} = a^{\mathrm{Ra}}, \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{N^{\mathrm{U}}}{T_{1/2}^{\mathrm{U}}} = \frac{N^{\mathrm{Th}}}{T_{1/2}^{\mathrm{Th}}} = \frac{N^{\mathrm{Ra}}}{T_{1/2}^{\mathrm{Ra}}}.$$

Innen a rádium atommagok (átlagos) száma az uránércdarabban:

$$N^{\mathrm{Ra}} = \frac{T_{1/2}^{\mathrm{Ra}}}{T_{1/2}^{\mathrm{U}}} N^{\mathrm{U}} \approx \frac{15 \text{ nap}}{1{,}6 \cdot 10^6 \text{ év}} \cdot (200 \cdot 10^6) \approx 51.$$

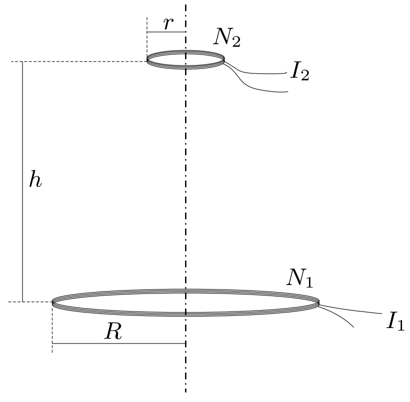
Hajnal Dániel Konrád (Eger, Dobó I. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A végeredmény független a tórium felezési idejétől; annak megadására csak azért volt szükség, hogy lássuk: a radioaktív egyensúly feltétele teljesül.

Olosz Adél (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

33 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 12, hiányos (2–3 pont) 2 dolgozat.

P. 4969. *Két lapos tekercs közös szimmetriatengelyen, egymástól h távolságra az ábrán látható módon helyezkedik el. A tekercsek menetszáma N_1, illetve N_2, sugaruk R és r ($r \ll R$), valamint I_1, illetve I_2 erősségű áram folyik bennük. Mekkora erőt fejt ki egymásra a két tekercs?*

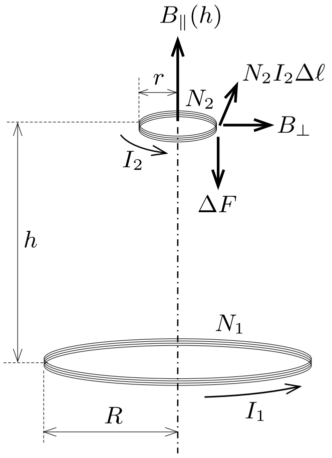


(*6 pont*) *A Kvant nyomán*

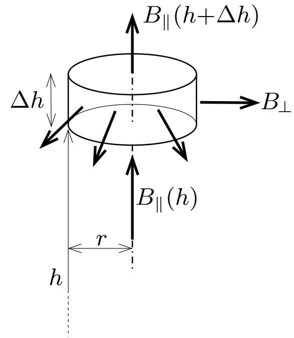
Megoldás. A két tekercs között ható erő vonzó hatású, ha a két áram (I_1 és I_2) körüljárási iránya megegyezik, ellenkező esetben pedig ugyanakkora nagyságú, de taszító. A továbbiakban három különböző megoldást mutatunk a feladatra.

I. megoldás. Az elrendezés forgásszimmetriája miatt a két tekercs között ható eredő erő a szimmetriatengellyel párhuzamos, így elegendő csak az ilyen irányú erőket összegeznünk.

A nagy tekercs által a kis tekercs helyén létrehozott mágneses térnek tengelyirányú $B_\parallel$ komponense, illetve radiálisan kifelé mutató $B_\perp$ komponense van (*1. ábra*). Vegyük észre, hogy a $\Delta\boldsymbol{F} = I\cdot\Delta\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$ képlet szerint tengelyirányú erőt csak $B_\perp$ okoz, azaz feladatunk ennek a komponensnek a meghatározása.



