KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

69. évfolyam 3. szám Budapest, 2019. március

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: szerk@komal.hu
Internet: http://www.komal.hu
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml.

Euler arányösszeg-tétele[*]

Bemutatjuk Euler arányösszeg-tételének történetét, adunk rá egy új bizonyítást, és egy érdekes egyenlőtlenséggé alakítjuk Euler arányösszeg-formuláját.

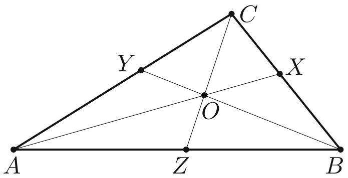
1. Bevezetés

Leonhard Euler (1707–1783), korának legnagyobb matematikusa, a geometriát is számos azóta híressé vált tétellel gazdagította. Ebben a dolgozatban[1] a Magyarországon kevésbé ismert arányösszeg-tételével foglalkozunk, amelynek nemzetközi irodalma sem túlságosan bőséges, habár időről időre feltűnnek újabb bizonyításokat, illetve lehetséges általánosításokat tárgyaló cikkek (lásd [4, 5, 6, 9, 10]).

1. tétel (Euler arányösszeg-tétele [2]). *Az euklideszi sík minden ABC háromszögének bármely O belső pontjára*

$$\frac{AO}{OX}+\frac{BO}{OY}+\frac{CO}{OZ}+2=\frac{AO}{OX}\cdot\frac{BO}{OY}\cdot\frac{CO}{OZ}, \tag{1}$$

ahol $X=AO\cap BC$, $Y=BO\cap CA$, $Z=CO\cap AB$.



Habár Euler már 1780. május 1-jén benyújtotta a kiadónak az arányösszeg-tételt tartalmazó tanulmányát [2], az csak 1783-ban bekövetkezett halála után 22 évvel jelent meg. Sok munkája jutott erre a sorsa, aminek legfőbb oka az volt, hogy valósággal ontotta magából a cikkeket (élete során több, mint 800-at írt a 28 nagyobb mű mellett), így az általa preferált Berlini, illetve Szentpétervári Akadémiák folyóiratainál kiadatlan művei igencsak feltorlódtak.

A kortársak azonban ismerték Euler arányösszeg-tételét, amit jól mutat, hogy Anders Johan Lexell (1740–1783), aki az Euler-család jó barátja volt, és haláláig ugyanannak a Szentpétervári Akadémiának volt a tagja, már 1784-ben publikálta a tétel gömbháromszögekre érvényes változatát [3].

Jelen szerzőknek is egy általánosabb problémával, a projektív-metrikus terek karakterizációjával [8] összefüggésben került látóterébe az arányösszeg-tétel [7].

[*]Ez a kutatás az NKFIH K-116451 és KH_18 129630 projektjei támogatásával készült.

[1]Ugyanez angol nyelven is elérhető, lásd [7].

Még az arányösszeg-tételnél is kevésbé ismert, pedig már Euler [2] dolgozatában is szerepelt, hogy az ABC háromszög megszerkeszthető az (1) formulában szereplő hosszak ismeretében.

2. tétel (Szerkeszthetőség). *Ha adottak egy ismeretlen ABC háromszög valamely O pontjára illeszkedő AX, BY és CZ szakaszok hosszai, valamint azok O pont általi felosztásának arányai, akkor az ABC háromszög megszerkeszthető.*

Ebben a dolgozatban nemcsak a fenti tételeket igazoljuk, hanem a 3. tételben pontosan megadjuk annak feltételeit is, hogy három olyan szakaszt, amelyek belsejében adott egy-egy pont, mikor lehet ezen belső pontjaikban úgy összeilleszteni, hogy a valamely három kiválasztott végpontjuk által meghatározott háromszögnek a kiválasztott végponttal szemben lévő oldalai tartalmazzák a szakaszok nem kiválasztott végpontjait[2].

Végül, bár bemutatjuk a közvetlen általánosítás lehetőségét is, inkább egy az (1) egyenlőségből született egyenlőtlenséget bizonyítunk, mely éppenséggel pontosan akkor válik egyenlőséggé, ha az AX, BY és CZ szakaszok egy ponton mennek át. A 4. tétel határozottan emlékeztet Routh tételére ([1, 13.55], [11]).

2. Az arányösszeg-tétel és megfordításának bizonyítása

Az 1. tétel bizonyítása. Áttekinthetőbbé válik Euler (1) formulája, ha bevezetjük az $a=\frac{AO}{OX}$, $b=\frac{BO}{OY}$ és $c=\frac{CO}{OZ}$ jelöléseket:

$$a+b+c+2=abc. \tag{2}$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva az $1+a+b+c+ab+bc+ca$ kifejezést, a jobb oldal újra szorzatalakba írható, és a bal oldal is szorzatok összegévé válik:

$$(1+b)(1+c)+(1+a)(1+c)+(1+a)(1+b)=(1+a)(1+b)(1+c).$$

Az a, b és c értéke nyilván nem -1, ezért a jobb oldallal osztva az ekvivalens

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1 \tag{3}$$

egyenlőséghez jutunk, vagyis (1) ekvivalens az

$$\frac{OX}{AX}+\frac{OY}{BY}+\frac{OZ}{CZ}=1 \tag{4}$$

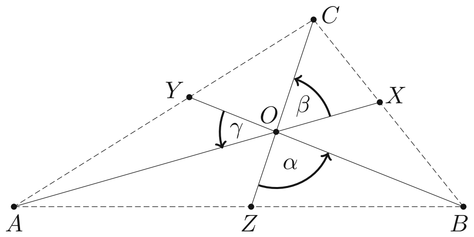
egyenlőséggel. Ez azonban közvetlenül adódik az

$$\frac{OX}{AX}=\frac{t(OBC)}{t(ABC)},\quad \frac{OY}{BY}=\frac{t(OCA)}{t(ABC)},\quad \frac{OZ}{CZ}=\frac{t(OAB)}{t(ABC)}$$

egyenlőségekből. □

[2] A [9] tanulmány igazolta, hogy amennyiben csak az (1) egyenletben szereplő arányok betartása fontos, akkor (1) elegendő: minden további feltétel nélkül van olyan háromszög, amelyben éppen az (1) egyenletben szereplő arányok lépnek fel. Sőt, a szerző megjegyzi, hogy egy ilyen háromszög minden affin képe is megteszi.

A 2. tétel bizonyítása. Annak érdekében, hogy elkerüljük az áttekinthetetlenül összetett formulákat, most is alkalmazzuk az $a=\frac{AO}{OX}$, $b=\frac{BO}{OY}$ és $c=\frac{CO}{OZ}$ jelöléseket, melyekre a feltétel szerint (2), vagy ami ugyanaz, (3) teljesül. Bevezetjük még az $\alpha=ZOB\sphericalangle$, $\beta=XOC\sphericalangle$ és $\gamma=YOA\sphericalangle$ szögeket, amelyekre nyilván $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ érvényes.



Feladatunk tehát az α, β és $\gamma=\pi-\alpha-\beta$ értékek megtalálása.

Az X pont akkor és csak akkor esik a BC szakaszra, ha

$$BO\cdot OC\sin\alpha=t(BOC)=BO\cdot OX\sin\gamma+CO\cdot OX\sin\beta,$$

vagyis

$$\frac{AO}{OX}\cdot\frac{\sin\alpha}{OA}=\frac{\sin\alpha}{OX}=\frac{\sin\gamma}{OC}+\frac{\sin\beta}{BO}.$$

A csúcsok ciklikus permutációjával ugyanígy látjuk, hogy $Y\in CA$ és $Z\in AB$ akkor és csak akkor igaz, ha rendre

$$\frac{BO}{OY}\cdot\frac{\sin\beta}{OB}=\frac{\sin\alpha}{OA}+\frac{\sin\gamma}{CO},$$
$$\frac{CO}{OZ}\cdot\frac{\sin\gamma}{OC}=\frac{\sin\beta}{OB}+\frac{\sin\alpha}{AO}.$$

Az $x=\frac{\sin\alpha}{AO}$, $y=\frac{\sin\beta}{OB}$ és $z=\frac{\sin\gamma}{OC}$ bevezetésével azt kapjuk, hogy ezek teljesítik az

(5)
$$\begin{aligned}ax-y-z&=0,\\-x+by-z&=0,\\-x-y+cz&=0\end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert. Az (5) egyenleteinek különbségéből rögtön adódik, hogy a megoldásokra $(1+a)x=(1+b)y=(1+z)c$ teljesül, vagyis minden megoldás $\left(\frac{\lambda}{1+a},\frac{\lambda}{1+b},\frac{\lambda}{1+c}\right)$ alakú, ahol $\lambda\in\mathbb{R}$. Eszerint

(6)
$$\lambda\frac{AO}{1+a}=\sin\alpha,\quad \lambda\frac{BO}{1+b}=\sin\beta\quad\text{és}\quad \lambda\frac{CO}{1+c}=\sin\gamma.$$

Ebből

$$\frac{OB}{1+b}\sin\alpha=\frac{OA}{1+a}\sin\beta,$$

és

$$\frac{OC}{1+c}=\frac{\sin\gamma}{\lambda}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\lambda}=\frac{\sin\alpha}{\lambda}\cos\beta+\cos\alpha\frac{\sin\beta}{\lambda}=$$

$$=\frac{OA}{1+a}\cos\beta+\frac{OB}{1+b}\cos\alpha$$

is következik. Utóbbi egyenlőség mindkét oldalából kivonva az $\frac{OB}{1+b}\cos\alpha$ kifejezést, majd az eredményt négyzetre emelve és hozzáadva az első egyenlethez, azt kapjuk, hogy

$$\frac{OB^2}{(1+b)^2}\sin^2\alpha+\left(\frac{OC}{1+c}-\frac{OB}{1+b}\cos\alpha\right)^2=\frac{OA^2}{(1+a)^2}.$$

Ebből a bal oldalon a különbség négyzetre emelését elvégezve

$$\frac{OB^2}{(1+b)^2}-2\cdot\frac{OC}{1+c}\cdot\frac{OB}{1+b}\cos\alpha+\frac{OC^2}{(1+c)^2}=\frac{OA^2}{(1+a)^2} \tag{7}$$

adódik. Ez a koszinusz-tétel értelmében azt jelenti, hogy van egy olyan PQR háromszög, amelynek a csúcsokkal szembeni oldalhosszaira rendre $p=\frac{OA}{1+a}$, $q=\frac{OB}{1+b}$ és $r=\frac{OC}{1+c}$ érvényes, és szögei a csúcsoknál rendre α, β és $\gamma=\pi-\alpha-\beta$.

Az eredeti háromszöget tehát úgy tudjuk megszerkeszteni, hogy a $p=\frac{AO\cdot OX}{AX}$, $q=\frac{BO\cdot OY}{BY}$ és $r=\frac{CO\cdot OZ}{CZ}$ hosszakat kiszámítjuk, ezekből megszerkesztjük a PQR háromszöget, ennek szögei megadják az α, β és $\gamma=\pi-\alpha-\beta$ szögeket, amelyek alapján az AX, BY és CZ szakaszok egymáshoz képest beállíthatók. □

Az 1. tétel és a 2. tétel bizonyítása alapján világos, hogy az alábbi tétel feltételeit nem lehet könnyíteni.

3. tétel (Az arányösszeg-tétel megfordítása). *Ha adott közös O pontra illeszkedő AX, BY és CZ szakaszokra érvényes Euler (1) formulája, valamint a $p=\frac{AO\cdot OX}{AX}$, $q=\frac{BO\cdot OY}{BY}$ és $r=\frac{CO\cdot OZ}{CZ}$ számok mindegyike kisebb a másik kettő összegénél, akkor az AX, BY és CZ szakaszokat el lehet forgatni O körül úgy, hogy az X, Y, Z pontok rendre az ABC háromszög megfelelő oldalaira essenek.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $a=\frac{AO}{OX}$, $b=\frac{BO}{OY}$ és $c=\frac{CO}{OZ}$. A feltétel szerint

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1. \tag{8}$$

Szerkesszünk egy olyan PQR háromszöget, mely oldalainak hossza (a szokásos módon jelölve) p, q és r. A csúcsoknál lévő szögek legyenek rendre α, β és $\gamma=\pi-\alpha-\beta$.

Forgassuk el az AX, BY és CZ szakaszokat úgy, hogy $ZOB\sphericalangle$ legyen α, $XOC\sphericalangle$ legyen β és $YOA\sphericalangle$ legyen γ. Eszerint

$$\begin{aligned} q^2-2rq\cos\alpha+r^2&=p^2,\\ p^2-2rp\cos\beta+r^2&=q^2,\\ p^2-2qp\cos\gamma+q^2&=r^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Most igazoljuk, hogy a kialakult ABC háromszög csúcsokkal szemközti oldalai rendre tartalmazzák az X, Y és Z pontokat.

Legyen $\widehat{X}=AX\cap BC$, $\widehat{Y}=BY\cap CA$ és $\widehat{Z}=CZ\cap AB$, továbbá $\widehat{a}=\frac{AO}{O\widehat{X}}$, $\widehat{b}=\frac{BO}{O\widehat{Y}}$ és $\widehat{c}=\frac{CO}{O\widehat{Z}}$. Az ABC háromszögre is érvényes (1), így

$$\frac{1}{1+\widehat{a}}+\frac{1}{1+\widehat{b}}+\frac{1}{1+\widehat{c}}=1 \tag{10}$$

adódik. Bevezetve a $\widehat{p}=\frac{AO\cdot O\widehat{X}}{A\widehat{X}}$, $\widehat{q}=\frac{BO\cdot O\widehat{Y}}{B\widehat{Y}}$ és $\widehat{r}=\frac{CO\cdot O\widehat{Z}}{C\widehat{Z}}$ jelöléseket, (7) és a szerkesztés menete alapján

$$\begin{aligned} \widehat{q}^2-2\widehat{r}\widehat{q}\cos\alpha+\widehat{r}^2&=\widehat{p}^2,\\ \widehat{p}^2-2\widehat{r}\widehat{p}\cos\beta+\widehat{r}^2&=\widehat{q}^2,\\ \widehat{p}^2-2\widehat{q}\widehat{p}\cos\gamma+\widehat{q}^2&=\widehat{r}^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Az (9) egyenleteket összevetve az (11) egyenletekkel, mivel mindkét egyenlethármas azonos szögű, tehát hasonló háromszögekre vonatkozik, adódik, hogy $\widehat{p}=\lambda p$, $\widehat{q}=\lambda q$ és $\widehat{r}=\lambda r$ valamely $\lambda>0$ számra. Tekintve a p, q, r és $\widehat{p}$, $\widehat{q}$, $\widehat{r}$ definícióit, ebből $\frac{1}{1+\widehat{a}}=\frac{\lambda}{1+a}$, $\frac{1}{1+\widehat{b}}=\frac{\lambda}{1+b}$, és $\frac{1}{1+\widehat{c}}=\frac{\lambda}{1+c}$ adódik, amiből (8) és (10) összevetésével $\lambda=1$ következik. Eszerint $\widehat{a}=a$, $\widehat{b}=b$, és $\widehat{c}=c$, vagyis $\widehat{X}=X$, $\widehat{Y}=Y$, és $\widehat{Z}=Z$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

3. Általánosítás helyett egy egyenlőtlenség

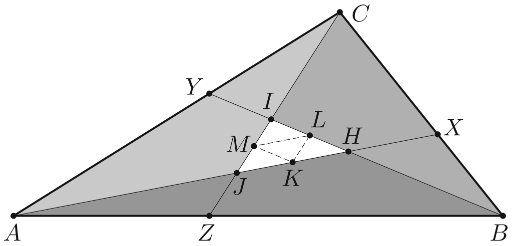
Belátható, hogy Euler arányösszeg-tétele igaz marad akkor is, ha a háromszög csúcsaiból kiinduló egyenesek metszéspontjáról csak annyit teszünk fel, hogy az nem esik a háromszög egyik oldalegyenesére se. Sőt, ezen általánosabb eset megfordítása is érvényben marad ha az X, Y, Z pontoktól csak azt várjuk el, hogy a megfelelő oldalegyenesekre essenek. Ennek bizonyítását itt nem végezzük el, helyette egy Routh tételére ([1, 13.55], [11]) emlékeztető egyenlőtlenséget mutatunk.

Az arányösszeg-formulát tekintsük most az ekvivalens (4) alakjában. Ez a formula a három szakasz egy ponton áthaladása esetén érvényes. Ha a szakaszok páronként különböző H, I, J pontokban metszik egymást, akkor is képezhetünk minden szakaszon arányt, ha a két metszéspont által meghatározott szakasz felezőpontját tekintjük új osztópontnak.

4. tétel. *Legyenek X, Y, Z az ABC háromszög rendre A, B, C csúccsal szemközti oldalainak pontjai, legyenek továbbá őket a szemközti csúcsokkal összekötő szakaszok metszéspontjai $H = AX \cap BY$, $I = BY \cap CZ$ és, $J = CZ \cap AX$. Végül legyenek ez utóbbiak által meghatározott HIJ háromszög oldalfelező pontjai $K = (J + H)/2$, $L = (H + I)/2$ és $M = (I + J)/2$. Ekkor*

$$\frac{KX}{AX} + \frac{LY}{BY} + \frac{MZ}{CZ} \geqslant 1, \tag{12}$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $K = L = M$.



Bizonyítás. Rendre azonos alapú háromszögek területének arányait írhatjuk fel a következőképpen:

$$\frac{t(HBC)}{t(ABC)} = \frac{HX}{AX}, \qquad \frac{t(JBC)}{t(ABC)} = \frac{JX}{AX}, \qquad \frac{t(ICA)}{t(ABC)} = \frac{IY}{BX},$$

$$\frac{t(HCA)}{t(ABC)} = \frac{HY}{BX}, \qquad \frac{t(JAB)}{t(ABC)} = \frac{JZ}{CX}, \qquad \frac{t(IAB)}{t(ABC)} = \frac{IZ}{CX}.$$

Ezeket a 12 bal oldalának kétszeresébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{HX + JX}{AX} + \frac{IY + HY}{BY} + \frac{JZ + IZ}{CZ} =$$

$$= \frac{t(HBC)}{t(ABC)} + \frac{t(JBC)}{t(ABC)} + \frac{t(ICA)}{t(ABC)} + \frac{t(HCA)}{t(ABC)} + \frac{t(JAB)}{t(ABC)} + \frac{t(IAB)}{t(ABC)} =$$

$$= \frac{t(HBC)}{t(ABC)} + \frac{t(HCA)}{t(ABC)} + \frac{t(ICA)}{t(ABC)} + \frac{t(IAB)}{t(ABC)} + \frac{t(JBC)}{t(ABC)} + \frac{t(JAB)}{t(ABC)} =$$

$$= 1 - \frac{t(HAB)}{t(ABC)} + 1 - \frac{t(IBC)}{t(ABC)} + 1 - \frac{t(JAC)}{t(ABC)} = 3 - \frac{t(ABC) - t(HIJ)}{t(ABC)} =$$

$$= 2 + \frac{t(HIJ)}{t(ABC)}.$$

Ezzel a tételünket bizonyítottuk. $\square$

Hivatkozások

[1] H. S. M. Coxeter, *A geometriák alapjai,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

[2] L. Euler, Geometrica et sphaerica quaedam, *Memoires de lAcademie des Sciences de Saint-Petersbourg,* **5** (1815), 96–114; Opera Omnia Series 1, vol. XXVI, 344–358;
eredeti: `http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E749.pdf`;
angol fordítás: `http://eulerarchive.maa.org/Estudies/E749t.pdf`.

[3] A. J. Lexell, Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum, *Acta academiae scientarum imperialis Petropolitinae,* **5**:1 (1784), 112–126;
`http://www.17centurymaths.com/contents/euler/lexellone.pdf`.