1. ábra



2. ábra

Ismeretes, de a Biot–Savart-törvény segítségével könnyen le is vezethető (ettől itt most eltekintünk), hogy a nagy tekercs által a tengely mentén, a tekercs középpontjától h távolságban keltett mágneses indukció nagysága

$$B_\parallel(h) = \frac{\mu_0}{2} I_1 N_1 R^2 \big(h^2 + R^2\big)^{-3/2}.$$

Vegyünk fel egy igen kicsiny Δh magasságú, r sugarú hengerfelületet (koaxiálisan) a kis tekercs köré (*2. ábra*). Tekintettel arra, hogy $r \ll R$ és $\Delta h \ll h$, a mágneses indukció nagysága a henger alap- és fedőlapján, illetve az oldalpalást mentén állandónak vehető. A henger felső lapján a mágneses indukció nagysága egy kicsiny ΔB-vel különbözik az alaplap menti indukciótól:

$$B_\parallel(h+\Delta h) = B_\parallel(h) + \Delta B_\parallel,$$

emiatt a körlapokon be- és kilépő mágneses fluxus nem egyezik meg. A teljes (zárt) hengerfelületen kilépő összes mágneses fluxus viszont (a mágneses tér forrásmentessége miatt) nulla:

$$B_\parallel(h+\Delta h)\, r^2\pi - B_\parallel(h)\, r^2\pi + 2r\pi\Delta h\, B_\perp = 0,$$

ahonnan megkapható a számunkra érdekes (sugárirányú) komponens:

$$B_\perp = -\frac{r}{2}\frac{\Delta B_\parallel}{\Delta h} \approx \frac{3}{4}\mu_0 I_1 N_1 R^2 r h \big(h^2 + R^2\big)^{-5/2}.$$

Megjegyzés. Az utolsó lépés jogosságát a kicsiny mennyiségek hányadosának differenciálhányadossal történő közelítésével láthatjuk be:

$$\frac{\Delta B_\parallel}{\Delta h} \approx B'_\parallel(h),$$

de a Newton-féle $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ (ha $\varepsilon \ll 1$) közelítő képlet is eredményre vezet:

$$\left[(h+\Delta h)^2 + R^2\right]^{-\frac{3}{2}} \approx \left(h^2 + 2h\Delta h + R^2\right)^{-3/2} \approx \left(h^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{2h\Delta h}{h^2+R^2}\right)^{-3/2} \approx$$

$$\approx \left(h^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{2h\Delta h}{h^2+R^2}\right) = \left(h^2+R^2\right)^{-3/2} - 3h\Delta h\left(h^2+R^2\right)^{-5/2}.$$

A kis tekercsre ható eredő erő (kihasználva, hogy a tekercs minden pontjában $\Delta\boldsymbol{\ell}$ merőleges $\boldsymbol{B}_\perp$-re):

$$F = \sum \Delta F = I_2 N_2 B_\perp \sum \Delta\ell = \frac{3}{2}\mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 R^2 r^2 h\left(h^2+R^2\right)^{-5/2}\pi.$$

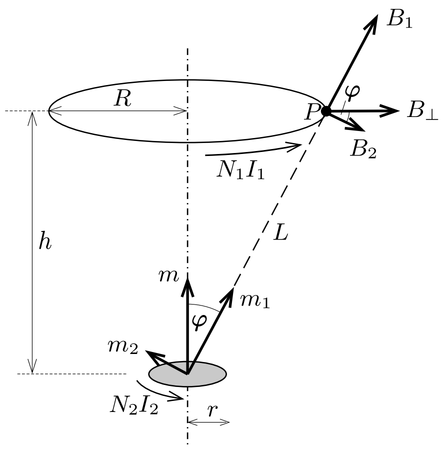
II. megoldás. Mivel a két tekercs egyforma nagyságú erőt fejt ki egymásra, a feladat megoldáshoz számolhatjuk a kis tekercs által a nagy tekercsre kifejtett erőt is.

Minthogy $r \ll R$, a kis tekercs mágneses tere közelíthető egy

$$m = I_2 N_2 \cdot r^2\pi$$

nyomatékú mágneses dipólus terével.

Bontsuk fel az $\boldsymbol{m}$ vektort két komponensre a *3. ábrán* látható módon. Az egyes komponensek által létrehozott mágneses indukcióvektorok nagyságát (B_1, illetve B_2) és irányát könnyen meghatározhatjuk a dipólustól $L = \sqrt{h^2+R^2}$ távol lévő P pontban, hiszen ezek a *Gauss-féle főhelyzeteknek* felelnek meg. B_1 nagysága az I. Gauss-féle főhelyzetre (a dipól tengelyére eső pontokra) vonatkozó ismert képlet (lásd az I. megoldást) alapján:



3. ábra

$$B_1 = \frac{\mu_0 m_1}{2\pi}\,\frac{1}{L^3} =$$

$$= \frac{\mu_1 m \cos\varphi}{2\pi}\left(h^2+R^2\right)^{-3/2}.$$

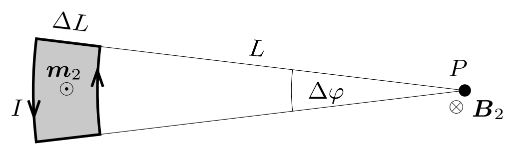
B_2 nagysága a II. Gauss-féle főhelyzetre (a dipól tengelyére merőleges síkban elhelyezkedő pontokra) vonatkozó képlet alapján:

$$B_2 = \frac{\mu_0 m_2}{4\pi}\,\frac{1}{L^3} = \frac{\mu_1 m \sin\varphi}{4\pi}\big(h^2+R^2\big)^{-3/2}.$$

Megjegyzés. A II. főhelyzetben a mágneses indukció $\boldsymbol{B}_2$ vektora ellentétes irányú az $\boldsymbol{m}_2$ dipólnyomatékkal, az I. főhelyzetben viszont $\boldsymbol{B}_1$ és $\boldsymbol{m}_1$ azonos irányú vektorok. B_2 nagysága – ugyanakkora L távolság és ugyanakkora dipólnyomaték esetén – éppen fele B_1-nek. Mindezt pl. a Biot–Savart-törvény alkalmazásával láthatjuk be, ha azt a *4. ábrán* látható kicsiny, áramjárta körvezető, vagyis az $m_2 = IL\Delta\varphi\Delta L$ nyomatékú mágneses dipól P pontbeli terének kiszámítására használjuk. A mágneses indukcióhoz csak a két kis körív árama ad járulékot, és az eredő tér nagysága:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{L\Delta\varphi}{L^2} - \frac{(L+\Delta L)\Delta\varphi}{(L+\Delta L)^2}\right) \approx \frac{\mu_0 I\Delta\varphi}{4\pi}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{(L+\Delta L)}\right) \approx$$

$$\approx \frac{\mu_0 I\Delta\varphi\Delta L}{4\pi L^2} = \frac{\mu_0 m_2}{4\pi}\,\frac{1}{L^3}.$$



4. ábra

A 3. ábra alapján a keresett radiális indukciókomponens nagysága

$$B_\perp = B_1\sin\varphi + B_2\cos\varphi = \frac{3}{4}\frac{\mu_0 m}{\pi}\big(h^2+R^2\big)^{-3/2}\sin\varphi\,\cos\varphi =$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{\mu_0 m}{\pi}\big(h^2+R^2\big)^{-3/2}\frac{R}{\sqrt{h^2+R^2}}\,\frac{r}{\sqrt{h^2+R^2}} = \frac{3\mu_0}{4}I_2N_2Rr^2h\big(h^2+R^2\big)^{-5/2},$$

és végül a nagy tekercsre ható erő:

$$F = 2R\pi I_1N_1B_\perp = \frac{3}{2}\mu_0 I_1I_2N_1N_2R^2r^2h\big(h^2+R^2\big)^{-5/2}\pi.$$

III. megoldás. A feladat energetikai megfontolásokkal is megoldható. Legyen a két tekercs önindukciós állandója rendre L_1 és L_2, a kölcsönös indukciós együtthatójuk pedig M. (A kölcsönös indukcióról és a mágneses tér energiájáról lásd még *Gnädig Péter: A kölcsönös indukció* c. cikket a KöMaL 2001. évi 2. számában, illetve *Szász Krisztián: Két párhuzamosan kapcsolt ideális tekercs eredő induktivitása* c. cikket a KöMaL 2011. évi 9. számában és a KöMaL honlapján. – A Szerk.)

A két lapos tekercs kölcsönös indukciós együtthatóját könnyen meghatározhatjuk, ha a nagy tekercs által létrehozott mágneses indukcióvektort a kis tekercs által határolt körlapon állandónak tekintjük. (Ez a feltevés $r \ll R$ miatt jogos.) A kis tekercsen áthaladó mágneses fluxus:

$$\Phi_{1,2} = N_2 r^2 \pi B_{\parallel}(h) = \frac{\mu_0 \pi}{2} I_1 N_1 N_2 R^2 r^2 \left(h^2 + R^2\right)^{-3/2},$$

és így a kölcsönös indukciós együttható:

$$M(h) = \frac{\Phi_{1,2}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi}{2} N_1 N_2 R^2 r^2 \left(h^2 + R^2\right)^{-3/2}.$$

Látható, hogy a kölcsönös indukciós együttható függ a tekercsek távolságától, míg az önindukciós együtthatók nyilván függetlenek h-tól.