[4] A. Papadopoulos and W. Su, On hyperbolic analogues of some classical theorems in spherical geometry, *arXiv* (2015), `http://arxiv.org/abs/1409.4742`.

[5] B. Grünbaum and M. S. Klamkin, Euler's Ratio-Sum Theorem and Generalizations, *Mathematics Magazine,* **79**:2 (Apr) (2006), 122–130;
`http://www.jstor.org/stable/27642919`.

[6] B. Grünbaum, Cyclic ratio sums and products, *Crux Mathematicorum,* **24**:1 (1998), 20–25; `https://cms.math.ca/crux/v24/n1/page20-25.pdf`.

[7] Á. Kurusa and J. Kozma, Euler's ratio-sum theorem revisited, *Forum Geom.,* **19** (2019);
`http://forumgeom.fau.edu/FG2019volume19/FG2019index.html`.

[8] Á. Kurusa and J. Kozma, Euler's ratio-sum formula in projective-metric spaces, *Beiträge zur Algebra und Geometrie,* (2018);
`https://doi.org/10.1007/s13366-018-0422-6`.

[9] G. C. Shephard, Euler's Triangle Theorem, *Crux Mathematicorum,* **25**:3 (1999), 148–153; `https://cms.math.ca/crux/v25/n3/page148-153.pdf`.

[10] C. E. Sandifer, 19th century Triangle Geometry (May 2006), *How Euler did it,* Math. Ass. Amer., 2007, 19–27; `http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-05.pdf`.

[11] `https://en.wikipedia.org/wiki/Routh's_theorem`; Accessed 2019. március 8.

Kurusa Árpád és **Kozma József**
(Bolyai Intézet, Szeged)

Maths Beyond Limits nemzetközi matematika tábor

Idén negyedik alkalommal kerül megrendezésre az intenzív és sokszínű Maths Beyond Limits (MBL) nemzetközi matematika tábor, 2019. szeptember 9. és 21. között. Helyszíne Milówka, egy kedves hegyvidéki falu Dél-Legyelországban, ami csodálatos hangulatot teremt a matekozáshoz, ismerkedéshez, illetve sporthoz. A szervezők középiskolás korú, a matematika iránt különösen fogékony fiatalok jelentkezését várják. Az MBL nyelve az angol, így jó nyelvismerettel érdemes érkezni, bár a tábor maga is kiváló lehetőség a nyelv gyakorlására. A tábor minden résztvevő számára az útiköltséget kivéve ingyenes.

Egy átlagos tábori nap során három időpontban matematikai előadásokon lehet résztvenni: érdeklődésnek megfelelően minden időpontban három-három meghirdetett előadás közül lehet választani. Néhány előadás témája: gráfszínezések, véletlen séták, harmadrendű görbék, rácsok a számelméletben, transzfinit indukció, lineáris algebra a kombinatorikában, topológia, vegyes módszerek versenyfeladatokra. Az előadásokat követően lehetőség nyílik az előadókkal való beszélgetésre, kérdések megvitatására. Esténként pedig számos szabadidős tevékenység közül lehet választani: akad társasjáték, foci, röplabda, improvizáció, éneklés, illetve tűzön való kolbászsütés is.

A táborra 2019. április 1-jétől május 1-jéig (aznap éjfélig) lehet jelentkezni, nyolc feladat megoldásával, valamint a jelentkezési lap kitöltésével a következő címen: `http://mathsbeyondlimits.eu/recruitment`. További információra, illetve a tavalyi táborból bőséges mennyiségű matematikára lehet lelni a tábor 83 oldalas brosúrájában: `http://mathsbeyondlimits.eu/mbl2018`. A táborral kapcsolatos információk, hírek elérhetőek az MBL Facebook-oldalán:

`https://www.facebook.com/mathsbeyondlimits/`.

A tavalyi táborról, a résztvevők élményeiről készült rövidfilm a következő címen tekinthető meg: `https://www.youtube.com/watch?v=s8RzoBoEU34`.

Jó matekozást, sikeres jelentkezést kívánnak a szervezők minden érdeklődőnek!

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{6}{1-x^2}$, (*4 pont*)

b) $\cos(2x)+5\sin x=3$, (*5 pont*)

c) $|x-2|+x=4\sqrt{x}-2$. (*5 pont*)

2. Egy háromszögben az egyik oldal kétszer akkora, mint egy másik oldal; az előbbivel szemközti szög 60°-kal nagyobb az utóbbival szemközti szögnél. A háromszög területe $2\sqrt{3}$ területegység. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei? (*12 pont*)

3. *a*) Igaz-e az A, B kijelentések tetszőleges logikai értékénél, hogy

$$\big((\neg A \to \neg B) \wedge A\big) \to B = \text{i?}$$

($\neg A = \text{nem } A$.) (*5 pont*)

b) Igaz-e, ha $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = 0$? Válaszunkat indokoljuk. (*3 pont*)

c) Hány pontja lehet annak az egyszerű, összefüggő gráfnak, amelynek 8 éle van? (*4 pont*)

4. *a*) Hány olyan kétjegyű szám van, amelyben a számjegyek különbségének abszolút értéke legfeljebb 3? (*8 pont*)

b) Ha ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk kettő különböző számot, mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik páros, a másik páratlan lesz? (*5 pont*)

II. rész

5. Egy téglalap oldalainak mérőszáma egész szám. Ezt a téglalapot oldalaival párhuzamos egyenesekkel egységnégyzetekre daraboltuk, majd a széleken levőket fehérre, a többit feketére festettük.

a) Mekkorák a téglalap oldalai, ha kétszer annyi fekete négyzet lett, mint amennyi fehér? (*9 pont*)

b) Az *a*) részben kapott téglalapokból kiválasztottuk azt, amelynek oldalméretei között legkisebb a különbség, majd egy 8 egység sugarú piros körlap közepére erősítettük. Az így kapott eszközt céltáblának használjuk, ahol a telitalálatot az jelenti, ha fehér mezőbe csapódik a lövedék. Feltesszük, hogy minden lövés eltalálja a céltáblát, és annak minden pontját egyenlő valószínűséggel. Mekkora a valószínűsége, hogy Vilmos négy lövésből legalább kétszer telitalálatot ér el? Az eredményt százalékban egészre kerekítve fejezzük ki. (*7 pont*)

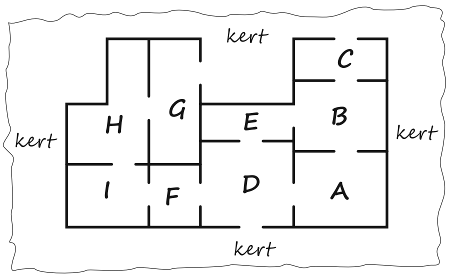
6. *a*) Az $f(x) = \frac{x^2}{4}$ függvény grafikonját tükrözzük az $A(2;5)$ pontra. Hol metszi az így kapott görbe az $f(x)$ grafikonját? (*5 pont*)

b) Húzzunk érintőt a $P(3;-4)$ pontból $f(x)$ grafikonjához. Írjuk fel az érintők egyenletét. (*6 pont*)

c) Mekkora a területe annak a síkidomnak, melyet az $f(x)$ függvény grafikonja és a $P(3;-4)$ ponton átmenő érintők zárnak közre? (*5 pont*)

7. *a*) Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra igaz, hogy $3 \mid n^3 + 8n$. (*6 pont*)

b) Oldjuk meg a $p + q^n = 2019$ egyenletet, ahol p, q pozitív prím, n pozitív egész szám. Használjuk a függvénytáblázatot. (*6 pont*) *c*) Nagy úr éppen most kísérte végig vendégeit a birtokán, amelynek során minden ajtón pontosan egyszer mentek át. A bemutató végén a nappaliban pezsgővel koccintottak a találkozásra. Melyik helyiség a nappali? A helyiségek betűjelének felsorolásával adjunk meg egy lehetséges bejárási sorrendet. (*4 pont*)



Nagy úr házának alaprajza

8. Egy kozmetikai cég saját termékét három változatban forgalmazza a hatóanyag töménységétől, a kiszerelés mennyiségétől és a csomagolástól függően. Az A jelű termék 150 g-os, 10% töménységű; a B jelű 100 g-os, 20% töménységű; a C jelű 50 g-os, 30% töménységű. A hatóanyag és az oldószer a termék árában a mennyiségével egyenes arányban jelenik meg; az A és B jelű termék csomagolása kétszer annyiba kerül, mint a C jelű terméké. Az üzletben az A 2275 Ft-ba, a B 2500 Ft-ba, a C pedig 1725 Ft-ba kerül dobozonként.

a) Mennyi a hatóanyag és az oldószer grammonkénti ára? (*7 pont*)

Anna egyik nap észrevette, hogy az üzlet egyik polcán az A, B, C jelű termékekből annyi van, hogy számuk egy növekvő mértani sorozat három szomszédos elemével egyenlő. A számok átlaga 14, szórása $2\sqrt{14}$.

b) Hány termék volt a polcon az egyes fajtákból? (*9 pont*)

9. A 2 egység élű $ABCDEFGH$ csúcsú kocka $ABCD$ alaplapjának középpontja P; $DCGH$ oldallapjának középpontja Q; $AEHD$ előlapjának középpontja R; a BF él felezőpontja S. (A-t E-vel, B-t F-fel, C-t G-vel, D-t H-val köti össze él.)

a) Mekkora az A, P, Q, R, S csúcsú poliéder térfogata? (*8 pont*)

b) Mekkora a poliéderbe írt gömb sugara? (*8 pont*)

Németh László
Fonyód

Megoldásvázlatok a 2019/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Lara 3 piros, 4 kék és 3 sárga építőkockával játszik, melyek legfeljebb csak a színükben különböznek egymástól. Az összes építőkockát egymásra téve szeretne egy tornyot építeni.*

Hányféle színmintázatú tornyot építhet, ha

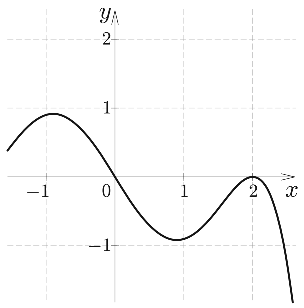
a) piros kockát sem alulra, sem felülre nem tesz;

b) legalább két piros elem közvetlenül egymás fölött van? (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Összesen 10 kocka van, tehát 10 emeletes lesz a torony, ebből a 3 piros kockát csak 8 helyre teheti, ami $\binom{8}{3} = 56$ lehetőség. A 4 kék kockát a maradék 7 hely bármelyikére helyezheti, amit $\binom{7}{4} = 35$-féleképpen tehet meg, a sárga kockák helye pedig már egyértelmű. Mivel a piros, illetve kék kockák elhelyezése egymástól függetlenül történik, a színmintázatok száma $56 \cdot 35 = 1960$.

b) A két egymás fölötti elemet ragasszuk képzeletben össze, és tekintsük őket egy elemnek (az elemek sorrendjének megszámolása így könnyebb; a színmintázatnál majd figyelembe kell venni, hogy ez 2 kockányi piros szín). A 9 kocka lehetséges sorrendjeinek száma így $2 \cdot \frac{9!}{2!4!3!} = 2520$, ahol a 2-es szorzó azért van, mert nem mindegy, hogy az 1 szintes és a 2 szintes piros elem hol helyezkedik el. Azonban azt az esetet, ahol mind a három piros kocka egymás fölött van, így kétszer számoltuk. Ragasszuk össze a három piros kockát, így megkapjuk, hogy ezen esetek száma $\frac{8!}{1!4!3!} = 280$.

Tehát $2520 - 280 = 2240$ megfelelő színmintázat van ebben az esetben.



2. *Az ábra egy f függvény deriváltfüggvényének ($f'(x)$) egy részletét mutatja. Adjuk meg az alábbi állítások esetén, hogy melyik igaz, melyik hamis, illetve melyiknél nem lehet ezt eldönteni. Válaszunkat indokoljuk.*

a) A 0 pontban az f függvénynek lokális maximuma van.

b) Ha $0 \leqslant x \leqslant 2$, akkor $f(x) \leqslant 0$.

c) Az f függvény képe az origóra szimmetrikus a $(-1, 1)$ intervallumon.

d) Az f függvénynek az $x = 2$ helyen inflexiós pontja van. (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Igaz. Az f' értéke a 0 helyen 0, és pozitívból negatívba vált.

b) Nem lehet eldönteni. Az f' függvény menetéből nem lehet pontosan rekonstruálni az f függvényt. (Egy konstans hozzáadásával f értéke az adott intervallumon pozitívvá vagy negatívvá tehető, míg a deriváltfüggvény nem változik.)

c) Hamis. Mivel f' az origóra középpontosan szimmetrikus (ráadásul egy, az adott intervallumnál valamivel szűkebb intervallumon), így az f függvény az y tengelyre szimmetrikus (ezen a szűkebb intervallumon).

d) Igaz. Mivel $f'(2) = 0$ és nem vált előjelet a 2-ben, így inflexiós pontja van.

3. *Krisztiánnak* 80 *CD-ből álló gyűjteménye van. A CD-k között* 48 *olyan van, amin több előadó szerepel* (T), 24 *olyan van, amin egy előadó vagy együttes számai vannak* (E), *és* 8 *hangszeres zenei CD-je* (H) *is van. Sajnos Krisztián nem túl rendes, és az összes CD egy fiókban hever egymás hegyén-hátán.*

Egyik barátja megkéri, hogy vigyen el a partijára 5 *CD-t. Mivel – mint mindig – Krisztián nagy rohanásban van, anélkül, hogy a fiókba nézne, kivesz onnan* 5 *CD-t.*

a) Mi a valószínűsége annak, hogy csak hangszerest visz?

b) Mi a valószínűsége, hogy az öt CD között lesz legalább egy (T)*, viszont nem lesz* (H)?

c) Krisztián rápillantott a kezében lévő CD-kre, és látta, hogy a legfelső (H)*. Mi a valószínűsége, hogy a többi is az?* (*13 pont*)

Megoldás. *a*) A jó esetek száma $\binom{8}{5}=56$, az összes eset száma $\binom{80}{5}= =24\,040\,016$, így a valószínűség $p_a=\frac{56}{24\,040\,016}(\approx 2{,}33\cdot 10^{-6})$.

b) 1, 2, 3, 4 vagy 5 (T), és ennek megfelelően 4, 3, 2, 1 vagy 0 (E) lesz a választott lemezek között (és nyilván mindig 0 (H), amit $\binom{8}{0}=0=1$-féleképp választhatunk ki, de ezt nem szükséges leírni):

$$p_b=\frac{\binom{48}{1}\binom{24}{4}+\binom{48}{2}\binom{24}{3}+\binom{48}{3}\binom{24}{2}+\binom{48}{4}\binom{24}{1}+\binom{48}{5}\binom{24}{0}}{\binom{80}{5}}\approx 0{,}58.$$

c) Használjuk a feltételes valószínűségre vonatkozó képletet (itt most számít a sorrend):

$$p_c=\frac{P(\text{első az és a többi is az})}{P(\text{első az})}=\frac{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{80\cdot79\cdot78\cdot77\cdot76}}{\frac{8\cdot79\cdot78\cdot77\cdot76}{80\cdot79\cdot78\cdot77\cdot76}}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{79\cdot78\cdot77\cdot76}\ (\approx 2{,}33\cdot 10^{-5}).$$

4. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

a) $2^{4x-1}\cdot 4^{2x+3}=8^x$;

b) $\sqrt{x-\sqrt{x+2}}\leqslant 2$. (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Alakítsuk át mindkét oldalt:

$$2^{4x-1}\cdot 2^{4x+6}=2^{3x},$$
$$2^{8x+5}=2^{3x}.$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt ebből $8x+5=3x$, és így $x=-1$ következik, ami az ekvivalens lépések miatt megoldása az egyenletnek.

b) A bal oldal nemnegatív, így az egyenlőtlenséget négyzetre emelhetjük: $x-\sqrt{x+2}\leqslant 4$, de $0\leqslant x-\sqrt{x+2}$-nek is teljesülnie kell. Ekkor $x\geqslant\sqrt{x+2}\geqslant 0$, amiből $x^2\geqslant x+2$, vagyis $x^2-x-2=(x+1)(x-2)\geqslant 0$. Ebből pedig $x\geqslant 2$ vagy $x\leqslant -1$ következik, de ez utóbbi ellentmond az $x\geqslant 0$ feltételnek.

A belső gyökjel alatt is nemnegatív szám kell, hogy álljon, vagyis $x\geqslant -2$.

A kettőt összevetve $x\geqslant 2$ adódik. Ekkor megoldandó az $x-4\leqslant\sqrt{x+2}$ egyenlőtlenség. Ha $2\leqslant x<4$, akkor a bal oldal negatív, a jobb oldal pozitív, tehát ez megfelelő. Ha $x\geqslant 4$, akkor négyzetre emelve az $x^2-8x+16\leqslant x+2$ egyenlőtlenséget kapjuk, amiből $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)\leqslant 0$, azaz $2\leqslant x\leqslant 7$. Ekkor tehát $4\leqslant x\leqslant 7$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $2\leqslant x\leqslant 7$.

II. rész

5. *A Schiller Gimnázium diákjainak mindegyike első idegen nyelvként angolt tanul, és legalább egy, legfeljebb két nyelvet választhatnak a francia, spanyol és latin közül. A* 10. *évfolyam* 72 *diákjából* 40*-en két nyelvet is választottak.* 48*-an tanulnak franciául,* 40*-en spanyolul és valahányan latinul.* 24*-en tanulnak franciául és spanyolul is, és* 12*-en franciául és latinul.*

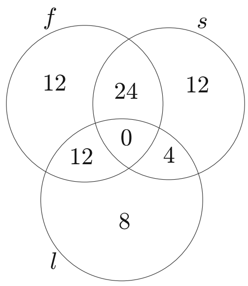
a) Hányan tanulnak összesen latinul; és ebből hányan spanyolul is?

Az évfolyamról egy tanulót véletlenszerűen kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy

b) franciául és spanyolul,

c) franciául vagy spanyolul,

d) vagy franciául, vagy latinul (de nem mindkét nyelven) tanul? (*16 pont*)



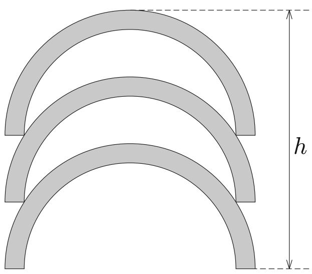
Megoldás. Kezdjük el kitölteni a Venn-diagramot. Jelöljük a nyelveket kezdőbetűjükkel. A 40 diák közül, akik 2 plusz nyelvet is választottak, 24-en franciául és spanyolul, 12-en francia és latin nyelven, tehát $40-24-12=$ $=4$ tanuló választotta a spanyolt és latint. A 40 spanyolul tanuló közül $24+4=28$ tanuló választott még egy nyelvet, így $40-28=12$ diák tanul csak spanyolul (az angol mellett, amire ezután nem térünk ki). A csak franciául tanuló diákok száma $48-24-12=12$. Végül, a csak latinul tanulók száma $72-(24+12+4+12+12)=8$.

a) Tehát összesen $12+4+8=24$ diák tanul latint, és ebből 4 spanyolt is.

b) $p_{fs}=\frac{24}{72}=\frac{1}{3}$.

c) $p_{f\vee s}=\frac{48+16}{72}=\frac{64}{72}=\frac{8}{9}$.

d) $p_{f\bar{l}\vee\bar{f}l}=\frac{(12+24)+(8+4)}{72}=\frac{48}{72}=\frac{2}{3}$.



6. *Egy parkban néhány, betonból készült, félgömb formájú virágtartót használnak. A félgömbök belső sugara* 44 cm, *falvastagsága* 8 cm, *a beton sűrűsége* 2,2 g/cm^3.

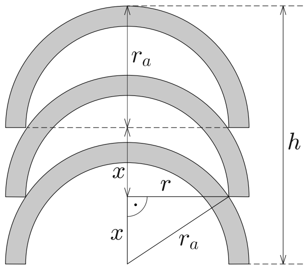
a) Hány m^3 *virágföld fér egy ilyen tartóba?*

b) Milyen nehéz egy tartó?

c) A tél beállta előtt mindegyik tartót kiürítik, majd hármat-hármat egymásra helyeznek. Milyen magas egy ilyen rakás?

d) Tavasszal újra kihelyezik a tartókat. Előtte fehérre meszelik a tartók külső részét (a peremet is). Egy-egy virágtartónak mekkora területű része lesz így frissen meszelve (cm^2-ben)? (*16 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. A virágtartók belső sugara $r=44$ cm, külső sugara $r_a=$ $=52$ cm, két egymásra rakott tartó aljának távolsága pedig x.



a) A tartóba tehető virágföld térfogata:

$$V_{\text{virágföld}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\approx 0{,}178\ \text{m}^3.$$

b) A tartó térfogata:

$$V_{\text{tartó}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi(r_a^3-r^3)\approx 116\,080\ \text{cm}^3.$$

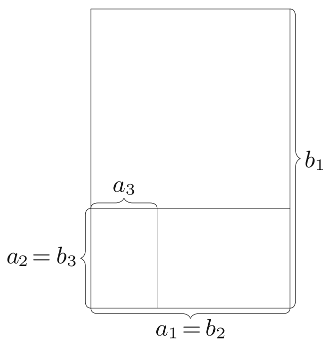
A tartó tömege: $m=\varrho\cdot V\approx 255$ kg.

c) A Pitagorasz-tételt felírva: $r_a^2=x^2+r^2$, amiből $x\approx 27{,}7$ cm, és így a kérdezett magasság: $h=2x+r_a\approx 107{,}4$ cm.

d) A lefestendő felület áll egy r_a sugarú félgömbből, valamint egy r_a és r sugarú kör által meghatározott körgyűrűből:

$$F=\frac{1}{2}\cdot 4\pi r_a^2+\pi(r_a^2-r^2)=\pi(3r_a^2-r^2)\approx 19\,402{,}48\text{cm}^2.$$

7. *Egy téglalap oldalai $a_1=2$ m és $b_1=3$ m. Felosztjuk két téglalapra az* ábrán *látható módon úgy, hogy az egyik hasonló az elsőhöz, oldalai a_2 és $b_2=a_1$. Ezt a második téglalapot is felosztjuk úgy, hogy a kapott két téglalap közül az egyik hasonló hozzá, és ennek a harmadik téglalapnak az oldalai a_3 és $b_3=a_2$. Ezt az eljárást folytatjuk.*



a) Milyen hosszúak az n-edik téglalap oldalai?

b) Milyen n esetén lesz az n-edik és az $(n+1)$-edik téglalap területének különbsége 1 cm^2-nél kisebb?

c) Mekkora az első n téglalap kerületének összege? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) $b_1=3$ m, $a_1=2$ m $=\frac{2}{3}b_1$;
$b_2=a_1=\frac{2}{3}b_1$; $a_2=\frac{2}{3}b_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot b_1$;
$b_n=a_{n-1}=\frac{2}{3}b_{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot b_1$; $a_n=\frac{2}{3}b_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot b_1$.

b) Írjuk fel az n. és az $(n+1)$. téglalap területét:

$$T_n=a_n\cdot b_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot b_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot b_1=\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1}\cdot b_1^2,$$

$$T_{n+1}=a_{n+1}\cdot b_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot b_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot b_1=\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}\cdot b_1^2.$$

A kettő különbsége:

$$T_n - T_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \cdot b_1^2.$$

Mivel $b_1 = 300$ cm, azért ez pontosan akkor kisebb 1 cm^2-nél, ha

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) < \frac{1}{90\,000}.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve ebből:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} < \frac{1}{50\,000},$$

$$(2n-1) \cdot \lg\frac{2}{3} < \lg\frac{1}{50\,000},$$

$$2n-1 > \frac{\lg\frac{1}{50\,000}}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{-\lg 50\,000}{\lg 2 - \lg 3},$$

$$n > \frac{1}{2} - \frac{\lg 50\,000}{2(\lg 2 - \lg 3)} \approx 13{,}8.$$

Tehát $n \geqslant 14$ esetén lesz az n-edik és az $(n+1)$-edik téglalap területének különbsége 1 cm^2-nél kisebb.

c) Az első n téglalap kerületének összege:

$$2 \cdot \left(\left(\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 3\right) + \right.$$

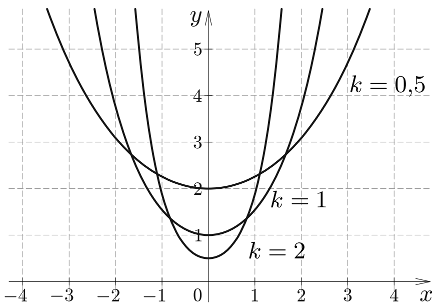
$$\left. + \left(3 + \frac{2}{3} \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 3\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(3 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\right) =$$

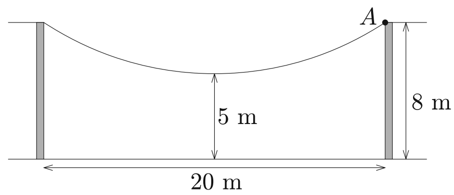
$$= 12 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}\right) + 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6 = 30 - 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

8. *Egy kalandpark pályáján két fa között egy függőhíd található. A felfüggeszett híd alakjának általános képlete* $f(x) = a \cdot \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$*, ahol* a *és* k *valós paraméterek. Az* 1. ábrán *az* $a = 1$ *és* $k = 0{,}5$*,* $k = 1$*, illetve* $k = 2$ *értékekhez tartozó láncgörbék láthatók.*[*]

[*]A feladat szövegéből eredetileg kimaradt, hogy a görbék az $a = 1$ értékhez tartoznak.



1. ábra



2. ábra

a) A 2. ábrán *a híd vázlatos oldalnézetét látjuk. Határozzuk meg a híd görbéjéhez tartozó két paraméter értékét* 3 *tizedesjegyre kerekítve (a talajszintet tekintsük az x-tengelynek.)*

b) Határozzuk meg, hogy az A pontban a híd milyen szöget zár be a vízszintessel.

c) Reklámfelületet szeretnének felszerelni a híd egyik oldalára úgy, hogy a felület a talajszint, a híd és a két fa zárja közre. Mekkora felület keletkezik így?

(*16 pont*)

Megoldás. *a)* $f(0)=5$, vagyis $5=a\cdot\frac{e^0+e^0}{2k}$, amiből $5k=a$. Tudjuk még, hogy

$$8=f(10)=a\cdot\frac{e^{10k}+e^{-10k}}{2k}=5k\cdot\frac{e^{10k}+e^{-10k}}{2k},$$

amiből $3{,}2=e^{10k}+e^{-10k}$. Legyen $u=e^{10k}$, ekkor u-val beszorozva kapjuk, hogy $u^2-3{,}2u+1=0$, amiből $u_{1,2}=\frac{3{,}2\pm\sqrt{10{,}24-4}}{2}\approx\frac{3{,}2\pm2{,}5}{2}$, azaz $u_1=2{,}85$ és $u_2=0{,}35$ (a két szám egymás reciproka). Ebből $k_1=0{,}105$, $k_2=-0{,}105$ és a megfelelő a értékek $a_1=0{,}525$ és $a_2=-0{,}525$. (A láncgörbéknél a pozitív értékeket szokás használni.)

b) $f(x)=2{,}5\big(e^{0{,}105x}+e^{-0{,}105x}\big)$, amiből $f'(x)=2{,}5\cdot0{,}105\big(e^{0{,}105x}-e^{-0{,}105x}\big)$, és így $f'(10)\approx0{,}658$. A keresett szöget α-val jelölve $\operatorname{tg}\alpha=f'(10)=0{,}658$, amiből $\alpha\approx33{,}3^\circ$.

Tehát az A pontban a híd körülbelül 33°-os szöget zár be a vízszintessel.

c)

$$T=2\cdot\int_0^{10}2{,}5\big(e^{0{,}105x}+e^{-0{,}105x}\big)\,\mathrm{d}x=$$

$$=2\cdot\left[2{,}5\left(\frac{1}{0{,}105}e^{0{,}105x}-\frac{1}{0{,}105}e^{-0{,}105x}\right)\right]_0^{10}=$$

$$=5\left(\frac{1}{0{,}105}e^{1{,}05}-\frac{1}{0{,}105}e^{-1{,}05}\right)-5\left(\frac{1}{0{,}105}e^{0}-\frac{1}{0{,}105}e^{0}\right)\approx119{,}41\ \mathrm{m}^2.$$

9. *a) Hány osztója van a* $2018\cdot 2019$*, illetve a* 2018^{2019} *számnak?*

b) Mennyi az egyik, illetve a másik szám osztóinak az összege?

c) Bizonyítsuk be, hogy 2018^{2019} *legalább* $3\cdot 2019$ *számjegyből áll.*

d) Melyik nagyobb: 2018^{2019} *vagy* 2019^{2018}*?* (*16 pont*)

Megoldás. *a)* $2018=2\cdot 1009$, $2019=3\cdot 673$, így az osztók száma:

$$d(2018\cdot 2019)=d(2\cdot 3\cdot 673\cdot 1009)=2^4=16,$$
$$d(2018^{2019})=d(2^{2019}\cdot 1009^{2019})=2020^2=4\,080\,400.$$

b) $2018\cdot 2019$ osztói:

$$1,\ 2,\ 1009,\ 2018;\ 3\cdot 1=3;\ 3\cdot 2=6;\ 3\cdot 1009=3027;\ 3\cdot 2018=6054;$$
$$673\cdot 1=673;\ 673\cdot 2=1346;\ 673\cdot 1009=679\,057;\ 673\cdot 2018=1\,358\,114;$$
$$2019\cdot 1=2019;\ 2019\cdot 2=4038;\ 2019\cdot 1009=2\,037\,171;\ 2019\cdot 2018=4\,074\,342.$$

Összegük 8 168 880. (Ezt az összeget így is kiszámolhatjuk:

$$\frac{2^2-1}{2-1}\cdot\frac{1009^2-1}{1009-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}\cdot\frac{673^2-1}{673-1}=3\cdot 1010\cdot 4\cdot 674=8\,168\,880.)$$

2018^{2019} osztóit az első módszerrel nehéz lenne összeszámolni. Vegyük észre, hogy minden osztó $2^k\cdot 1009^l$ alakú, ahol k és l 0 és 2019 közötti tetszőleges egész szám lehet. Tehát az osztók összegét felírhatjuk

$$\sum_{k=0}^{2019}2^k\cdot\sum_{l=0}^{2019}1009^l$$

alakban, hiszen minden osztó két szám szorzata az alábbi táblázatban:

	1	2	4	8	...	2^{2019}
1						
1009						
1009^2						
.						
.						
.						
1009^{2019}						

Az összes lehetséges szorzat összege így

$$\frac{1009^{2020}-1}{1009-1}\cdot\frac{2^{2020}-1}{2-1}=\frac{1009^{2020}-1}{1008}\cdot\big(2^{2020}-1\big).$$

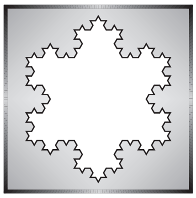
c) $$2018^{2019} > (2\cdot 10^3)^{2019} = 2^{2019}\cdot 10^{3\cdot 2019} = \left(2^{10}\right)^{201}\cdot 2^9\cdot 10^{6057} >$$
$$> \left(10^3\right)^{201}\cdot 2^9\cdot 10^{6057} = 10^{603}\cdot 2^9\cdot 10^{6057} = 512\cdot 10^{6660} >$$
$$> 5\cdot 10^2\cdot 10^{6660} = 5\cdot 10^{6662},$$

ami legalább $6663 > 6057 = 3\cdot 2019$ számjegy.

d) $$2018^{2019} \quad ? \quad 2019^{2018},$$
$$2018 \quad ? \quad \left(\frac{2019}{2018}\right)^{2018} = 2{,}7176\ldots.$$

Tehát 2018^{2019} a nagyobb.

Ratkó Éva
Budapest
(zömmel német érettségi feladatokból válogatva)



C gyakorlat megoldása

C. 1524. *Legyenek N és M pozitív egész számok, továbbá p és q különböző prímszámok. Tegyük fel, hogy $N+M$ ötjegyű, N-nek osztója a p, és osztóinak száma q, ugyanakkor M osztható q-val, és osztóinak száma p. Határozzuk meg N és M lehetséges értékeit.*

Megoldás. Egy szám osztóinak számát úgy határozzuk meg, hogy prímtényezős felbontásában a prímhatványok kitevőinél eggyel nagyobb számokat összeszorozzuk. A mi esetünkben ennek a szorzatnak prímszámnak kell lennie. Ha a prímtényezős felbontásban egynél több prímtényező szerepelne, akkor az osztók száma nem lenne prímszám; tehát mindkét szám prímhatvány.

Ebből következik, hogy ha az N számnak q darab osztója van, akkor a hatványkitevője $(q-1)$. Mivel N prímtényezős felbontásában egy prím szerepel és N osztható p-vel, így ez a prímszám a p. Tehát $N=p^{q-1}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $M=q^{p-1}$.

Meg kell vizsgálnunk, hogy az $N+M=p^{q-1}+q^{p-1}$ összeg mikor lesz ötjegyű. Az egyenlet jobb oldalán p és q felcserélésével ugyanazt az eredményt kapjuk, így az egyszerűség kedvéért egyelőre tételezzük fel, hogy $p\leqslant q$. Ha p^{q-1} legalább hatjegyű, akkor a $p^{q-1}+q^{p-1}$ összeg is az. Mivel 2^{18}, 3^{12}, 5^{10}, illetve 7^6 legalább hatjegyű, ezért csak az alábbi 13 esetet kellett megvizsgálnunk (a táblázat belsejében a megfelelő $p^{q-1}+q^{p-1}$ értékek állnak).

$p \backslash q$	2	3	5	7	11	13	17
2	4	7	21	71	1035	4109	**65 553**
3		18	106	778	**59 170**		
5			1250	**18 026**			

Ezekben az esetekben N és M lehetséges értékei (figyelembe véve, hogy felcserélhetőek).

p	q	N	M
2	17	65 536	17
17	2	17	65 536
3	11	59 049	121
11	3	121	59 049
5	7	15 625	2401
7	5	2401	15 625

Varga Ákos (Kecskemét, Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A javítás során sajnos viszonylag kevés maximális értékű megoldás született. Sokan figyelmetlenségből nem a feladat kérdésére válaszoltak, hanem csak a prímeket adták meg, az N és M számokat nem. Szintén sokan voltak, akik hat helyett csak három megoldást adtak meg, és nem vették észre, hogy N és M felcserélhető. Sokan voltak azok is, akik nem indokoltak kellően részletesen, és emiatt vesztettek pontot (általában vagy N és M p-vel és q-val felírását nem vezették le, vagy a prímek kiválasztásánál csak felírták a jókat, megmutatták, hogy azok tényleg jók, de nem indokolták, hogy más megoldások nem lehetnek). Aki egyáltalán nem indokolt, csak végeredményt közölt, az 0 pontot kapott, mivel a versenykiírás szerint pusztán az eredményközlésre nem adható pont. Emellett persze voltak szép megoldások is.

50 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 15 versenyző: Ajtai Boglárka, Debreczeni Tibor, Hordós Adél Zita, Jankovits András, Kis Károly, Mészáros Márton, Molnár István, Nyitrai Boglárka, Pipis Panna, Rozgonyi Gergely, Sal Dávid, Sebe Anna, Székelyhidi Klára, Tóth Benedek, Varga Ákos. 4 pontos 9, 3 pontos 13, 2 pontos 1, 1 pontos 4, 0 pontos 5 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4947. *Igazoljuk, hogy egy kockát a keletkező darabok egybevágóságától eltekintve egyféleképpen lehet pontosan öt darab tetraéderre darabolni.*

(*6 pont*)

Megoldás. Legyen a kocka $ABCDA'B'C'D'$, aminek $ABCD$ és $A'B'C'D'$ két párhuzamos lapja, továbbá az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy térfogata egységnyi. Tegyük fel továbbá, hogy a kockát a Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 és Δ_5 tetraéderekre daraboltuk. Az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyzetlapokat a tetraéderek háromszöglapjai lefedik, emiatt mindkettőre legalább két-két lap illeszkedik, továbbá mivel $ABCD$ és $A'B'C'D'$ párhuzamosak, így bármely tetraédernek legfeljebb az egyikre illeszkedhet lapja. Következésképpen két eset lehetséges: az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ egyikét pontosan kettő, másikát pontosan három háromszöglap fedi, vagy mindkettőt pontosan kettő háromszöglap fedi.

Tegyük fel, hogy Δ_1 és Δ_2 egy-egy lapja együttesen lefedi $ABCD$-t. Nevezzük ezeket az $ABCD$-re illeszkedő lapokat rendre L_1-nek és L_2-nek, az ezekhez tartozó magasságokat pedig rendre m_1-nek és m_2-nek. Világos, hogy L_1 és L_2 területeinek összegére $T(L_1)+T(L_2)=1$, valamint $m_1 \leqslant 1$ és $m_2 \leqslant 1$ teljesül. Ebből megbecsülhetjük térfogataik összegét:

$$V(\Delta_1)+V(\Delta_2)=\frac{T(L_1)m_1+T(L_2)m_2}{3} \leqslant \frac{T(L_1)+T(L_2)}{3}=\frac{1}{3}.$$

Teljesen hasonlóan megmutatható, hogy ha három tetraéder lapjai fedik $ABCD$-t, akkor a három tetraéder térfogatának összege szintén legfeljebb $\frac{1}{3}$, és ugyanezen megállapítások érvényesek az $A'B'C'D'$ lapra is.

Ezen térfogatbecslések alapján nem fordulhat elő az az eset, amikor az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ egyikét pontosan kettő, másikát pontosan három háromszöglap fedi, hiszen ekkor az öt tetraéder térfogatának összege legfeljebb $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}<1$ lenne. Vagyis (esetleges átindexelés után) feltehetjük, hogy Δ_1 és Δ_2 lapjai együttesen lefedik $ABCD$-t, és Δ_3 és Δ_4 lapjai együttesen lefedik $A'B'C'D'$-t. Ismét a térfogatbecslések miatt

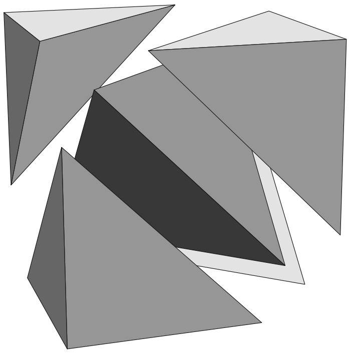
$$V(\Delta_1)+V(\Delta_2)\leqslant\frac{1}{3} \quad \text{és} \quad V(\Delta_3)+V(\Delta_4)\leqslant\frac{1}{3},$$

így viszont $V(\Delta_5)\geqslant\frac{1}{3}$.

Világos, hogy $ABCD$ és $A'B'C'D'$ helyett bármely párhuzamos lappárra működik az érvelésünk, azaz bármely négyzetlapját a kockának pontosan két tetraéder egy-egy háromszöglapja fedi. Továbbá ha feltesszük, hogy valamely lap fedésében Δ_5 is részt vesz, mondjuk Δ_i párjaként, akkor a térfogatbecslés miatt $V(\Delta_5)+V(\Delta_i)\leqslant\frac{1}{3}$, ami ellentmond $V(\Delta_5)\geqslant\frac{1}{3}$ következtetésünknek. Kaptuk tehát, hogy Δ_5-nek nincs közös lapsíkja a kockával, a Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 tetraéderek mindegyikének pedig pontosan három (mindenhárom párhuzamos lappárból egy-egy).