A rendszer mágneses terének energiáját az

$$E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

kifejezés írja le. Ha a két tekercs közötti távolságot egy kicsiny Δh értékkel megnöveljük, miközben F nagyságú húzóerőt fejtünk ki, akkor $W = F\Delta h > 0$ munkát végzünk. Eközben a rendszer mágneses terének energiája

$$\Delta E = I_1 I_2 \, \Delta M(h)$$

értékkel megváltozik. Első gondolatunk az lehet, hogy a munkatétel szerint

$$\Delta E = W, \qquad \text{vagyis} \qquad F = \frac{\Delta E}{\Delta h}.$$

Ez azonban nem lehet igaz, hiszen h növelésekor $E(h)$ csökken, így $\Delta E < 0$ nem egyezhet meg a $W > 0$ munkával.

A hiba forrása a következő: miközben a tekercseket eltávolítjuk egymástól, a bennük folyó áramot csak külső feszültségforrások segítségével tarthatjuk állandó értéken, és ezen feszültségforrások által leadott energiát nem vettük figyelembe az energiamérleg felírásánál. Ha a munkatételt helyesen akarjuk alkalmazni, akkor vagy ki kell számítanunk a külső áramforrások energialeadását, vagy – egy „trükk" alkalmazásával – energetikailag zárttá kell tennünk a rendszert. A továbbiakban a második módszert követjük.

A tekercseket, amelyekben kezdetben I_1 és I_2 áram folyt, oly mértékben lehűthetjük, hogy szupravezetőkké váljanak. Ekkor az áramok fenntartásához nincs szükség külső feszültségforrásra, tehát a tekercsek kivezetéseit akár rövidre is zárhatjuk. A tekercsek között ható erő nyilván csak az áramok nagyságától függ, attól nem, hogy milyen hőmérsékletűek (milyen vezetőképességűek) a vezetékek.

Távolítsuk el gondolatban a két lehűtött (szupravezetővé tett) tekercset egymástól egy kicsiny Δh távolsággal. A rendszer most energetikailag zárt, tehát az általunk végzett $W = F\Delta h$ munka a mágneses energia ΔE megváltozásával lesz egyenlő. Mivel a szupravezető tekercsek mágneses fluxusa nem változhat meg (ellenkező esetben feszültség indukálódna, és az „végtelen nagy" áramot indítana el bennük), a tekercsek eltávolítása közben nemcsak M, hanem I_1 és I_2 is változni fog. A tekercsek fluxusa, vagyis

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2, \qquad \text{illetve} \qquad \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

állandó marad, vagyis

$$L_1 \cdot \Delta I_1 + I_2 \cdot \Delta M + M \cdot \Delta I_2 = 0,$$

továbbá

$$L_2 \cdot \Delta I_2 + I_1 \cdot \Delta M + M \cdot \Delta I_1 = 0.$$

Ha a fenti egyenletek bal oldalának I_1, illetve I_2-szörösét kivonjuk a mágneses energia

$$\Delta E = L_1 I_1 \Delta I_1 + L_2 I_2 \Delta I_2 + I_1 I_1 \Delta M + M\left(I_1 \Delta I_2 + I_2 \Delta I_1\right)$$

megváltozásából, azt kapjuk, hogy

$$\Delta E = -I_1 I_1 \Delta M > 0.$$

(A helyes eredmény csak egy előjelben tér el a naiv, hibás gondolatmenet eredményétől.)

A kölcsönös indukciós együttható kicsiny megváltozását az I. megoldásban alkalmazott módon (differenciálszámítással, vagy a Newton-formula alkalmazásával) számíthatjuk ki:

$$\Delta M = -\frac{3\pi}{2}\mu_0 N_1 N_2 R^2 r^2 h\big(h^2 + R^2\big)^{-5/2}\Delta h,$$

és így a keresett vonzóerő:

$$F = -I_1 I_2 \frac{\Delta M}{\Delta h} = +\frac{3\pi}{2}\mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 R^2 r^2 h\big(h^2 + R^2\big)^{-5/2}.$$

Marozsák Tóbiás (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 12. évf.)

10 dolgozat érkezett. Helyes Elek Péter, Marozsák Tóbiás, Olosz Adél és Tófalusi Ádám megoldása. Hiányos (1–3 pont) 6 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 376. Egy félliteres, vízzel teletöltött műanyag palackot a kupakján átmenő, a szimmetriatengelyére merőleges vízszintes tengely körül ingaként meglengetünk. Mérjük meg az inga lengésidejét különböző kezdeti kitérések esetén! Változik-e az eredmény, ha a vizet megfagyasztjuk?