Vizsgáljuk most Δ_1-et. Egy négyzetet pontosan két háromszögre csak egy átlójával vághatunk, ebből következően Δ_1-nek a kocka lapjaira illeszkedő három lapja egy-egy egységnyi befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög. Mivel ezeknek a lapoknak páronként van egy-egy közös élük, így Δ_1 szükségképpen egy „saroktetraéder”, azaz egy olyan tetraéder, amelynek négy csúcsa a kocka egy csúcsából kiinduló három élének négy végpontja. Ugyanezen érvelés helyes Δ_2, Δ_3 és Δ_4 esetén is.

Végül világos, hogy Δ_5-nek Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 mindegyikével egy-egy $\sqrt{2}$ oldalhosszúságú szabályos háromszög a közös lapja, vagyis Δ_5 egy $\sqrt{2}$ élhosszúságú szabályos tetraéder.



Jól ismert és az *ábra* alapján könnyen látható, hogy egy kocka valóban felbontható 5 tetraéderre. Ezzel az állítást beláttuk.

29 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 13 versenyző: Beke Csongor, Dobák Dániel, Fitos Bence, Füredi Erik Benjámin, Gáspár Attila, Hegedűs Dániel, Kerekes Anna, Nagy Nándor, Schrettner Jakab, Shuborno Das, Szabó Dávid, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 5 pontos 7, 4 pontos 4, 3 pontos 1, 2 pontos 3, 1 pontos 1 dolgozat.

B. 4963. *Egy háromszög hozzáírt körei legnagyobbikának sugara legyen r_a, a köré írt kör sugara pedig R. Igazoljuk, hogy $r_a \geqslant \frac{3}{2}R$.*

(*5 pont*) *Erdős Pál* (1913–1996) feladata

I. megoldás. A legnagyobb sugarú hozzáírt kör a leghosszabb oldalhoz tartozik. Feltehetjük, hogy $a \geqslant b \geqslant c$. A háromszögre vonatkozó ismert összefüggések (s a háromszög félkerülete):

$$r_a = \frac{T}{s-a} = \frac{2T}{b+c-a}, \qquad R = \frac{abc}{4T}.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség ezek alapján:

$$\frac{2T}{b+c-a} \geqslant \frac{3abc}{8T}.$$

Átszorzás után a $16T^2$ helyére a Heron-képlet alapján beírhatjuk, hogy

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

A háromszög-egyenlőtlenség szerint $b+c>a$, azaz $b+c-a$ pozitív, így egyszerűsíthetünk vele. Így a bizonyítandó állítás:

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c) \geqslant 3abc.$$

(Itt is látható, hogy ez az állítás szimmetrikus a b és c változókra, tehát $b \geqslant c$ valóban feltehető.)

Most helyettesítsük az oldalakat a bizonyítandó egyenlőtlenségben a beírt kör által levágott érintőszakaszokkal, vagyis legyen $s-a=x, s-b=y$ és $s-c=z$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt ezek mind pozitívak. Feltettük, hogy $a \geqslant b \geqslant c$, ennek megfelelően $z \geqslant y \geqslant x$ is igaz. A helyettesítés után:

$$2(x+y+z)\cdot 2y \cdot 2z \geqslant 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

A zárójelek fölbontása és a kifejezések összevonása után:

$$2xyz + 5y^2z + 5yz^2 \geqslant 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2x + 3zx^2.$$

Felírhatunk több egyenlőtlenséget, amelyek a $z \geqslant y \geqslant x$ feltételből azonnal következnek:

$$2xyz \geqslant 2xy^2,$$

$$3yz^2 \geqslant 3xz^2,$$

$$3y^2z \geqslant 3x^2z,$$

$$y^2z \geqslant xy^2,$$

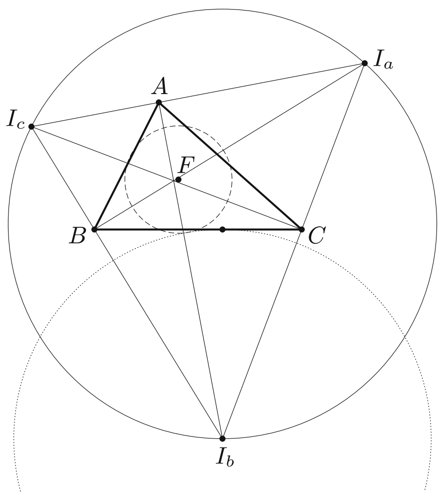
$$y^2z \geqslant x^2y,$$

$$2yz^2 \geqslant 2x^2y.$$

Ezeket összeadva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk, és mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti is igaz. Egyenlőség csakis úgy teljesülhet, ha $x = y = z$, vagyis a háromszög szabályos.

Tubak Dániel (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Jelölje szokásosan a, b, c az oldalakat, s a félkerületet, R a köréírt kör sugarát, továbbá r_a, r_b, r_c a kozzáírt körök sugarait, F a Feuerbach-kör középpontját, O a köréírt kör középpontját, I_a, I_b, I_c pedig a hozzáírt körök középpontjait.



$FI_a = \frac{R}{2} + r_a$, hiszen a Feuerbach-kör sugara $\frac{R}{2}$, továbbá a Feuerbach-kör érinti a hozzáírt köröket. Ezért hasonlóan $FI_b = \frac{R}{2} + r_b, FI_c = \frac{R}{2} + r_c$.

Rövid számolással belátható, hogy a hozzáírt körök középpontjaiból álló háromszög szögei $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$ (ahol α, β, γ a háromszög szögei), így ez a háromszög hegyesszögű. A hozzááírt körök középpontjaiból rajzolt háromszög magasságainak talppontjai A, B, C, így e háromszög Feuerbach-köre éppen az ABC háromszög köréírt köre, melynek sugara R – vagyis az $I_aI_bI_c$ háromszög köréírt körének sugara $2R$. Legyen ennek a körnek a középpontja G. A G az $I_aI_bI_c$ háromszögön belül van, hiszen ez a háromszög hegyesszögű. A síkon ez az egyetlen pont, amely az I_a, I_b, I_c pontok mindegyikétől legfeljebb $2R$ távolságra van, ugyanis ha vennénk az I_a, I_b és I_c középpontú $2R$ sugarú köröket, akkor azoknak még további közös pontja is lenne, de mivel a körvonalaik G-ben közösen metszik egymást és a köréírt kör középpontja egyértelmű (nincs a körvonalaknak még egy közös metszéspontja), ezért G az egyetlen ilyen pont.

Így van olyan körközéppont, mondjuk I_a úgy, hogy $FI_a > 2R$, azaz

$$\frac{R}{2} + r_a \geqslant 2R \quad \Leftrightarrow \quad r_a \geqslant \frac{3}{2}R.$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha F és G egybeesik. Az I_a, I_b és I_c középpontú hozzáírt körök sugarai általában különbözőek. A G pont az $I_aI_bI_c$ háromszög körülírt körének középpontja, az eredeti F középpontú Feuerbach-kör pedig mindhárom hozzáírt kört kívülről érinti. Az F és G pontok tehát akkor eshetnek egybe, ha az F pont is egyenlő távolságra van mindegyik hozzáírt kör középpontjától, tehát a három kör sugara egyenlő, vagyis az eredeti háromszög szabályos.

Kerekes Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 40 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 21, 4 pontot 8 versenyző. 3 pontos 5, 2 pontos 2, 1 pontos 4 tanuló dolgozata.

B. 4964. *Igaz-e, hogy ha az $f,g:\mathbb{R}\to[0,1]$ függvények periodikusak, és az $f+g$ függvény is periodikus, akkor van közös periódusuk?*

(*6 pont*)

Megoldás. Nem igaz az állítás.

Fel fogjuk használni azt a könnyen belátható állítást, miszerint ha egy x valós szám felírható $q_1+q_2\sqrt{2}$, vagy $q_1\sqrt{2}+q_2\sqrt{3}$, vagy $q_1\sqrt{3}+q_2$ alakban, ahol $q_1,q_2\in\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát jelöli), akkor ez a felírás egyértelmű. Például, ha $q_1\sqrt{2}+q_2\sqrt{3}=r_1\sqrt{2}+r_2\sqrt{3}$ (ahol $q_i,r_j\in\mathbb{Q}$), akkor $(q_1-r_1)\sqrt{2}=(r_2-q_2)\sqrt{3}$. Itt q_1-r_1 pontosan akkor nulla, ha r_2-q_2 az. Ha $r_2-q_2\neq 0$, akkor $\frac{q_1-r_1}{r_2-q_2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$, ami ellentmondás.

A valós számok tetszőleges H részhalmazára jelölje $C(H)$ a következő függvényt:

$$C(H)(x)=\begin{cases}\frac{1}{7}, & \text{ha } \ x\in H;\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Az α valós számra legyen

$$H\alpha=\{h\alpha \mid h\in H\},$$

továbbá a H_1 és H_2 halmazok összegét jelölje

$$H_1+H_2=\bigl\{h_1+h_2 \mid h_j\in H_j\ (j=1,2)\bigr\}.$$

Legyen ezután

$$f=C\bigl(\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}\,\bigr)+C\bigl(\mathbb{Q}\sqrt{2}+\mathbb{Q}\sqrt{3}\,\bigr)$$

és

$$g=3C\bigl(\mathbb{Q}\sqrt{3}+\mathbb{Q}\bigr)-C\bigl(\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}\,\bigr)+\frac{2}{7}.$$

Ekkor

$$h = f + g = C\big(\mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3}\,\big) + 3C\big(\mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}\big) + \frac{2}{7}.$$

Könnyen látható, hogy minden $q\sqrt{2}$ ($q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$) periódusa f-nek. Továbbá f pontosan a $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ halmaz elemeinél (a két halmaz metszetén) vesz fel $\frac{2}{7}$ függvényértéket, azaz minden p periódusra és $q \in \mathbb{Q}$ számra mivel $f\big(q\sqrt{2}+p\big) = f\big(q\sqrt{2}\,\big) = \frac{2}{7}$, így $q\sqrt{2}+p$-nek szintén $q'\sqrt{2}$ ($q' \in \mathbb{Q}$) alakúnak kell lennie, azaz szükségszerűen p is ilyen alakú. Vagyis f periódusainak halmaza $\mathbb{Q}\sqrt{2} \setminus \{0\}$.

Hasonlóan látható g-nél – a $\frac{4}{7}$ függvényérték vizsgálatából –, hogy g periódusainak halmaza $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, h-nál pedig a $\frac{6}{7}$ függvényértékéből, hogy h periódusainak halmaza $\mathbb{Q}\sqrt{3} \setminus \{0\}$.

Tehát f, g és h periodikus, ám f-nek és g-nek nincsen közös periódusa.

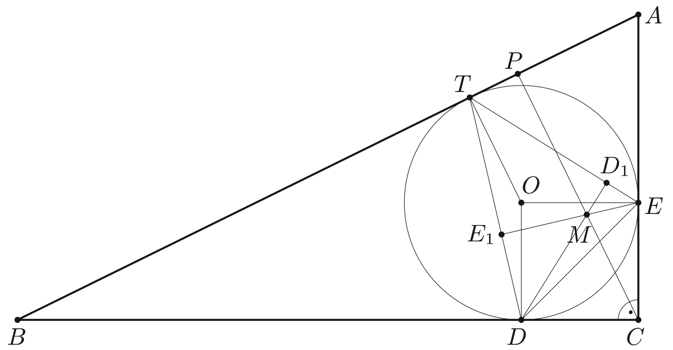
Pituk Gábor (Veszprém, Lovassy László Gimn., 11. évf.)

23 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 9 versenyző: Dobák Dániel, Döbröntei Dávid Bence, Gáspár Attila, Kerekes Anna, Nagy Nándor, Pituk Gábor, Schifferer András, Schrettner Jakab, Weisz Máté. 5 pontos 1, 4 pontos 2, 1 pontos 4, 0 pontos 5 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.

B. 4977. *Bizonyítsuk be, hogy egy derékszögű háromszög beírt körének érintési pontjai által meghatározott háromszög magasságpontja a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságvonalára illeszkedik.*

(*4 pont*) (*Kvant*)

I. megoldás. Legyen a háromszög három csúcsa A, B és C, melyek közül C a derékszögű csúcs, és jelölje a B-nél lévő szöget β, az A-nál lévő szög ekkor $\alpha = 90° - \beta$. Legyenek beírt kör érintési pontjai az AB, AC, BC oldalakon T, E, D, a TDE háromszög magasságpontja M, és a beírt kör középpontja O. Ekkor $OECD$ egy négyzet. Legyen E_1 és D_1 az ETD háromszög E-ből, illetve D-ből induló magasságának talppontja.



1. ábra

Végül legyen P az ABC háromszög C-hez tartozó magasságtalppontja, M_D a PC és DM egyenes metszéspontja, M_E pedig a PC és EM egyenes metszéspontja.

Végezzünk szögszámítást.

$$EDM\sphericalangle = EDD_1\sphericalangle = 90^\circ - D_1ED\sphericalangle = 90^\circ - TED\sphericalangle.$$

A középponti és kerületi szögek tételéből

$$EDM\sphericalangle = 90^\circ - \frac{TOD\sphericalangle}{2}.$$

Mivel $ODB\sphericalangle = OTB\sphericalangle = 90^\circ$, ezért $OTBD$ húrnégyszög, így

$$EDM_D\sphericalangle = EDM\sphericalangle = 90^\circ - \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Hasonló módon

$$DEM\sphericalangle = DEE_1\sphericalangle = 90^\circ - EDE_1\sphericalangle = 90^\circ - EDT\sphericalangle = 90^\circ - \frac{EOT\sphericalangle}{2},$$

$OEA\sphericalangle = OTA\sphericalangle = 90^\circ$, $OTAE$ húrnégyszög, és

$$DEM_E\sphericalangle = DEM\sphericalangle = 90^\circ - \frac{180^\circ - (90^\circ - \beta)}{2} = 45^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Ismert továbbá, hogy $ACP\sphericalangle = \beta$, $PCB\sphericalangle = 90^\circ - \beta$, és $CAP\sphericalangle = 90^\circ - \beta$. Ezekből következik, hogy $ECM_E\sphericalangle = \beta$ és $DCM_D\sphericalangle = 90^\circ - \beta$.

Mivel $OECD$ négyzet, így $CED\sphericalangle = CDE\sphericalangle = 45^\circ$, vagyis

$$CEM_E\sphericalangle = CED\sphericalangle + DEM_E\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \quad \text{és}$$

$$CDM_D\sphericalangle = CDE\sphericalangle + EDM_D\sphericalangle = 45^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Mivel $ECM_E\sphericalangle = ACP\sphericalangle = \beta$ és $CEM_E\sphericalangle = 90^\circ - \beta/2$, ezért

$$EM_EC\sphericalangle = 180^\circ - \beta - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

vagyis az ECM_E háromszög egyenlő szárú, $EC = CM_E$.

Mivel $DCM_D\sphericalangle = PCB\sphericalangle = 90^\circ - \beta$ és $CDM_D\sphericalangle = 45^\circ + \beta/2$, ezért

$$DM_DC\sphericalangle = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\beta}{2},$$

vagyis DCM_D háromszög egyenlő szárú, $DC = CM_D$.

Mivel $OECD$ négyzet, így $EC = DC$, vagyis $CM_E = CM_D$, tehát $M_E \equiv \equiv M_D \equiv M$, tehát M rajta van a derékszögű csúcshoz tartozó magasságvonalon.

Az egyetlen kritikus pont a bizonyításban annak feltételezése, hogy a TED háromszög hegyesszögű (ebből következik, hogy M a háromszög belsejében van és az ábrán megfelelően állnak a szögek). A fentiek alapján

$$TED\sphericalangle = \frac{TOD\sphericalangle}{2} = \frac{180° - \beta}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}.$$

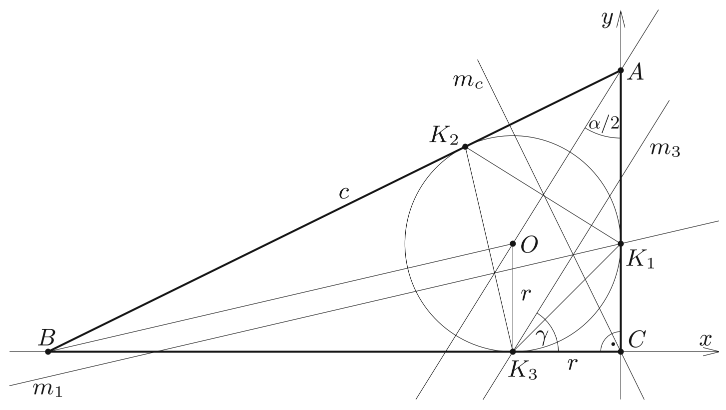
Mivel β 0° és 90° közt van, így ez hegyesszög.

$$EDT\sphericalangle = \frac{EOT\sphericalangle}{2} = \frac{180° - (90° - \beta)}{2} = 45° + \frac{\beta}{2}.$$

Mivel β 0° és 90° közt van, így ez hegyesszög. $ETD\sphericalangle = 180° - TED\sphericalangle - EDT\sphericalangle = = 45°$. Ezek alapján a TED háromszög valóban hegyesszögű.

Zsigri Bálint (Budapest XIV. Ker. Szent István Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordinátarendszerben a *2. ábrán* látható módon. A derékszögű háromszög beírt körének érintési pontjait jelölje K_1, K_2 és K_3. A K_1-hez és K_3-hoz tartozó magasságvonalak legyenek m_1 és m_3, a c oldalhoz tartozó pedig m_c. Felírva ezen magasságvonalak egyenleteit könnyen ellenőrizhetjük, hogy valóban egy pontban metszik-e egymást. Legyen $BAC\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$ és jelölje γ az ábrán berajzolt szöget.



2. ábra

Mivel m_3 és az AO szögfelező is merőleges K_1K_2-re, ezért párhuzamosak egymással. Az OK_3CK_1 négyszög egy r oldalú négyzet, ezért m_3 a $-r$ koordinátánál metszi az x tengelyt, így egyenlete $y = \operatorname{tg}\gamma \cdot x + \operatorname{tg}\gamma \cdot r$. Hasonlóan belátható, hogy m_1 párhuzamos BO-val és az y tengelyt r-nél metszi. Az egyenlete $y = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot x + r$. Az m_c magasság egyenes merőleges a c oldalra és az origón megy keresztül, ezért az egyenletét könnyen megkaphatjuk: $y = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot x$.

Az AO szögfelező és m_3 párhuzamosságából következik, hogy γ az $\frac{\alpha}{2}$ pótszöge. Felhasználva, hogy $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$, ebből $\gamma=\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$ adódik. A félszögek tangensére vonatkozó azonosságot felhasználva $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$, valamint

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\beta}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}=\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}.$$

Összegezve:

$$m_3 \text{ egyenlete: } y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot r=(x+r)\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta},$$

$$m_1 \text{ egyenlete: } y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot x+r=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}\cdot x+r,$$

$$m_c \text{ egyenlete: } y=-\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}x=-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}x.$$

Az m_1 és az m_3 egyenes biztosan metszik egymást, méghozzá abban az x koordinátájú pontban, amelyre

$$(x+r)\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}x+r.$$

Ebből

$$x\left(\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}\right)=r\left(1-\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}\right),$$

$$x=r\cdot\frac{1-\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}}{\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}}=r\cdot\frac{\frac{1-\sin\beta-\cos\beta}{1-\sin\beta}}{\frac{\cos\beta(1+\cos\beta)-\sin\beta(1-\sin\beta)}{(1-\sin\beta)(1+\cos\beta)}}=$$

$$=r\cdot\frac{(1-\sin\beta-\cos\beta)(1+\cos\beta)}{\cos\beta+\cos^2\beta-\sin\beta+\sin^2\beta}=$$

$$=r\cdot\frac{1-\sin\beta-\cos\beta+\cos\beta-\sin\beta\cos\beta-\cos^2\beta}{\cos\beta-\sin\beta+1}=$$

$$=\frac{\sin\beta(\cos\beta-\sin\beta+1)}{\cos\beta-\sin\beta+1}=-r\cdot\sin\beta.$$

Behelyettesítve ezt az x értéket m_c és m_3 egyenletébe:

$$m_c:-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}(-\sin\beta\cdot r)=\cos\beta\cdot r,$$

$$m_3:(-\sin\beta\cdot r+r)\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}=\cos\beta\cdot r.$$

Tehát valóban egy pontban metszik egymást.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Jelölje K_1, K_2 és K_3 az ABC háromszögbe írt kör érintési pontjait az oldalakon a 2. ábra szerint, és legyen a $K_1K_2K_3$ háromszög magasságpontja M.

Külső pontból körhöz húzott érintők hossza egyenlő, tehát $CK_1 = CK_3$. Továbbá az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre: $OK_1C\sphericalangle = OK_3C\sphericalangle = 90°$. Mindezekből következik, hogy az OK_3CK_1 négyszög négyzet.

Legyen O az origo, valamint mutasson minden pontba azonos nevű helyvektor ($\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \ldots$).

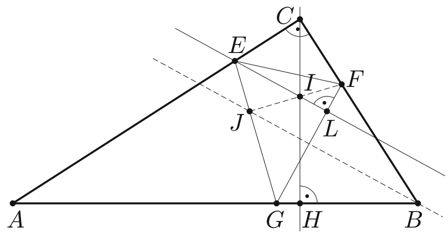
Ismert, hogy a háromszög köréírt körének O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege az O-ból a magasságpontba mutató vektor. Mivel most O a $K_1K_2K_3\triangle$ köré írt körének középpontja, ezért O-ból e háromszög M magasságpontjába az $\mathbf{m} = \mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} + \mathbf{k_3}$ vektor mutat.

OK_3CK_1 négyzet, ezért egyben paralelogramma is: $\mathbf{c} = \mathbf{k_1} + \mathbf{k_3}$. Ebből $\overrightarrow{CM} = \mathbf{m} - \mathbf{c} = (\mathbf{k_1} + \mathbf{k_3} + \mathbf{k_2}) - (\mathbf{k_1} + \mathbf{k_3}) = \mathbf{k_2} = \overrightarrow{OK_2}$.

Tudjuk, hogy $OK_2 \perp AB$, ezért a fentiekből következik, hogy $CM \perp AB$, és így M rajta van a C-ből induló magasságvonalon.

Csertán András (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 12. évf.)

IV. megoldás. Az ABC háromszögbe írt kör érintési pontjai által meghatározott háromszög legyen EFG, és jelölje I az EL és CH egyenesek metszéspontját (*3. ábra*).



3. ábra

Mivel GF merőleges a $CBH\sphericalangle$ szögfelezőjére és merőleges EL-re, ezért EL párhuzamos a szögfelezővel. Legyen $\alpha = CAB\sphericalangle$ és $\beta = CBA\sphericalangle$, ekkor

$$BCH\sphericalangle = \alpha \quad \text{és} \quad ACH\sphericalangle = \beta, \quad HBC_\triangle \sim HCA_\triangle.$$

Tehát a HBC háromszöget el tudjuk forgatni H körül 90 fokkal, majd H pont körüli nagyítást alkalmazhatunk úgy, hogy a B pont a C pontba, a C pont pedig az A pontba kerüljön. Ekkor a HAC háromszöget fogjuk kapni, tehát EL merőleges az $ACH\sphericalangle$ szögfelezőjére (mert 90 fokkal forgattunk és AHC és CHB hasonlók). Ebből következik, hogy $CE = CI$. Hasonlóan belátható, hogy FJ merőleges a $BCH\sphericalangle$ szögfelezőjére. Mivel $CE = CF$ (körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők), ezért $CF = CI$ is teljesül. Emiatt a $BCH\sphericalangle$ szögfelezője merőleges FI-re, vagyis F, I és J egy egyenesre esnek. Tehát FJ és CH metszéspontja is az I pont, azaz EFG magasságpontja az ABC háromszög C-hez tartozó magasságán fekszik.

Bukva Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

69 dolgozat érkezett. 4 pontos 50, 3 pontos 5, 2 pontos 4, 1 pontos 4, 0 pontos 6 dolgozat.

B. 4986. *Jelölje* KP *azt a* 64 *térbeli pontot, amelyeknek mindhárom koordinátája* 1, 2, 3 *vagy* 4. *Kata és Péter térbeli amőbát játszanak a* KP *pontjain. Kata kezdi a játékot, kiválaszt egy tetszés szerinti pontot* KP*-ből, és azt kékre színezi. A második lépésben Péter választ egy, az előzőtől különböző pontot, és azt pirosra színezi. Ezután felváltva színeznek kékre, illetve pirosra egy korábban még színezetlen* KP*-beli pontot. Az győz, aki először színez a saját színére négy, egy egyenesre illeszkedő pontot. Mutassuk meg, hogy Katának mindegy, hogy az első lépésben az* $(1,1,2)$ *vagy a* $(2,2,1)$ *pontot színezi kékre.*

(*5 pont*) Javasolta: *Benkő Dávid* (South Alabama)

Megoldás. Megadjuk a KP halmaz olyan, önmagára történő kölcsönösen egyértelmű leképezését, ami egyenestartó, azaz bármely négy, egy egyenesbe eső pont képe is egy egyenesbe esik (és akkor megfordítva is, mivel az egy egyenesbe eső pontnégyesek száma véges). Legyen ez a hozzárendelés a következő: az (x,y,z) koordinátájú pont képét jelölje $\big(f(x), f(y), f(z)\big)$, ahol f a következő függvény:

$$1 \mapsto 2 \quad 2 \mapsto 1 \quad 3 \mapsto 4 \quad 4 \mapsto 3.$$

Az f függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért KP általa nyert leképezése is az.

Az A, B, C, D pontok ebben a sorrendben pontosan akkor esnek egy egyenesbe, ha mindegyik koordinátájuk számtani sorozatot alkot ebben a sorrendben. (Ekkor azt mondjuk, hogy az A, B, C, D pontok ebben a sorrendben esnek egy egyenesbe.) Egy ilyen számtani sorozat vagy négyszer ugyanaz a szám, vagy az $(1\ 2\ 3\ 4)$, vagy pedig a $(4\ 3\ 2\ 1)$ sorozat. Ha $(x\ y\ z\ t)$ ezek bármelyike, akkor e számok f-nél vett képei az $\big(f(y)\ f(x)\ f(t)\ f(z)\big)$ sorrendben alkotnak számtani sorozatot. Ebből következik, hogy ha az A, B, C, D pontok ebben a sorrendben esnek egy egyenesbe, akkor A', B', C', D' képeik a B', A', D', C' sorrendben esnek egy egyenesbe. Végül, mivel KP megadott leképezésénél az $(1\ 1\ 2)$ pont képe $(2\ 2\ 1)$, e két pontnak ugyanaz a szerepe a játékban, tehát mindegy, hogy Kata melyiküket jelöli be elsőként.

Nagy Nándor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) megoldása alapján

44 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 14 versenyző: Beke Csongor, Csaplár Viktor, Dobák Dániel, Fleiner Zsigmond, Füredi Erik Benjámin, Hámori Janka, Hegedűs Dániel, Kerekes Anna, Nagy Nándor, Szabó Dávid, Szabó Kornél, Terjék András József, Tóth Ábel, Várkonyi Zsombor, Zsigri Bálint. 4 pontos 6, 1 pontos 3, 0 pontos 20 dolgozat.

B. 4994. *Bizonyítsuk be, hogy ha* A, B *és* C *olyan valós számok, amelyekre az* $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ *paraméteres harmadfokú egyenletnek három különböző pozitív gyöke van, akkor* $A^2+B^2+18C>0$.

(*4 pont*) (*Német feladat*)

I. megoldás. Jelölje a harmadfokú polinomot $p(x)$, aminek a pozitív gyökei a, b és c. Ekkor $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$, így $A=-(a+b+c)$, $B=(ab+bc+ca)$, $C=-abc$, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség $A^2+B^2+18C=(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2-18abc>0$. Adjunk hozzá mindkét oldalhoz $18abc$-t, és hajtsuk végre a bal oldalon kijelölt műveleteket. Így a bizonyítandóval ekvivalens

$$a^2+b^2+c^2+ab+ab+bc+bc+ca+ca+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+a^2bc+$$
$$+ab^2c+ab^2c+abc^2+abc^2>18abc$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami a 18 változós számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt igaz (hiszen a gyökök pozitívak), és a bal oldal szigorúan nagyobb, hiszen a gyökök nem esnek egybe a feltétel alapján.

Csiszár Zoltán (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. A bizonyítandó

$$S=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+$$
$$+2ab^2c+2abc^2-18abc>0$$

egyenlőtlenség bal oldala a következőképpen alakítható:

$$\begin{aligned}S&=(a^2-2abc+b^2c^2)+(b^2-2abc+a^2c^2)+(c^2-2abc+a^2b^2)+\\&\quad+2ab(c^2-2c+1)+2ac(b^2-2b+1)+2bc(a^2-2a+1)=\\&=(a-bc)^2+(b-ac)^2+(c-ab)^2+2ab(c-1)^2+2ac(b-1)^2+2bc(a-1)^2,\end{aligned}$$

ami nyilván pozitív.

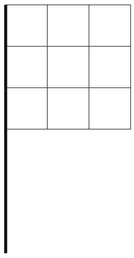
Hámori Janka (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.)

69 dolgozat érkezett. 4 pontos 52, 3 pontos 10, 2 pontos 3, 1 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (619–623.)

K. 619. Legfeljebb hány prímet lehet megadni úgy, hogy közülük bármely három összege is prím legyen?

K. 620. Öt pozitív egész szám összege 20. Az öt szám páronként vett különbségeinek abszolút értéke: 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10. Adjuk meg az összes ilyen számötöst.



K. 621. Egy kilenc fős matekszakkörön az *ábrán* látható 3×3-as osztású négyzet alakú zászlót terveznek. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat festik fel a kilenc tartományba úgy, hogy mindegyik oszlopban, sorban és átlóban a számok összege osztható legyen 3-mal. Hányféle különböző zászlót készíthetnek?

K. 622. A QUARTO játék 16 figurájának mindegyike különbözik valamiben a többitől. A figurák négy szempont alapján is két egyforma csoportra oszthatók:

– magas vagy alacsony;

– sötét vagy világos;

– kerek vagy szögletes;

– a teteje lyukas vagy sima.

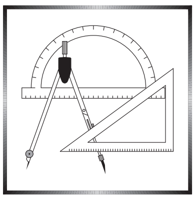
El lehet-e helyezni a 16 figurát egy kör mentén úgy, hogy a szomszédosok pontosan két tulajdonságban egyezzenek meg?

K. 623. Az $ABCD$ egy négyzet alakú papírlap, melynek felénk eső fele piros, a hátulja pedig fehér. Az AC átlójának A-hoz közelebbi harmadolópontja E, C-hez közelebbi harmadolópontja F. A papírlapot az AC-re merőleges egyenesek mentén kettéhajtjuk úgy, hogy mindig hátulról előrefelé hajtunk (tehát a papír túloldala kerül felülre). Az első hajtás során az A pont az F-re kerül, a második hajtás során a C pont az E-re. A papír felénk eső látható részén mekkora a piros és a fehér területek aránya a kétszer összehajtott papírlapon?

❄

Beküldési határidő: 2019. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1532–1538.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1532. Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c pozitív számokra

$$a + b + c \geqslant \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac},$$

akkor közülük valamelyik szám legalább 1.

C. 1533. Egy derékszögű háromszög kerülete k, egyik befogója b, a vele szemközti szög pedig β. Tekintsük azt a háromszöget, amelynek 45°-os szögének szárain levő oldalainak hossza k és $b \cdot \sqrt{2}$. Határozzuk meg a legkisebb szögét.

Feladatok mindenkinek

C. 1534. Oldjuk meg az $5x^2 + y^2 - 4xy + 24 \leqslant 10x - 1$ egyenlőtlenséget a valós számpárok halmazán.

C. 1535. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszög területét mindkét átlója felezi, akkor ez a négyszög paralelogramma.

C. 1536. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$xy = x + y + 5,$$
$$x^2 + y^2 = 5.$$

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1537. A 6 egység sugarú k_1 kör és a 3 egység sugarú k_2 kör kívülről érintik egymást, valamint belülről érintik a 9 egység sugarú k kört. A k_1 és k_2 egyik közös külső érintője a k kört a P és Q pontokban metszi. Határozzuk meg a PQ szakasz hosszát.

(*Horvát feladat*)

C. 1538. Az Iker Asztalitenisz Klub edzésére egyik nap hat ikerpár ment el. Az edzők szerették volna, ha a próbameccseket úgy játszanák, hogy semelyik ikerpár két tagja ne játsszon egy asztalnál.

a) Hányféleképpen lehet beosztani a gyerekeket forgót játszani két különböző asztalhoz?

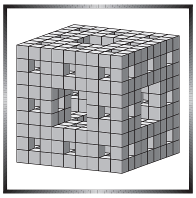
b) Hányféleképpen lehet három különböző asztalhoz, a páros mérkőzésekre négyesével elosztani a sportolókat? (Itt is csak az számít, hogy kik kerülnek egy asztalhoz.)

(*Angol feladat nyomán*)

❄

Beküldési határidő: 2019. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5014–5021.)

B. 5014. A Bergengóc Parlamentben a választások után $50 < n < 100$ képviselő van, mindannyian egyetlen párt, a Kék Párt színeiben. (A Kék Pártnak egyetlen elnöke van.) A házszabály alapján egy parlamenti párt két pártra osztható a következő feltételek szerint:

- A megszűnő párt elnöke nem lehet tagja az utódpártoknak, parlamenti mandátuma megszűnik, és nem választanak helyette új képviselőt (azaz a parlamenti képviselők száma csökken).
- A többi párttag eldöntheti, hogy melyik utódpártnak lesz a tagja.
- Mindkét utódpártnak legalább egy-egy képviselő tagja kell, hogy legyen.
- Mindkét utódpártnak a párt képviselői közül egy-egy pártelnököt kell választania.

Ha legalább egy pártszakadás után minden utódpártnak ugyanannyi tagja van, akkor a parlamentet feloszlatják. Mi legyen az n értéke, hogy ez az eset ne fordulhasson elő?

(*3 pont*)

B. 5015. Három egységsugarú kör átmegy egy közös ponton. Második metszéspontjaik A, B és C. Mekkora az ABC kör sugara?

(*3 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5016. Adott egy $ABCD$ konvex négyszög. Úgy jelöljük ki az AD oldal E_1, a BC oldal F_1, az AC átló E_2 és a BD átló F_2 pontját, hogy

$$AE_1 : E_1D = BF_1 : F_1C = AE_2 : E_2C = BF_2 : F_2D = AB : CD.$$

Tudjuk, hogy semelyik két pont nem esik egybe. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az E_1F_1 és E_2F_2 egyenesek merőlegesek egymásra.

(*4 pont*)

B. 5017. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely teljesíti a következő tulajdonságokat?

(1) $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$ teljesül,

(2) léteznek olyan $a, b > 0$ konstansok, melyekre bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x^2) - \big(f(ax+b)\big)^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

(*4 pont*)

B. 5018. A szultán birodalmának mind az 1024 matematikusát börtönbe záratta. Mindegyikük csak a saját réztalléros érméjét tarthatta meg. A matematikusok tudják, hányan vannak, de semmiféle módon nem képesek kommunikálni egymással.

A szultán a születésnapján nagy kegyesen a következő játékot ajánlotta a matematikusoknak: az udvaron egyenként vagy 0-t, vagy 1-et mondanak. Ha a mondott számok összege 1, akkor szabadon bocsátja őket.

(A matematikusok nem adhatnak jelet egymásnak, nem tudják, hogy őket hányadiknak vitték ki, vagy hogy az előttük az udvaron lévők mit csináltak.)

Mekkora eséllyel szabadulhatnak ki a matematikusok?

(*5 pont*)

B. 5019. Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB+BC=AD+DC$ és $BA+AC=$ $=BD+DC$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $ABCD$ téglalap.

(*6 pont*)

B. 5020. Tükrözzünk egy parabolát a fókuszán átmenő, tengelyével α szöget bezáró egyenesre. Mutassuk meg, hogy a parabola és tükörképe α szögben metszi egymást.

(*5 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5021. Legyen a 3-mal nem osztható n pozitív egész szám 3-mal osztva 1 maradékot adó pozitív osztóinak összege $A(n)$, illetve 3-mal osztva 2 maradékot adó pozitív osztóinak összege $B(n)$. Határozzuk meg azokat az n számokat, melyekre $\left|A(n)-B(n)\right|<\sqrt{n}$.

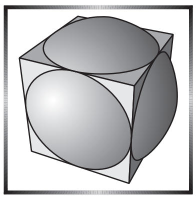
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2019. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (746–748.)



A. 746. Legyen p prímszám. Hány megoldása van az $x^2+y^2+z^2+1\equiv 0$ (mod p) kongruenciának a modulo p maradékosztályok körében?

Javasolta: *Gyenes Zoltán* (Budapest)

A. 747. Egy n csúcsú egyszerű gráfban bármely k csúcsnak páratlan sok közös szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy $n+k$ csak páratlan lehet.

Javasolta: *Imolay András, Matolcsi Dávid, Schweitzer Ádám* és *Szabó Kristóf* (Budapest)

A. 748. Rögzített az Ω kör és belsejében az ω kör. Az egymástól különböző A, B, C, D, E pontok úgy mozognak az Ω kerületén, hogy az AB, BC, CD és DE szakaszok érintik ω-t. Az AB és CD egyenesek a P pontban, a BC és DE egyenesek a Q pontban metszik egymást. Legyen R a BCP és CDQ körök második, C-től különböző metszéspontja. Mutassuk meg, hogy R egy körön vagy egy egyenesen mozog.

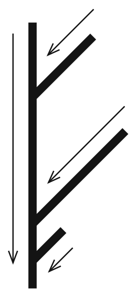
Javasolta: *Carlos Yuzo Shine* (Sao Paolo)

❄

Beküldési határidő: 2019. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok



I. 478. Gyerekkoromban nagymamám padlásán egy furcsa szerkezetet találtam: egy hosszú csövet, amelyhez különböző helyeken ugyanolyan átmérőjű, de különböző hosszúságú csövek csatlakoztak. Senki nem tudta megmondani, hogy mire való, de így is feltaláltuk magunkat, az éppen beleillő labdákat dobáltuk bele a szomszéd gyerekekkel. Azt néztük, hogy milyen sorrendben esnek ki a különböző színű labdák a hosszú cső végén.

A fenti eszköz ihlette ezt a feladatot, de a labdáknak nem a színe a lényeges, hanem az, hogy milyen betűt írunk rá és azt vizsgáljuk, hogy az adott időpontokban bedobott labdák milyen szöveget adnak ki a végén. Az egyszerűség kedvéért a csövek hossza egész szám és a központi csőhöz az alsó végtől egész számnyira csatlakoznak. A központi csőhöz egy ponton csak egy cső csatlakozik. A labdák a csőben egységnyi idő alatt egységnyi utat tesznek meg. A központi csőben haladó labdának elsőbbsége van, azaz az oldalról érkező csak akkor mehet tovább, ha nem akadályozza magasabbról érkező labda. Készítsünk programot, amely a csőrendszer adatainak és a betűk csövekbe kerülési idejének ismeretében megadja a kialakuló feliratot.