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 629. Naszreddin Hodzsa vállára vette nehéz táskáját, úgy szállt fel a szamarára. Megkérdezték tőle, miért nem rakja a táskát a szamarára? Ezt válaszolta: „Az bizony állatkínzás lenne, épp elég nehéz vagyok én is a szegény párának."

a) Miért hibás ez a válasz?

b) Rajzoljuk fel a történetben szereplő testekre ható erőket!

(*3 pont*)

G. 630. Miért homorú egy forgó edényben lévő víz felülete?

(*3 pont*)

G. 631. 30 g tömegű rézhuzal végeire 1,2 V feszültséget kapcsolunk, ennek hatására 2 A erősségű áram folyik át rajta. Mekkora feszültséget kell kapcsolnunk egy ugyancsak 30 g tömegű, kétszer olyan hosszú rézhuzalnak a végeire, hogy azon is 2 A erősségű áram folyjon keresztül?

(*3 pont*)

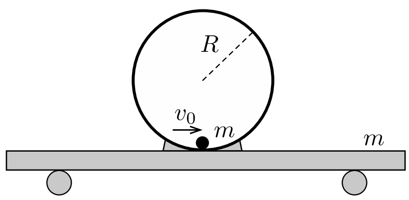
G. 632. Egy 900 km/h sebességgel haladó repülőgép másodpercenként 4 liter üzemanyagot (kerozint) használ fel. Mekkora utat tesz meg percenként az az autó, amelyik 100 kilométerenként 6,4 liter benzint fogyaszt, és 5 óra alatt annyi benzinre van szüksége, amennyi kerozint kilométerenként fogyaszt a repülőgép?

(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

P. 5012. A phjongcshangi téli olimpián a magyar férfi rövidpályás gyorskorcsolyaváltó 5000 méteren 6 perc 31,971 másodperces rekordidővel olimpiai bajnok lett. A 111,12 m hosszú rövidpályás gyorskorcsolyapálya két 8,5 m sugarú félkörből és az azok végpontjait összekötő egyenes szakaszokból áll. Becsüljük meg, mekkora szögben dőlnek be a korcsolyázók a kanyarokban!

(*4 pont*) Közli: *Frei Zsolt,* Budapest

P. 5013. Az *ábrán* látható, $R = 1$ m sugarú gyűrűből és könnyű, kicsi kerekekkel felszerelt kiskocsiból álló szerelvény tömege m. A gyűrű aljába egy szintén m tömegű, pontszerű testet helyezünk. A testet pillanatszerűen v_0 sebességgel elindítjuk. Mekkora v_0, ha a kocsi éppen felemelkedik a talajtól, amikor a test a gyűrű legfelső pontjába kerül? A súrlódás mindenütt elhanyagolható.



(*5 pont*) Közli: *Berke Martin,* Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimnázium

P. 5014. Mekkora sebességgel kellene fellőni egy lövedéket a Holdon, hogy emelkedési magassága elérje a Hold sugarának p százalékát? Legyen először $p = 1$, azután $p = 10$, végül $p = 100$. Mindhárom esetben 2 értékes jegy pontossággal adjuk meg az eredményt!

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Pontversenyen kívüli feladat: Lepkeszárnyak színei.
A feladat a KöMaL honlapján található meg (`http://www.komal.hu/cikkek/fizika-mtaek/fizika-mtaek.h.shtml`).
Beküldési határidő: 2018. április 10. A feladat az MTA Energiatudományi Kutatóközpont támogatásával kerül kitűzésre.

P. 5015. Az 55 Cancri nevű csillag tömege és átmérője megegyezik a Napéval. Legbelső bolygója, a Janssen keringési ideje mindössze 17,76 óra. Adjuk meg a csillag és a bolygó átlagos távolságát csillagászati egységben, amely a Nap és a Föld átlagos távolsága!

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5016. Egy homogén tömegeloszlású rúd fekszik a vízszintes asztallapon. A rudat az egyik végén ható, a rúdra mindenkor merőleges erővel lassan függőleges helyzetbe akarjuk hozni. Legalább mekkora a súrlódási együttható a rúd és az asztallap között, ha a rúd a felállítás közben nem csúszik meg?

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

P. 5017. Egy 10 literes bojlerbe olyan kis teljesítményű fűtőtestet építettek, hogy az ne legyen képes a vizet forráspontig melegíteni. A víz teljes felmelegedése után a fűtést kikapcsolva a víz hőmérséklete az első percben 1 °C-kal csökken. Mekkora a fűtőtest teljesítménye, ha a bojler vízértéke 3 kg?