A program standard bemenetének első sorában a csatlakozó csövek C száma és a golyók G száma található. A következő C sorban az egyes csövek hossza és a központi csőhöz való csatlakozási pontja (az alsó végétől mért távolság) szerepel, egymástól egy szóközzel elválasztva. Az ezt követő G sorban az angol ábécé egy betűje, a cső sorszáma és a bedobás időpontja (egész szám) található egy-egy szóközzel elválasztva. A kimenet egyetlen sora G darab karaktert tartalmaz: a betűket a megérkezés sorrendjében. A bemenetben a számértékek egyike sem nagyobb 1000-nél.

Példa bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Példa kimenet**
`3 5 / 2 2 / 4 4 / 1 7` `M 2 3 / K 3 3 / L 1 7 / O 3 4 / A 2 4`	`KOMAL`

Beküldendő egy `i478.zip` tömörített állományban a program forráskódja és a működéséhez szükséges egyéb fájlok, továbbá a hozzá kapcsolódó dokumentáció. Utóbbi a problémamegoldás lényeges elemeire világít rá, valamint tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I. 479. A Felvég és az Alvég közötti út lerövidítésére egy vízszintes alagutat fúrtak. A fúrópajzs 5-10 cm pontatlansággal végezte a munkáját. Az útépítőmérnökök az alagútban méterenként megmérték a legalsó és a legfelső pont magasságát a tengerszinthez képest, cm pontossággal. A mérési eredményeket és a tervezett alapszinti magasságot rögzítették a `meresek.txt` tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású állományban. Értékeljük ki az adatokat és segítsük a további munkát táblázatkezelő alkalmazással.

A megoldás során vegyük figyelembe a következőket.

- *Segédszámításokat a* K *oszloptól jobbra végezhetünk, amelyek értelmezését felirattal segítsük elő.*
- *Amennyiben lehetséges, a megoldás során képletet, függvényt, hivatkozást használjunk, hogy az alapadatok módosítása esetén is a kívánt eredményeket kapjuk.*

1. Töltsük be a `meresek.txt` szövegfájlt a táblázatkezelő egy munkalapjára az A1-es cellától kezdődően. Munkánkat `alagut` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. A C oszlop celláiban írassuk ki az alagút magasságát méterenként.
3. Az E2:F2 tartomány celláiban határozzuk meg a teljes alagút legkisebb magasságát és annak első előfordulásának távolságát a bejárattól.

Az alagút belső rendezését több lépésben végzik el:

1. lépés: Először a mennyezet egyenletesebbé tevésével kezdik. Minden magassági értéket a közvetlenül előtte és utána következővel átlagolnak és felfelé kerekítenek centiméteres pontosságra. Ha a kapott átlag nagyobb a felső pont magasságánál, akkor ott a mennyezetet levájják a kiszámított átlagig, különben nem változtatnak. Amit levájtak, az az alagút alján a magasságot növeli.

4. A G oszlop celláiban jelenítsük meg – a lehullott földet még nem figyelembe véve (az majd az alsó szintet emeli az 1. lépés végén) –, hogy a mennyezet levájásával milyen magasságokat kívánnak kialakítani. A megváltozott magasság értékeket – feltételes formázás segítségével – emeljük ki félkövér betűstílussal és piros színnel.

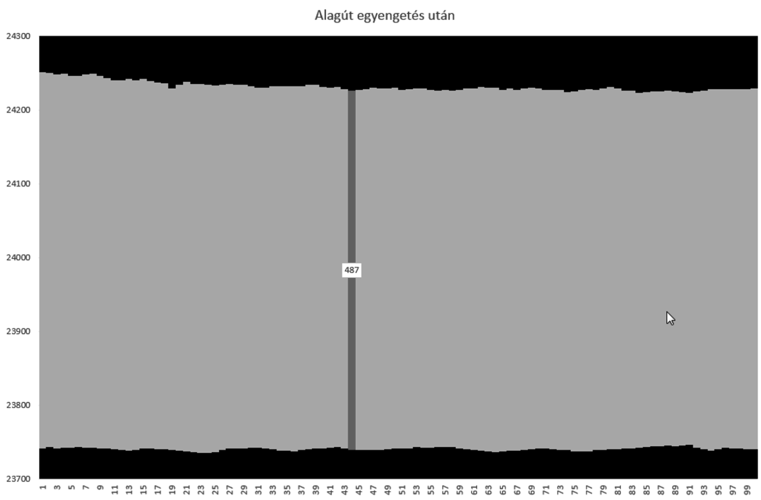
5. A H és az I oszlop celláiban határozzuk meg az alagút alsó és felső szintjének magasságait az 1. lépés után.

2. lépés: Az alsó szint gödreinek és a levájt föld halmainak elterítéséhez egy földgyalut küldenek végig az eredeti irányban az alagúton. A földgyalu a tervezett alapszint feletti felesleget legyalulja, a kitermelt földet maga előtt tolja. A mélyedéseket, ha van elég föld előtte, akkor kitölti. Ha nincs elég eltolt föld, akkor továbbhaladva gödröt hagy.

6. A J oszlop celláiban adjuk meg az alsó mérési pontok magasságát a földgyalu simító munkája után.
7. A minta szerinti cellában jelenítsük meg, hogy a 2. lépés után hány olyan alsó mérési pont maradt, amelynek magassága kisebb, mint a tervezett alapszint.
8. A táblázatot a minta szerint formázzuk.

Minta:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	alsó 0. lépés (cm)	felső 0. lépés (cm)	magasság 0. lépés (cm)	Tervezett alapszint (cm)	Minimális belmagasság (cm)	Helye (m)	magasság 1. lépés (cm)	alsó 1. lépés (cm)	felső 1. lépés (cm)	alsó 2. lépés (cm)
2	23741	24252	511	23741	478	91	511	23741	24252	23741
3	23743	24251	508				509	23744	24252	23741
4	23741	24249	508				508	23741	24249	23741
5	23742	24250	508	A tervezettnél mélyebb alsó			508	23742	24250	23741
6	23742	24247	505	pontok száma a 2. lépés után			506	23743	24248	23741
7	23743	24247	504	20			506	23745	24249	23741
8	23742	24249	507				507	23742	24249	23741
9	23742	24250	508				508	23742	[illegible]	[illegible]



9. Vizuálisan szeretnénk megjeleníteni az alagutat a földmunkák befejezése után. Halmozott oszlopdiagram segítségével ábrázoljuk a magassági pontokat, illetve

a belőlük számolt értékeket a mintához hasonlóan. A diagram tulajdonságainak beállításaival minél kifejezőbb ábrát állítsunk elő. Egy tetszőleges helyen egy magassági értéket írjunk ki.

Beküldendő egy tömörített állományban (`i479.zip`) a táblázatkezelő munkafüzet, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

I. 480. A youtube-on igen népszerűek a képernyővideók, amelyek egy-egy számítógépes program használatát mutatják be. A bemutatót végző személy hang- és képernyőkép felvételt készít, majd ezeket összevágja, esetleg a fontos dolgokat feliratozza. Több ingyenesen elérhető szoftver is van, ami alkalmas a felvétel elkészítésére és az esetleges vágására, szerkesztésére.

Készítsünk oktatóvideót, amelyben egy aktuális KöMaL matematika, fizika, vagy informatika feladat online megoldását mutatjuk be. A matematika vagy fizika feladatot az Elektronikus Munkafüzetben oldjuk meg, vagyis a feladat megoldása mellett a TeX szerkesztőt is használjuk. Olyan példát válasszunk, ahol a megoldás során a szöveges leírás mellett egyenletek, képletek is vannak. Amennyiben egy informatika feladatot oldunk meg, akkor a megoldáshoz alkalmazott programot és a megoldás lépéseit ismertessük. Ha a megoldás során ismétlődő, korábban már bemutatott részek következnek, akkor azokat gyorsítsuk fel, és csak röviden jelezzük szövegesen, hogy mi történik.

Beküldendő egy youtube.com hivatkozás, amelyen elérhető az oktatóvideó, valamint egy rövid leírás, ami megnevezi a felvételhez és a szerkesztéshez alkalmazott programokat. Ha nem szeretnénk a saját hangunkon megjelenni, akkor kicsit torzíthatjuk a hangot (pl. az Audacity programmal). A teljes értékű megoldás jól érthető és követhető, de nem unalmas, az adott téma bemutatására, a feladat megoldására egy érdeklődő számára valóban használható.

I/S. 34. Adott egy N sorból és M oszlopból álló sakktábla. A táblán kezdetben elhelyeztünk K darab sötét bástyát. Ezután szeretnénk feltenni Q darab kérdést. Egy kérdésben ideiglenesen töröljük az x. sort (vagy oszlopot). Ezután értelemszerűen kapunk egy $(N-1)\cdot M$ méretű (vagy $(M-1)\cdot N$ méretű) táblát. Adjuk meg, hogy ezen a kisebb táblán legfeljebb hány világos bástyát lehet elhelyezni úgy, hogy a világosak ne üssék egymást, valamint sötét se üssön világosat (a sötét bástyák üthetik egymást). Két bástya üti egymást, ha azonos sorban vagy oszlopban vannak. Két bástya nem foglalhat el azonos mezőt a táblán. Egy kérdés után a sakktábla visszaáll eredeti állapotába, vagyis a törlés csak ideiglenes. Az oszlopokat és sorokat is 0-tól indexeljük.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N, M, K, Q számokat. A következő K sorban a sötét bástyák helyzete van megadva, minden sorban az első szám a sorindexet, a második az oszlopindexet határozza meg. A következő Q sor mindegyike tartalmaz egy p és egy x számot: ha $p=1$, akkor az x. sort, ha $p=2$, akkor az x. oszlopot töröljük.

Kimenet: adjuk meg minden kérdésre, hogy legfeljebb hány világos bástyát lehet elhelyezni. A kimenet elemeit szóközzel tagoljuk és sorvége jellel zárjuk.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
10 10 13 5 1 1 / 1 8 / 1 2 / 4 4 / 3 4 / 5 1 / 5 8 / 5 9 8 2 / 8 4 / 8 9 / 8 6 / 9 4 2 4 / 2 8 / 1 1 / 1 8 / 1 2	5 4 4 4 4

Korlátok: $1 \leqslant N, M \leqslant 10^{17}$, $0 \leqslant K \leqslant \min(N \cdot M, 10^5)$, $0 < Q \leqslant 10^5$. Időlimit: 0,5 mp.

Értékelés: A pontok 20%-a kapható, ha $N, M \leqslant 10^5$; további 20% kapható, ha $K, Q \leqslant 10^3$; további 60% kapható az eredeti korlátokra.

Beküldendő egy `is34.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztő környezetben futtatható.

S. 133. Adott N darab természetes szám. Q kérdést/feladatot fogunk adni a számokhoz kapcsolódóan. Egy feladatban vagy minden számot megnövelünk x-szel az $[a, b]$ intervallumba eső számaink közül, vagy megkérdezzük, hogy hány szám ad M-mel osztva x-et maradékul az $[a, b]$ intervallumba eső számaink közül. Készítsünk programot, amely válaszol a kérdésekre.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N, M, Q számokat. A következő sorban az N darab természetes szám található. A következő Q sor mindegyike egy $p\ x\ a\ b$ számnégyest tartalmaz. Ha $p = 1$, akkor megkérdezzük, hogy az $[a, b]$ intervallumba eső számaink között hány ad M-mel osztva x-et maradékul. Ha $p = 2$, akkor az összes $[a, b]$ intervallumba eső számunkat megnöveljük x-szel.

Kimenet: adjuk meg minden kérdésre a választ, ahol $p = 1$. A válaszokat szóközzel választjuk el, a kimenetet egy sorvége jel zárja.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
9 5 5 / 2 0 1 5 2 1 1 3 4 1 0 0 8 / 1 1 5 7 / 2 1 2 6 / 1 3 1 8 / 1 0 3 3	2 0 2 0

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 1000$, $2 \leqslant M \leqslant 1000$, $0 < Q \leqslant 10^5$, $0 \leqslant x \leqslant 1000$, $0 \leqslant a \leqslant$ $\leqslant b \leqslant N - 1$. Időlimit: 0,5 mp.

Értékelés: A pontok 20%-a kapható, ha $Q \leqslant 1000$; további 20% kapható, ha $M = 2$; további 60% kapható az eredeti korlátokra.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2019. április 10.

❄

Beszámoló a 2018. évi Eötvös-versenyről

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2018. évi Eötvös-versenye október 12-én délután 3 órai kezdettel tizennégy magyarországi helyszínen* került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 50 versenyző adott be dolgozatot, 17 egyetemista és 33 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

❄

1. *Egy zárt, hosszú, henger alakú, szobahőmérsékletű vízzel telt tartályban egy* $V=1\ \mathrm{cm}^3$ *térfogatú, normál nyomású légbuborék található. A tartályt egy űrállomáson, a súlytalanság állapotában óvatosan gyorsítva forgatni kezdjük a szimmetriatengelye körül, majd mikor a tartály eléri az* $\omega=300\ \mathrm{s}^{-1}$ *szögsebességet, azt állandó értéken tartjuk. Milyen alakot vesz fel ekkor a légbuborék? Adjuk meg a buborék jellemző méreteit! A víz felületi feszültsége* $\alpha=0{,}07\ \mathrm{N/m}$.

(*Vigh Máté*)

I. megoldás (energiaminimum). Ha nem forogna a henger, a buborék a felületi feszültség miatt gömb alakú lenne. Ha nem lenne felületi feszültség, akkor a forgó folyadékban a buborék egy nagyon hosszan elnyúló nagyon vékony szál lenne a henger szimmetriatengelyénél. Most a henger elég nagy szögsebességgel forog, de hat a felületi feszültség is, így egy hosszan elnyúlt „virsli” alakú buborékot feltételezünk, melynek alakját egy r sugarú, ℓ hosszúságú hengerrel közelíthetjük. A térfogat állandósága miatt $\ell r^2\pi=V$.

A rendszer teljes energiája a buborék felületi energiájából és a buborék helyéről kiszoruló folyadék helyzeti energiájából adódik össze. Akkor lesz egyensúly, ha ez az energia minimális.

A forgó rendszerben egy dm tömegű folyadékdarabra a henger tengelyétől x távolságra $\omega^2x\,\mathrm{d}m$ centrifugális erő hat. Emiatt a henger tengelyétől x távolságra lévő tömegdarab helyzeti energiája

$$\mathrm{d}E=-\int_0^x\omega^2x'\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}x'=-\frac{1}{2}\omega^2x^2\,\mathrm{d}m.$$

*Részletek a verseny honlapján: `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

A henger alakú buborékból kiszorul a víz, és a henger szimmetriatengelyéig „emelkedik”. A teljes helyzeti energia növekedése, felhasználva, hogy az x sugarú, $\mathrm{d}x$ vastagságú „hengergyűrű” tömege $\mathrm{d}m = \varrho 2x\pi\ell\,\mathrm{d}x$,

$$E_{\mathrm{cf}} = \int_0^r \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \varrho \cdot 2x\pi\ell\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\omega^2 r^4 \varrho\ell\pi = \frac{1}{4}\omega^2 r^2 \varrho V.$$

A felületi energia (a henger ismeretlen alakú végeinek járulékát elhanyagolva)

$$E_{\mathrm{fel}} = 2r\pi\ell\alpha = \frac{2V\alpha}{r},$$

a teljes energia pedig

$$E = E_{\mathrm{cf}} + E_{\mathrm{fel}} = \frac{1}{4}\omega^2 r^2 \varrho V + \frac{2V\alpha}{r}.$$

A minimumot deriválással keressük meg:

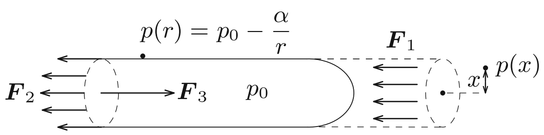
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2}\omega^2 r \varrho V - \frac{2V\alpha}{r^2} = 0,$$

amiből

$$r = \sqrt[3]{\frac{4\alpha}{\omega^2\varrho}} \approx 1{,}5\,\mathrm{mm} \quad \text{és} \quad \ell = \frac{V}{r^2\pi} \approx 15\ \mathrm{cm}.$$

Valóban jogos volt tehát az a feltételezés, hogy a buborék alakja közelítőleg egy nyújtott henger.

II. megoldás (erőegyensúly). Vágjuk félbe a „virslit”, és írjuk fel az erők egyensúlyát (*1. ábra*)!



1. ábra

A forgó folyadékban a tengelytől x távolságra a nyomás:

$$p(x) = \frac{1}{2}\varrho\omega^2 x^2 + C,$$

ahol C később meghatározandó állandó. A buborékon belül mindenhol ugyanakkora p_0 nyomás uralkodik. A henger falánál ez a nyomás a folyadék ottani $p(r)$ nyomásának és a görbületi nyomásnak az összege:

$$p_0 = p(r) + \frac{\alpha}{r},$$

amiből

$$p(r) = p_0 - \frac{\alpha}{r}.$$

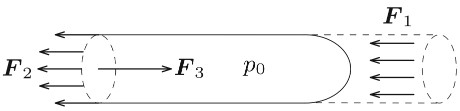
Ezt összevetve a folyadék nyomáseloszlására felírt összefüggéssel az abban megjelenő C állandó meghatározható:

$$C = p_0 - \frac{\alpha}{r} - \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2.$$

A folyadék által a „virsli” egyik felére kifejtett tengelyirányú erő a folyadék nyomásának egy r sugarú körlapra vett integráljaként számítható ki (*2. ábra*):

$$F_1 = \int_0^r p(x)\cdot 2\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varrho\omega^2\int_0^r x^2\cdot 2\pi x\,\mathrm{d}x + \left(p_0 - \frac{\alpha}{r} - \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2\right)\cdot \pi r^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\varrho\omega^2\cdot\frac{\pi}{2}r^4 + p_0\cdot\pi r^2 - \alpha\cdot\pi r - \frac{\pi}{2}\varrho\omega^2 r^4 = p_0\cdot\pi r^2 - \alpha\cdot\pi r - \frac{\pi}{4}\varrho\omega^2 r^4.$$



2. ábra

A virsli másik fele által kifejtett húzóerő (a felületi feszültség miatt): $F_2 = \alpha\cdot 2\pi r$, míg a másik félben lévő levegő által kifejtett nyomóerő: $F_3 = p_0\cdot\pi r^2$.

Az erőegyensúly tehát tengelyirányban így írható fel:

$$F_1 + F_2 = F_3,$$

$$p_0\cdot\pi r^2 - \alpha\cdot\pi r - \frac{\pi}{4}\varrho\omega^2 r^4 + \alpha\cdot 2\pi r = p_0\cdot\pi r^2,$$

amiből az *I. megoldással* összhangban a következő megoldás adódik:

$$r = \sqrt[3]{\frac{4\alpha}{\varrho\omega^2}}.$$

2. *Egy tartályban* 1 *mólnyi egyatomos gáz és* 2 *mólnyi kétatomos gáz keveréke található. A tartály fala az egyatomos gáz atomjait átengedi, de a kétatomos gáz molekuláit nem. Kezdetben a tartály a* 20 °C*-os környezettel egyensúlyban van. A tartályban lévő gázkeveréket egy fűtőtest lassan* 100 °C*-kal felmelegíti.*

a) Mennyivel változik meg a tartályban lévő gáz belső energiája?

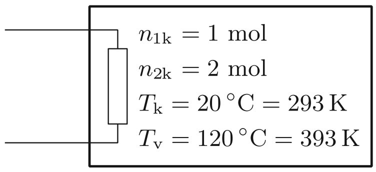
b) Mennyi hőt ad le a fűtőtest a gáznak? (A tartály melegedéséhez szükséges hőt és a tartály hővezetését hagyjuk figyelmen kívül!)

(*Tichy Géza*)

Megoldás. *a*) Két gázkeverék akkor van egyensúlyban, ha azon komponensek parciális nyomása megegyezik, melyek a két tartály között áramolhatnak. Feladatunkban csak az egyatomos molekulák gázát engedi át a fal, ezért ha egyensúlyban a tartályban lévő egyatomos gáz parciális nyomása p_1, akkor a környezetben ennek a gáznak a parciális nyomása is ugyanakkora. Ez az egyensúly a kétatomos gáz parciális nyomására nem jelent megszorítást.

Először vizsgáljuk az egyatomos gáz folyamatát! Mivel ennek parciális nyomását a környezet állítja be állandóra, ez egy izobár folyamat, de a mólok száma, amely kezdetben $n_{1\mathrm{k}} = 1$ mol nem állandó, hanem a folyamat közben állandóan változik, melegítés hatására gáz áramlik a tartályból a környezetbe. Az egyesített gáztörvény alapján $p_1V = n_1RT$, ahol V a tartály térfogata. Mivel sem a parciális nyomás, sem a térfogat nem változik, a folyamatra az

$$n_1T = \text{állandó}$$



3. ábra

összefüggés jellemző.

A kétatomos gázt a fal nem engedi át, ennélfogva térfogata állandó, a folyamat izochor. A fűtőtest a gázt 20 °C-ról melegíti 120 °C-ra, ezért mind az egyatomos gáz, mind a kétatomos gáz kezdeti és végső hőmérséklete kelvinben $T_\mathrm{k} = 293$ K és $T_\mathrm{v} = 393$ K (*3. ábra*).

Az egyatomos gáz szabadsági foka 3, ennek ismeretében a belső energia kezdeti értéke:

$$E_{1\mathrm{k}} = \frac{3}{2}n_{1\mathrm{k}}RT_\mathrm{k},$$

míg belső energiája a folyamat végén:

$$E_{1\mathrm{v}} = \frac{3}{2}n_{1\mathrm{v}}RT_\mathrm{v} = \frac{3}{2}n_{1\mathrm{k}}RT_\mathrm{k},$$

ami a folyamatra jellemző

$$n_{1\mathrm{v}}T_\mathrm{v} = n_{1\mathrm{k}}T_\mathrm{k}$$

összefüggés miatt megegyezik a kezdeti energiával. Látjuk, hogy az egyatomos gáz belső energiája nem változik.

A kétatomos gáz öt szabadsági fokkal rendelkezik. A belső energiájának megváltozása:

$$\Delta E_1 = \frac{5}{2}n_2R(T_\mathrm{v} - T_\mathrm{k}).$$

A teljes rendszer belső energiájának megváltozása:

$$\Delta E = \frac{5}{2}n_2R(T_\mathrm{v} - T_\mathrm{k}) = 4{,}16\ \mathrm{kJ}.$$

b) Most rátérünk annak a hőnek a kiszámítására, amit a fűtőtest ad le. Az egyatomos gáz izobár folyamatában a részecskeszám állandóan változik, tehát az általa felvett hőt részfolyamatonként kell összeadni. Ezt integrállal lehet kifejezni:

$$Q_1 = \int_{T_\mathrm{k}}^{T_\mathrm{v}} \frac{5}{2}n_1R\,\mathrm{d}T,$$

ahol a folyamat során a mólszám az

$$n_1 = \frac{n_{1\mathrm{k}} T_\mathrm{k}}{T}$$

alapján függ a hőmérséklettől. Felhasználtuk, hogy az egyatomos gáz állandó nyomáson vett mólhője $C_{p1} = (5/2)R$. Az integrált elvégezve

$$Q_1 = \int\limits_{T_\mathrm{k}}^{T_\mathrm{v}} \frac{5}{2} \frac{n_{1\mathrm{k}} R T_\mathrm{k}}{T}\,\mathrm{d}T = \frac{5}{2} n_{1\mathrm{k}} R T_\mathrm{k} \ln \frac{T_\mathrm{v}}{T_\mathrm{k}} = 1{,}79\ \mathrm{kJ}.$$

Az integrálás lépése több módon is elkerülhető, például úgy, hogy felhasználjuk a hasonlóságot az izoterm folyamat munkavégzésével, vagy egy közelítő összegzést alkalmazva számolunk numerikusan.

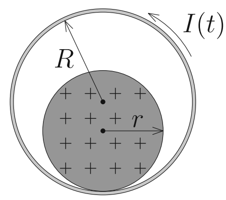
A kétatomos gáz izochor folyamatot végez, ezért az általa felvett hő megegyezik a belső energia megváltozásával:

$$Q_2 = \frac{5}{2} n_2 R (T_\mathrm{v} - T_\mathrm{k}) = 4{,}16\ \mathrm{kJ}.$$

A fűtőtest a kettő hő összegét adja le:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 5{,}95\ \mathrm{kJ}.$$

3. *Egy rögzített, vízszintes tengelyű, légmagos, hosszú szolenoid keresztmetszete R sugarú kör. A tekercs belsejében egy (nem-mágneses) szigetelő anyagból készült, r sugarú tömör henger helyezkedik el. A szigetelő henger pozitívan töltött, egyenletes térfogati eloszlásban. A szolenoidba időben egyenletesen, gyorsan növekvő erősségű áramot vezetünk az ábrán látható körüljárás szerint.*



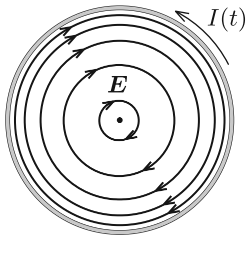
Milyen irányban indul el a szigetelő henger? Hogyan függ a válasz az r/R aránytól? Mekkora r/R arány esetén marad a töltött henger nyugalomban?

A tapadási súrlódás elegendően nagy ahhoz, hogy a henger ne csússzon meg. A gördülési ellenállástól tekintsünk el!

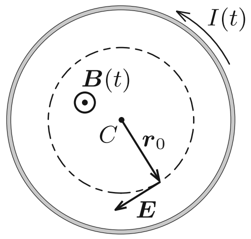
(*Vigh Máté*)

Megoldás. A változó (növekvő) erősségű áram hatására a tekercs belsejében időben változó, homogén mágneses mező alakul ki. A változó mágneses mező a Faraday-törvény értelmében időben állandó, forrásmentes és örvényes elektromos mezőt kelt (*4. ábra*), amely eredő erőt és forgatónyomatékot fejt ki a töltött hengerre: ez mozdíthatja el a hengert egyik vagy másik irányban.

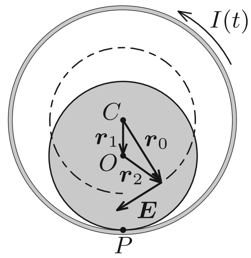
Vizsgáljuk az egész elrendezésnek a szolenoid tengelyére merőleges síkmetszetét! Jelöljük ezen a síkmetszeten a szolenoid középpontját C-vel, a szigetelő henger középpontját O-val, a henger és a szolenoid érintkezési pontját pedig P-vel!



4. ábra



5. ábra



6. ábra

A szolenoid belsejében kialakuló indukált elektromos mező térerősségét a Faraday-törvényből határozhatjuk meg, ha azt egy C középpontú, r_0 sugarú körre alkalmazzuk (*5. ábra*):

$$E(r_0)\cdot 2\pi r_0=\underbrace{\pi r_0^2\frac{\Delta B}{\Delta t}}_{\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}},\quad \text{ahonnan}\quad E(r_0)=\frac{1}{2}\,\frac{\Delta B}{\Delta t}r_0.$$

Ez az összefüggés a „balkéz-szabály” alapján vektoriálisan is felírható a C pontból a vizsgált pontba mutató $\boldsymbol{r}_0$ vektor segítségével:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{2}\,\frac{\Delta B}{\Delta t}\boldsymbol{e}_B\times\boldsymbol{r}_0,$$

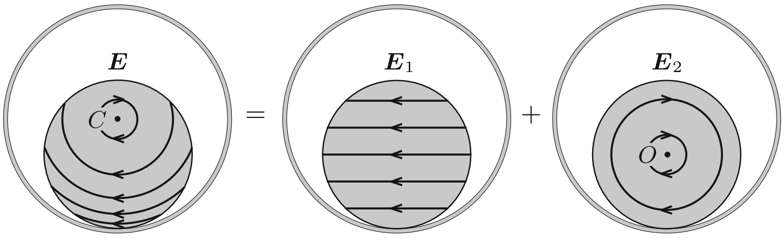
ahol $\boldsymbol{e}_B=\boldsymbol{B}/|\boldsymbol{B}|$ a mágneses indukcióvektorral azonos irányú egységvektor.

Vezessük be a *6. ábrán* látható $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ vektorokat, ahol $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_0$. Ezek közül $\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{CO}$ konstans vektor (melynek hossza $R-r$), míg $\boldsymbol{r}_2$ az O pontból abba a pontba mutat, ahol a térerősségre kíváncsiak vagyunk. Ennek felhasználásával a térerősség így írható:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0)=\underbrace{-\frac{1}{2}\,\frac{\Delta B}{\Delta t}\boldsymbol{e}_B\times\boldsymbol{r}_1}_{\boldsymbol{E}_1}\underbrace{-\frac{1}{2}\,\frac{\Delta B}{\Delta t}\boldsymbol{e}_B\times\boldsymbol{r}_2}_{\boldsymbol{E}_2},$$

Ebben az összegben az $\boldsymbol{E}_1$-gyel jelölt tag homogén, vízszintesen balra mutató elektromos mezőt, az $\boldsymbol{E}_2$-vel jelölt tag pedig a töltött henger tengelye (O pont) körül „örvénylő” mezőt jelent. Az indukált elektromos teret tehát felbontottuk két mező szuperpozíciójára, ahogy az a *7. ábrán* látható.

Azt, hogy a töltött henger jobbra vagy balra indul el az dönti el, hogy a henger legalsó P pontjára vonatkoztatott eredő forgatónyomaték milyen irányba mutat (erre a pontra nézve ugyanis a súrlódási erőnek, a nyomóerőnek és a nehézségi erőnek a forgatónyomatéka is nulla). Az elektromos mező 7. ábrán látható felbontásának az az előnye, hogy segítségével könnyen kiszámítható ez az eredő forgatónyomaték.



7. ábra

A homogén $\boldsymbol{E}_1$ mező $|\boldsymbol{E}_1|Q$ nagyságú, a henger O középpontjában ébredő erőt fejt ki a hengerre, melynek forgatónyomatéka a P pontra nézve:

$$M_1 = |\boldsymbol{E}_1|Qr = \frac{1}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}|\boldsymbol{e}_B \times \boldsymbol{r}_1|Qr = \frac{1}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}(R-r)Qr,$$

ahol Q a henger össztöltése, r pedig az erőkar.

Az O pont körül örvénylő $\boldsymbol{E}_2$ mező eredő erőt a szimmetria miatt nem eredményez. A forgatónyomatékhoz viszont ez a mező is ad járulékot, hiszen a henger O pontra nézve átellenes darabkáira ható erők erőpárokat alkotnak. Az erőpárok eredő forgatónyomatéka bármely pontra, így a P és O pontokra számítva is ugyanakkora, de a számolás az O pontra vonatkoztatva egyszerűbb. Az O ponttól $|\boldsymbol{r}_2|$ távolságra lévő, ΔQ töltésű kis darabkára $|\boldsymbol{E}_2|\Delta Q$ erő hat, így az eredő forgatónyomaték:

$$M_2 = \sum |\boldsymbol{E}_2|\Delta Q|\boldsymbol{r}_2| = \frac{1}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}\underbrace{\sum \Delta Q|\boldsymbol{r}_2|^2}_{\frac{1}{2}Qr^2}.$$

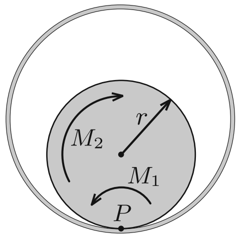
Az összegzésben szereplő kifejezés éppen olyan alakú, mint a henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére vonatkoztatva (csak ott a darabkák ΔQ töltése helyett azok Δm tömege szerepel). Ezt az analógiát felhasználva az összegzés eredménye $Qr^2/2$, így

$$M_2 = \frac{1}{4}\frac{\Delta B}{\Delta t}Qr^2.$$

A P pontra vonatkoztatott M_1 forgatónyomaték balra szeretné kitéríteni a töltött hengert, míg az M_2 forgatónyomaték jobbra (*8. ábra*). A henger tehát *balra indul el,* ha:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}Q(R-r)r}_{M_1} > \underbrace{\frac{1}{4}\frac{\Delta B}{\Delta t}Qr^2}_{M_2},$$

azaz ha $r/R < 2/3$, ellenkező esetben pedig *jobbra.* Az $r = 2R/3$ egyenlőség fennállása esetén a henger egyáltalán nem indul el.



8. ábra

Megjegyzés. A hengerre ható, P pontra vonatkoztatott eredő forgatónyomaték irányát a forgómozgással kapcsolatos *analógia* segítségével is meghatározhatjuk. Vegyük az óramutató járásával ellentétes körüljárási irányokat pozitívnak! Tekintsük a hengert egy m

tömegű, homogén tömegeloszlású, a C pont körül $\omega < 0$ szögsebességgel forgó merev testnek! Ezen test egy-egy darabkájának sebessége (és emiatt az egységnyi térfogatú kis részének lendülete) éppen olyan irányú és (egy pozitív arányossági tényezőtől eltekintve) ugyanolyan nagyságú, mint az eredeti feladatban az elektromos erőtér által kifejtett erő. Hasonlóan, a forgó merev test kis darabkájának P-re vonatkoztatott perdülete (impulzusmomentuma) egy arányossági tényezőtől eltekintve az eredeti feladatban szereplő erők P-re vonatkoztatott forgatónyomatékának felel meg. A kérdés tehát az, hogy milyen előjelű a C pont körül negatív irányban forgó henger perdülete a P pontra vonatkoztatva.

Egy merev test teljes perdülete a tömegközéppont körüli forgás „sajátperdületéből” és a tömegközéppontba képzelt, annak sebességével mozgó teljes anyagmennyiség „pályaperdületéből” tehető össze. Esetünkben az O tömegközéppont (balra mutató) sebessége $v_O = (R-r)\omega$ nagyságú, a pályaperdület tehát $+mr(R-r)\omega$, a sajátperdület pedig $-(1/2)mr^2\omega$. A P pontra vonatkoztatott teljes perdület tehát:

$$N_P = mr(R-r)\omega - \frac{1}{2}mr^2\omega = \frac{mr\omega}{2}(2R-3r).$$

Látható, hogy $r < \frac{2}{3}R$ esetén $N > 0$, tehát a henger *balra* indul el, $r > \frac{2}{3}R$ esetén $N < 0$, azaz a henger *jobbra* indul el, míg $r = \frac{2}{3}R$ esetén nem jön mozgásba.

(*G. P.*)

❄

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2018. november 23-án délután került sor az ELTE TTK Konferenciatermében. Meghívást kaptak az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. Jelen volt az 50 évvel ezelőtti díjazottak közül *Vetier András,* aki az akkori feladatok ismertetése után röviden beszélt a versenyhez kapcsolódó emlékeiről, és a 25 évvel ezelőtti díjazottak közül *Kovács Krisztián.*

Ezután következett a 2018. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását Vankó Péter, a 2. feladatét Tichy Géza, a 3. feladatét Vigh Máté ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Sólyom Jenő,* az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Első díjat a versenybizottság nem adott ki.

Az első feladat hibátlan megoldásáért *második díjat* nyert **Fajszi Bulcsú**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Csefkó Zoltán* és *Horváth Gábor* tanítványa.

A második feladat lényegében helyes megoldásáért *harmadik díjat* nyert **Hajdú Csanád,** a BME fizikus hallgatója, a budapesti Eötvös József Gimnázium érettségizett tanulója, *Gulyás Erzsébet* tanítványa, valamint **Vavrik Márton,** a BME fizikus hallgatója, a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium érettségizett tanulója, *Lendvai Dorottya* és *Izsa Éva* tanítványa.

Az első feladat helyes közelítő megoldásáért dicséretben részesült **Berke Martin,** a BME fizikus hallgatója, a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium érettségizett tanulója, *Bóbics Lilla* tanítványa.

A második díjjal *Zimányi Gergely* adományából 50 ezer, a harmadik díjjal 30 ezer, a dicsérettel 20 ezer forint pénzjutalom járt, a díjazottak tanárai pedig a Typotex Kiadó könyveit kapták. A verseny megszervezését az Eötvös Loránd Fizikai Társulat a MOL támogatásából fedezte.

Tichy Géza, Vankó Péter, Vigh Máté

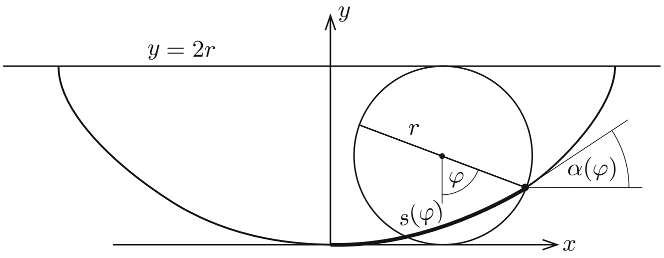
A Huygens-féle cikloisinga

Bevezetés

Köztudott, hogy az ℓ hosszúságú matematikai inga lengésideje nem független a lengés amplitúdójától, és a $T=2\pi\sqrt{\ell/g}$ kifejezés tulajdonképpen egy közelítés, ami annál pontosabb, minél kisebb az amplitúdó. Természetes módon vetődik fel a kérdés: hogyan lehet olyan ingát készíteni, amelynek az amplitúdótól függetlenül ez a lengésideje. Erre a kérdésre adott választ *Christiaan Huygens* (1629–1695) holland matematikus, fizikus, csillagász, és az alábbiakban az általa konstruált szerkezetet mutatjuk be. A kérdést két részre bontva tárgyaljuk. Mivel az egyszerű inga esetében a lengésidő amplitúdófüggése onnan ered, hogy az s kitérés és a hozzá tartozó $mg\sin(s/\ell)$ visszatérítő erő csak közelítőleg arányosak egymással, először azt vizsgáljuk meg, milyen alakú kényszerpályán kell egy testnek haladni ahhoz, hogy a gravitációs erő pálya menti komponense arányos legyen a pálya mentén mérhető úttal. Ezután megnézzük, hogyan érhető el, hogy a lengő súly éppen ilyen alakú pályán mozogjon.

A kényszerpálya alakja

A keresett kényszerpályát meghatározó összefüggés tehát (*1. ábra*)



1. ábra

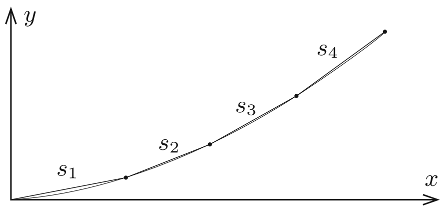
$$mg\sin\alpha(s)=Ds. \tag{1}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása felsőbb matematikai ismereteket igényel, ezért itt azt az utat választjuk, hogy megadjuk a megoldást, és belátjuk, hogy valóban megfelel a fentieknek. A kényszerpálya egy *ciklois.* Ha egy kör egy egyenesen gördül, minden pontja ciklois pályán mozog. Az 1. ábrán látható koordináta-rendszerben az r sugarú kör az $y = 2r$ egyenletű egyenesen gördül, és azt a cikloist választjuk, amelyik átmegy az origón. Ennek a paraméteres egyenlete

$$x_1(\varphi) = r(\varphi + \sin\varphi),$$
$$y_1(\varphi) = r(1 - \cos\varphi).$$

(Ez egy periodikus görbe, de számunkra csak a $-\pi < \varphi < \pi$ szakasza érdekes.) Belátjuk, hogy erre a görbére az (1) egyenlet teljesül, ha a távolságot az ív mentén az origótól mérjük.