(*4 pont*) *Versenyfeladat nyomán*

P. 5018. Ha a tüzelőt nem kályhában égetjük el, hanem egy hőerőgép tűzterében, a hőerőgéppel pedig egy hőszivattyút hajtunk meg, akkor a lakásba több hő juthat, mint amennyi a tüzelő elégetésekor keletkezik. Legyen a lakás a hőerőgép alsó hőtartálya, valamint a hőszivattyú felső hőtartálya. A hőszivattyú alsó hőtartálya lehet az utca levegője. Tegyük fel, hogy a hőerőgép hatásfoka η_1, a hőszivattyúról pedig tételezzük fel, hogy hőerőgépként működtetve η_2 hatásfokú lenne. Számítsuk ki, hogy a tüzelő elégetésekor felszabaduló hőnek hányszorosa kerül így a lakásba!

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5019. Függőleges irányú, homogén, $2\cdot 10^{-3}$ T indukciójú mágneses mezőben a vízszintessel 30°-os szögben mozog egy 1,5 eV energiájú elektron. Hányszor metszi mozgása közben ugyanazt az indukcióvonalat, míg 20 cm-t süllyed?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5020. Egy ernyőn lévő kör alakú nyílást az ernyőre merőleges, koherens lézerfénnyel világítunk meg. Az ernyőtől távolabb, az optikai tengelyre merőlegesen egy CCD-érzékelő lemezt helyeztek el. Hány százalékkal csökken az optikai tengelyen lévő pixel megvilágítása (a rá eső fény intenzitása), ha a nyílás 1/6-át egy átlátszatlan, körcikk alakú lemezzel eltakarjuk?

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5021. Legfeljebb mekkora energiára tehet szert egy – kezdetben állónak tekinthető – elektron, ha egy 1 MeV mozgási energiájú másik részecskével ütközik, amennyiben ez a részecske

a) proton;

b) elektron;

c) pozitron?

(*4 pont*) Közli: *Fröhlich Georgina,* Budapest

P. 5022. Két fonál közül az egyik L, a másik $2L$ hosszúságú. A fonalak végein azonos, m tömegű, pontszerűnek tekinthető testek vannak. A testeknek azonos, Q töltése van. Egyensúly esetén mekkora szöget zárnak be a közös pontban rögzített fonalak?

Adatok: $L = 20$ cm, $m = 1$ g, $Q = 2{,}8 \cdot 10^{-7}$ C.

(*6 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2018. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 68. No. 3. March 2018)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 160): **K. 583.** An integer is said to be a *prime-rose* if its first digit is a prime, the sum of the first two digits is also a prime, the sum of the first three digits is also a prime, and so on. Find the largest prime-rose number in which all digits are different. **K. 584.** Santa Claus is very strong, but he can only carry a maximum of 100 kg of presents in his sack. In a large apartment building, he was to deliver three different kinds of presents: A, B and C. The mass of each type of present is a whole number of kilograms. He can carry eight A and eight B at the same time, but in that case he cannot take any further piece (neither A, nor B or C) in that round. Similarly, he cannot take anything further if he carries ten A, four B and four C. How much may each of the presents A, B and C weigh in kilograms? **K. 585.** Andrew wrote three (not necessarily different) positive integers on a blackboard, each of them smaller than 2018. Then he erased these numbers (A, B and C), and replaced them with $\frac{A+B}{2}$, $\frac{B+C}{2}$, $\frac{A+C}{2}$. He repeated this procedure 11 times altogether. As a result, one of the three numbers on the board is 100. What are the other two numbers? **K. 586.** The distances of an interior point of a regular hexagon from three consecutive vertices are 4, 4 and 8 units. How long are the sides of the hexagon? **K. 587.** How many of the numbers 2014, 2015, 2016 and 2017 can be expressed as a sum of squares of six not necessarily different odd numbers? **K. 588.** Let $A>B$ be four-digit numbers such that B is obtained by writing the digits of A in reverse order. What are the smallest and largest possible values of $A-B$?

New exercises for practice – competition C (see page 161): **Exercises up to grade 10: C. 1469.** The foot of the altitude drawn from vertex C of a triangle ABC is T, an interior point of side AB. The angle bisector drawn from C intersects AB at R. Given that $AB=10$, $AT=3$ and $AR=4$, find the lengths of the sides of the triangle. **C. 1470.** What is the radius of two touching congruent spheres centred at the centres of two adjacent faces of a unit cube? **Exercises for everyone: C. 1471.** Prove that every power of two greater than four can be expressed as the difference of two odd square numbers. For example, $32=81-49$. **C. 1472.** A certain game involves collecting cards with various things on them. Each card has exactly two of the following 9 things: colours (red, white, or green), elements (air, earth, fire, or water) and animals (rabbit or sheep). A card shows at most one of each category. In how many different ways is it possible to select four cards such that there are eight different things on them, provided that the game contains all possible combinations? **C. 1473.** The number abc is expressed in base $2a$ notation. What is the base if $c-b=b-a=1$, and the value of abc equals $29a^2+9a+9$ in decimal notation? **Exercises upwards of grade 11: C. 1474.** Let P, Q and R denote the feet of the altitudes of the acute-angled triangle ABC. Given that $BP:PA=1:2$ and $AQ:QC=3:1$, find the proportion of the pieces formed by R on side BC. **C. 1475.** What is the largest possible area of the lateral surface of a cylinder inscribed in a unit sphere?

New exercises – competition B (see page 162): **B. 4939.** Show that a convex 2018-sided polygon cannot be dissected into triangles in which the angles in degrees are all integers. (*3 points*) **B. 4940.** What may be the value of the sum $x+y+z$ if $x^4+4y^4+16z^4+64=32xyz$? (*3 points*) **B. 4941.** The centre O of the circumscribed circle of an acute-angled triangle ABC is reflected in the feet of the altitudes. Prove that the circle formed by the three reflections has the same radius as the circumscribed circle of the triangle. (*4 points*) **B. 4942.** The one hundred mathematicians participating in an international combinatorial conference were all housed in the same hotel. The receptionist was originally planning to place them in the order of their arrival in the rooms numbered 1 to 100. However, he forgot to give that instruction to the guest arriving first, who has thus chosen a room at random. So the receptionist instructed all the other guests to take the room with their number in the order of arrivals, or, if that room has already been taken, to select any other room they like. How many possible arrangements of the guests in the rooms are there? (*4 points*) (Proposed by *A. Faragó* and *T. Káspári,* Paks) **B. 4943.** There is an ant at each corner of a given face of a rectangular brick. Each ant wants to get to the opposite vertex of the cuboid, that is, to the other endpoint of the space diagonal drawn from his vertex of the cuboid. Is it possible for the ants to crawl to the opposite vertices along the surface of the brick, so that they follow the shortest possible paths and their paths do not intersect? (*4 points*) (Proposed by *M. E. Gáspár,* Budapest) **B. 4944.** Let t denote the area of (some) triangle of maximum area inscribed in a convex plane figure $\mathcal{S}$, and let T denote the area of (some) triangle of minimum area circumscribed about $\mathcal{S}$. What is the maximum of the ratio $\frac{T}{t}$? (*5 points*) **B. 4945.** Find all positive integers n for which $1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}$ is a perfect square. (*5 points*) (Based on the idea of *L. Németh,* Fonyód) **B. 4946.** Let $f(x)$ be a polynomial of real coefficients such that $f(k)$ is an integer for every positive integer k that ends in 5 or 8 in decimal notation. *a*) Prove that $f(0)$ is an integer. *b*) Give an example of a polynomial $f(x)$ that meets the above conditions, but $f(1)$ is not an integer. (*6 points*) **B. 4947.** Prove that there is exactly one way of dissecting a cube into five tetrahedra. (Two dissections are not considered different if the resulting pieces are congruent.) (*6 points*)

New problems – competition A (see page 163): **A. 719.** Let ABC be a scalene triangle with circumcenter O and incenter I. The A-excircle, B-excircle, and C-excircle of triangle ABC touch BC, CA, and AB at points A_1, B_1, and C_1, respectively. Let P be the orthocenter of AB_1C_1 and H be the orthocenter of ABC. Show that if M is the midpoint of PA_1, then lines HM and OI are parallel. (Proposed by: *Michael Ren,* Andover, Massachusetts, USA) **A. 720.** We call a positive integer *lively* if it has a prime divisor greater than $10^{10^{100}}$. Prove that if S is an infinite set of lively positive integers, then it has an infinite subset T with the property that the sum of the elements in any finite nonempty subset of T is a lively number. **A. 721.** Let $n\geqslant 2$ be a positive integer, and suppose $a_1,a_2,\ldots,a_n$ are positive real numbers whose sum is 1 and whose squares add up to S. Prove that if $b_i=\frac{a_i^2}{S}$ $(i=1,\ldots,n)$, then for every $r>0$, we have

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(1-a_i)^r}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{(1-b_i)^r}.$$

Problems in Physics

(see page 186)

M. 376. A half-litre bottle is filled with water and is made swing about a horizontal axis, which is perpendicular to the bottle's symmetry axis, and goes through the cap of the bottle. Measure the period of the pendulum for different initial angular displacements. Will the result change if the water is frozen in the bottle?

G. 629. Once, when Nasreddin Hodja shouldered his heavy pack and got on his donkey with the pack, he was asked why he did not put his pack to the donkey. He answered: „Because that would be cruelty to animals, I am heavy enough for this poor little thing". *a*) Why is this answer wrong? *b*) Draw the forces acted upon the objects mentioned in the story. **G. 630.** Why does the surface of the water in a rotating container have concave shape? **G. 631.** A current of 2 A is flowing through a 30 g copper wire across which there is a voltage of 1.2 V. What should the voltage across that copper wire be which is also 30 g, but twice as long as the other one and the same 2 A current flows through it? **G. 632.** A plane, which is flying at a speed of 900 km/h, uses 4 litres of fuel (kerosene) in each second. What distance is covered in each minute by that car which has a fuel consumption of 6.4 litres of petrol per 100 km and which needs the same amount of petrol in 5 hours as the amount of kerosene consumed by the plane while it covers a distance of one kilometre?

P. 5012. Team Hungary won men's 5000 m short track speed skating relay gold at PyeongChang Winter Olympic Games and claimed champion in a time of 6:31.971 and set a new Olympic record. The short track of total length 111.12 m consists of two straight and two semi-circular segments with radius 8.5 m. Estimate the skaters' angle of lean in the turns of the track. **P. 5013.** The total mass of the trolley, which has small light wheels, and the ring of radius $R = 1$ m on the trolley is m (see the *figure*). A small point-like object of mass m is placed to the bottom of the ring. The small object is given an initial speed of v_0. What is the value of v_0 if the trolley just rises from the ground when the object reaches the topmost point of the ring? Friction is negligible everywhere. **P. 5014.** At what speed should a projectile be projected on the Moon, in order that the height to which it rises is p percent of the radius of the Moon? Let the values of p be the following: $p = 1$, 10 and 100. (Give your answers to 2 significant figures.) **P. 5015.** The star called 55 Cancri has the same diameter and mass as the Sun has. Its innermost planet Janssen has an orbital period of 17.76 hours. Determine the average distance between the star and the planet in astronomical units, which is the average distance between the Sun and the Earth. **P. 5016.** There is a uniform-density rod on the horizontal tabletop. We would like to bring the rod slowly to a vertical position with a force which is exerted at one end of the rod and which is perpendicular to the rod during the whole process. What is the least value of the coefficient of static friction, if the rod does not slip? **P. 5017.** A heating element is built into a boiler of 10 liters. The element has such a small power that it is unable to heat the water to its boiling point. After heating the water totally, during the first minute after ceasing the heating the temperature of the water decreases by 1 °C. What is the power rating of the heating element if the water equivalent of the calorimeter is 3 kg? **P. 5018.** If fuel is burnt in a heat engine and a heat pump is operated with the heat engine then more heat can be transferred into the flat than in the case when the fuel is burnt in a stove. Let the flat be the low temperature heat reservoir of the heat engine and the high temperature heat reservoir of the heat pump. The cold temperature heat reservoir of the heat pump can be the air of the street. Suppose that the efficiency of the heat engine is η_1, and that the efficiency of the heat pump if it was operated as a heat engine would be η_2. Calculate the factor by which the heat transferred to the flat by means of the heat engine and the pump is greater than the heat transferred to the flat by burning the fuel in the stove. **P. 5019.** An electron of energy 1.5 eV is moving in a uniform vertical magnetic field of induction $2 \cdot 10^{-3}$ T, such that the angle between its velocity vector and the horizontal is 30°. How many times does it cross the same induction line while it descends 20 cm? **P. 5020.** A circular hole on a screen is illuminated by a coherent laser beam perpendicular to the screen. Behind the screen and perpendicular to the optical axis a CCD-detector sheet was placed. By what percent does the illumination of the pixel on the optical axis (the intensity of the incident light beam) decrease if one-sixth of the hole is covered by an opaque sheet having a circular sector shape? **P. 5021.** At most how much energy can be gained by an – initially stationary – electron if it collides with another particle of energy 1 MeV, if the particle is a *a*) proton; *b*) electron; *c*) positron? **P. 5022.** The lengths of two threads are L and $2L$. At the ends of the threads there are point-like objects of mass m. The objects have the same Q charge. What is the angle between the two threads which are fixed at the same point in equilibrium? *Data:* $L = 20$ cm, $m = 1$ g, $Q = 2.8 \cdot 10^{-7}$ C.