Elsőnek a cikloisív hosszát számoljuk ki. Tekintsük a görbe egy adott, φ-vel jellemzett pontját! A 0-tól φ-ig terjedő szögtartományt felosztjuk N részre úgy, hogy $\varphi_0 = 0$, $\varphi_N = \varphi$ és $\varphi_n - \varphi_{n-1} = \Delta_n$ legyen. A felosztás lehet egyenletes, de ez nem szükséges. Amint majd látni fogjuk, egyedül az a fontos, hogy minden Δ_n olyan kicsiny legyen, hogy a $\sin\Delta_n \approx \Delta_n$ közelítés alkalmazható legyen. Ezután vegyük a φ_n-ekhez tartozó (x_n, y_n) pontokat, és a görbeszakaszokat közelítsük a szomszédos pontok közötti húrokkal (*2. ábra*)! Ennek a sokszorosan megtört vonalnak a hossza annál jobban megközelíti a cikloisív hosszát, minél finomabb a felosztás. Ennek megfelelően



2. ábra

$$s(\varphi) \approx \sum s_n,$$

ahol

$$s_n = \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2} =$$
$$= r\sqrt{(\Delta_n + \sin\varphi_n - \sin\varphi_{n-1})^2 + (\cos\varphi_{n-1} - \cos\varphi_n)^2}.$$

A szögfüggvények különbségének azonos átalakítása után, majd alkalmazva a

$$2\sin\frac{\Delta_n}{2} \approx \Delta_n$$

közelítést az

$$s_n = r\Delta_n\sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\varphi_n + \varphi_{n-1}}{2}\right)}$$

kifejezést kapjuk, ami a félszögekre vonatkozó azonosság és a

$$\Delta_n \approx 4\sin\frac{\Delta_n}{4}$$

közelítés, majd ismét a szögfüggvények különbségére vonatkozó addíciós tétel segítségével az

$$s_n = 4r\left(\sin\frac{\varphi_n}{2} - \sin\frac{\varphi_{n-1}}{2}\right)$$

különbségre vezet. Ha ezeket összeadjuk, a közbülső tagok kiesnek, és az

$$s(\varphi) = 4r\left(\sin\frac{\varphi_N}{2} - \sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

vagyis az

$$s(\varphi) = 4r\sin\frac{\varphi}{2} \tag{2}$$

eredmény adódik.

Megjegyzés. A fenti összefüggés nem azt jelenti, hogy a húrokból álló vonal hossza a felosztástól függetlenül megegyezik az ív hosszával, hanem azt, hogy a két hosszúság az alkalmazott közelítésekből következő pontossággal azonos. Márpedig minél finomabb a felosztás, a közelítések annál pontosabbak, így a fenti eredmény egzaktnak tekintendő. Ezért használjuk a $\approx$ jel helyett a határozott egyenlőséget.

Következő lépésként a φ-vel jellemzett ponthoz tartozó $\alpha(\varphi)$ szöget kell kiszámolnunk. Ehhez tekintsük a φ_N és a φ_{N-1} pontokat összekötő húr vízszintessel bezárt α_N szögét! Nyilván, minél kisebb Δ_N, az α_N szög annál jobban megközelíti $\alpha(\varphi)$-t. Másrészt

$$\operatorname{tg}\alpha_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{x_N - x_{N-1}},$$

ami behelyettesítés után a már ismert közelítéssel és átalakításokkal a

$$\operatorname{tg}\alpha_N = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_N + \varphi_{N-1}}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_N}{2} - \frac{\Delta_N}{4}\right)$$

alakra hozható, amiből egyértelmű, hogy a felosztás finomításával α_N egyre pontosabban megközelíti $\varphi_N/2$-t. Így tehát írhatjuk, hogy

$$\alpha(\varphi) = \frac{\varphi}{2}. \tag{3}$$

A (2) és (3) eredményeket az (1) egyenletbe behelyettesítve a „rugóállandóra" a

$$D = \frac{mg}{4r}$$

értéket kapjuk, tehát (ellentétben a matematikai inga esetével) a cikloispályán a kitérés és a visszatérítő erő aránya *a kitéréstől független állandó.* Innen a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$$

képlet alapján az következik, hogy a kérdéses cikloispályán az origó ($\varphi = 0$) körül súrlódás nélkül ide-oda mozgó test rezgésideje egy $\ell = 4r$ hosszúságú matematikai inga (kis kitérésekhez tartozó) lengésidejének felel meg, de a cikloisinga esetében a periódusidő a lengés amplitúdójától *független.*

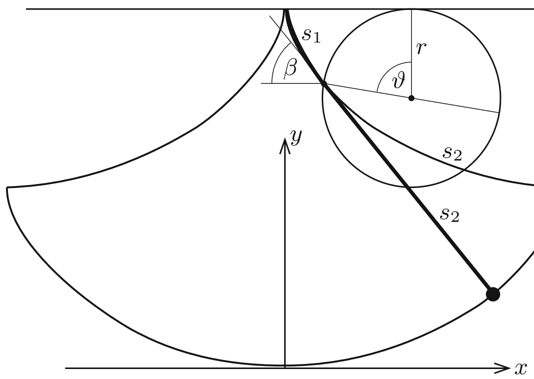
Megjegyzés. A periódusidő amplitúdófüggetlensége persze nem minden határon túl értendő, hiszen a visszatérítő erőt a gravitáció adja, ennek a természetes felső határa pedig a teljes súly. A kapott (a D rugóállandónak megfelelő) arányossági tényező mellett a legnagyobb visszatérítő erő éppen az $s = 4r$ „kitéréshez" tartozik. Ebben a pontban a ciklois érintője függőlegessé válik, de mivel a ciklois fölfelé nem folytatódik, nagyobb kitérésről nincs értelme beszélnünk.

A cikloispálya létrehozása

Ha azt akarjuk, hogy egy matematikai inga nehezéke ne körpályán, hanem valami más pályán mozogjon, a lengést megfelelően kialakított akadályok közé kell szorítani (*3. ábra*). Belátható, hogy ha az elérendő pálya ciklois, akkor – furcsa módon – az alkalmazandó akadályprofilok ugyancsak r paraméterű cikloisívek, amelyek az elvárt pályához képest fölfelé $2r$ távolsággal, oldalra pedig fél periódussal el vannak tolva. Esetünkben ezek egyenlete

$$x_2(\vartheta) = r(\vartheta - \sin\vartheta),$$

$$y_2(\vartheta) = r(3 + \cos\vartheta), \quad (-\pi < \vartheta < \pi).$$



3. ábra

Azt, hogy ezek a profilok a $(0, 4r)$ pontban felfüggesztett, $4r$ hosszúságú inga esetében valóban az (x_1, y_1) pályát szolgáltatják, a következőképpen láthatjuk be. Feküdjön fel az inga fonala a ϑ-val jellemzett pontig! Ez a cikloisívet egy s_1 és egy s_2 hosszúságú darabra osztja. Mivel ezek összege $4r$, az inga szabadon lévő, a cikloistól az érintő irányában elálló, a vízszintessel β szöget bezáró részének hossza is s_2. A (2) és (3) egyenletek segítségével:

$$\sin\beta = \frac{s_2}{4r} = \sin\left(\frac{\pi - \vartheta}{2}\right).$$

A lengő súly koordinátái az előző egyenlet és addíciós tételek felhasználásával:

$$x(\vartheta) = x_2(\vartheta) + s_2 \cos\beta = r(\vartheta + \sin\vartheta),$$
$$y(\vartheta) = y_2(\vartheta) - s_2 \sin\beta = r(1 - \cos\vartheta),$$

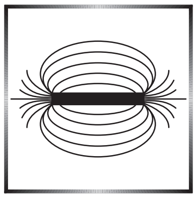
ami valóban a szükséges pálya.

Vajon miért nem találkozunk ilyen ingaórákkal, miért nem ilyennek építették a nagy pontosságú órákat? A válasz egyszerű: az ingaóra pontossága azt jelenti, hogy az ismétlődő lengések ideje a kívánalmaknak megfelelően azonos, márpedig ez biztosított, ha a lengések amplitúdója mindig ugyanakkora. Ezt megoldja az energiaveszteség megfelelő pótlása, nem szükséges tehát, hogy bármilyen amplitúdó mellett ugyanaz legyen a lengésidő.

A Huygens-féle cikloisinga gyakorlati szempontból nem hozott áttörést az igen pontos ingaórákért folyó versenyfutásban, de elméleti érdekessége és matematikai szépsége több, mint három évszázad múltán is kiérdemli csodálatunkat.

Woynarovich Ferenc

Fizika feladatok megoldása



P. 5079. *Középen átfúrt, azonos tömegű gyurmagolyók csúszhatnak egy hosszú, egyenes rúdon. Ha a rudat enyhén lejtősre állítjuk, a golyók maguktól még nem indulnak el, viszont ha elindítjuk őket, gyorsulva csúsznak lefelé. Finoman elindítva a legfelső golyót, ez eléri az alatta levőt. Ekkor összetapadnak, és együtt csúsznak tovább. Nekiütköznek a következő golyónak, ezzel is összetapadva csúsznak tovább, és így tovább. Azt tapasztaljuk, hogy mindegyik ütközés mindig ugyanakkora sebességnél következik be. Mekkora volt kezdetben az n-edik és az $(n+1)$-edik golyó közötti L_n távolság, ha az első két golyó távolsága L_1 volt?*

(*5 pont*) Közli: *Fajszi Bulcsú,* Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

Megoldás. Legyen v a mozgó gyurmagolyók sebessége közvetlenül az ütközések előtt, v_n az n-edik golyó sebessége, amikor elindul, m a golyók tömege, a pedig a golyók gyorsulása. Az ütközések tökéletesen rugalmatlanok, így

$$v_n = \frac{(n-1)mv + 0}{nm} = \frac{n-1}{n} v.$$

Az első golyó gyakorlatilag nulla sebességről gyorsul v sebességre t_1 idő alatt, így a megtett útja

$$L_1 = \frac{0+v}{2} t_1 = \frac{v}{2} \cdot \frac{v-0}{a} = \frac{v^2}{2a}.$$

(Kihasználtuk, hogy az egyenletesen változó mozgásnál az átlagsebesség a kezdeti és a végsebesség számtani közepe, és a gyorsulást a végsebesség és a kezdősebesség különbsége határozza meg.)

Az n-edik golyó v_n sebességről gyorsul v sebességre

$$t_n = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v - v_n}{a} = \frac{v}{na}$$

idő alatt. Ebből

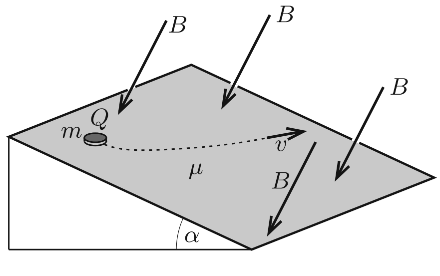
$$L_n = \frac{v_n + v}{2} t_n = \frac{\frac{n-1}{n} v + v}{2} \cdot \frac{v}{na} = \frac{(2n-1)}{n^2} \frac{v^2}{2a} = \frac{2n-1}{n^2} L_1.$$

Jánosik Máté (Győr, Révai Miklós Gimn., 9. évf.)

Megjegyzések. 1. Érdekes, hogy az eredmény nem függ a lejtő hajlásszögétől, a gyurmagolyók tömegétől, de még a súrlódási együtthatótól sem.

2. A gyurmagolyók az ütközések előtt nyugalomban vannak, ami akkor teljesül, ha $\mu_{\text{tapadási}} > \operatorname{tg}\alpha$ (α a lejtő hajlásszöge). Másrészt a meglökött gyurmagolyók $a > 0$ gyorsulással mozognak a lejtőn, hiszen a sebességük növekszik. Ez akkor teljesül, ha $\mu_{\text{csúszási}} < \operatorname{tg}\alpha$. Mindkét feltétel teljesülhet, hiszen általában fennáll, hogy $\mu_{\text{csúszási}} < \mu_{\text{tapadási}}$.

60 dolgozat érkezett. Helyes 46 megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 9 dolgozat.



P. 5083. *Egy lejtő hajlásszöge α, rajta a súrlódási együttható μ. A lejtőn lévő m tömegű, Q töltésű, kis méretű korongra mozgása közben hat egy B nagyságú, a lejtő síkjára merőleges irányú homogén mágneses tér is.* A korongot kezdősebesség nélkül elengedjük. Határozzuk meg a korong állandósult sebességének nagyságát és irányát!*

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

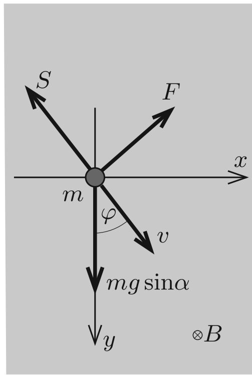
Megoldás. Vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, amelyben az y tengely lejtőirányú, az x tengely a lejtő esésvonalára merőleges. Jelöljük a test állandósult sebességét v-vel, a sebességvektor y tengellyel bezárt szögét pedig φ-vel (lásd az *ábrát,* amely felülről nézve mutatja a lejtő síkját).

*A feladat ábrája a KöMaL nyomtatott számában fordított irányú mágneses mezővel jelent meg. Az ott vázolt mozgásirány a $Q < 0$ esetnek felel meg.

Kezdetben a test sebessége nulla volt, így a megadott paraméterekre teljesülnie kell a

(1) $$\operatorname{tg}\alpha > \mu$$

feltételnek. Ha ez nem lenne igaz, akkor a súrlódási erő maximális értéke nagyobb lenne, mint a nehézségi erő lejtőirányú komponense, tehát a test nem indulna el a lejtőn.



A test sebességének irányát (hosszú idővel az elengedés után) abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy az $\boldsymbol{F}$ Lorentz-erő merőleges a test $\boldsymbol{v}$ sebességvektorára, emiatt a mágneses erők által végzett munka *nulla.* Írjuk fel a munkatételt a testre, ha az a lejtőn állandó sebességgel s utat tesz meg! Felhasználjuk, hogy a Lorentz-erő a mágneses indukció irányára is merőleges, tehát a lejtő síkjában hat. Tudjuk még, hogy a test a lejtő síkjára merőlegesen nem gyorsul, így a nyomóerő: $N = mg\cos\alpha$, továbbá azt, hogy a súrlódási erő a sebességgel ellentétes irányú, és a nagysága

(2) $$S = \mu N = \mu mg\cos\alpha.$$

A munkatétel szerint: $mg\sin\alpha\cos\varphi\cdot s - \mu mg\cos\alpha\cdot s = 0$. Innen a test sebességét jellemző szög kifejezhető:

(3) $$\varphi = \arccos\left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

A sebesség nagyságának kiszámításához írjuk fel a test x irányú mozgására vonatkozó dinamikai egyenletet! Ehhez először állapítsuk meg a testre ható Lorentz-erő x irányú komponensét:

(4) $$F_x = QvB\cos\varphi,$$

majd a mozgásegyenletet:

(5) $$S\sin\varphi - F_x = 0.$$

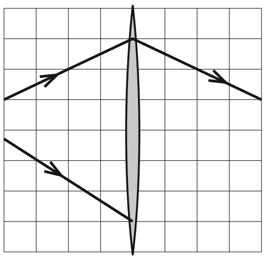
A (2)–(5) egyenletből a keresett sebesség kifejezhető:

$$v = \frac{mg}{QB}\cos\alpha\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \mu^2}.$$

A gyökjel alatt (1) miatt mindig pozitív mennyiség áll.

Máth Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

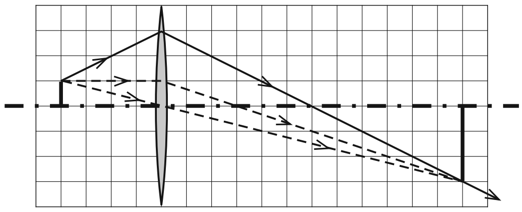
39 dolgozat érkezett. Helyes 26 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 13, hibás 24 dolgozat.



P. 5085. *A mellékelt (méretarányos)* ábra *felső felén egy vékony, hagyományos gyűjtőlencsén áthaladó fénysugár menete látható. Hogyan fog továbbhaladni ugyanezen a lencsén az* ábra *alsó felén látható fénysugár?*

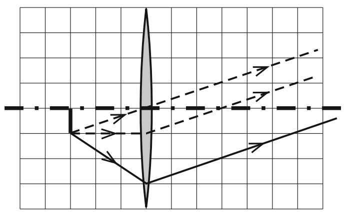
(*4 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

Megoldás. Határozzuk meg először a lencse fókusztávolságát! Tekintsük a megadott fénysugarak közül a „felsőt”, és vegyünk fel a fénysugár mentén valahol, például a lencsétől 4 egység távolságban egy tárgyat, amelyből ez a fénysugár kiindulhatott (*1. ábra*). A megadott (az ábrán folytonos vonallal jelölt) fénysugár



1. ábra

a törése után, valamint a lencse középpontján törésmentesen haladó (szaggatott vonallal jelölt) fénysugár a lencsétől 12 egység távolságban metszi egymást, tehát itt keletkezik a kép. Ugyanezen a ponton megy keresztül a tárgytól az optikai tengellyel párhuzamosan induló, majd a keresett fókuszponton áthaladó (ugyancsak szaggatott vonallal jelölt) fénysugár is. Innen megkapjuk, hogy a fókusztávolság 3 egység.



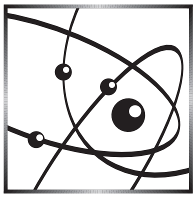
2. ábra

Foglalkozzunk most a másik, a kitűzési ábra alsó felén látható fénysugárral! Ezen sugár mentén bárhol felvehetünk egy „tárgyat”, és gondolhatjuk úgy, hogy a megadott fénysugár ezen tárgy egyik pontjából indult ki. Ha például a tárgy a lencsétől fókusztávolságnyira helyezkedik el (*2. ábra*), akkor a tárgy megfelelő pontjából kiinduló fénysugarak a lencsén átjutva párhuzamosan haladnak tovább; irányukat pl. a lencse középpontján irányváltoztatás nélkül továbbhaladó sugár egyértelműen meghatározza. Ez a fénysugár, miközben 3 egységnyit halad jobbra, az optikai tengelyhez 1 egységnyit közeledik, tehát a kérdéses fénysugár is ilyen irányban halad tovább a lencsén való átjutás után.

Debreczeni Tibor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

35 dolgozat érkezett. Helyes 21 megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 6 dolgozat.

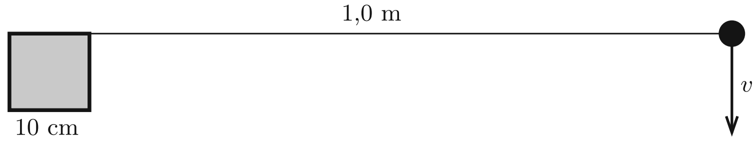
Fizikából kitűzött feladatok



M. 385. Ha a mosogatócsapból függőlegesen kifolyó vízsugár útjába egy viszonylag nagy kiterjedésű, vízszintes, sík akadályt helyezünk, akkor az azon elterülő víz egy kör mentén jól láthatóan megemelkedik. Ezt nevezik hidraulikus ugrásnak. Mérjük meg, hogy egy adott akadály-csap távolság esetén hogyan függ a kör sugara a vízhozamtól!

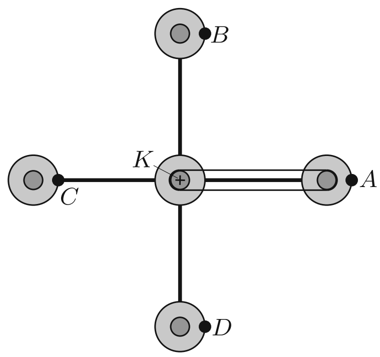
(*6 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

G. 665. Vízszintes, súrlódásmentesnek tekinthető jégen csúszó, kis méretű korong mozgását vizsgáljuk. A jégből kiemelkedik egy négyzet keresztmetszetű oszlop, amelynek oldaléle 10 cm. A korong a felülnézeti *ábrán* látható módon van az oszlophoz rögzítve egy 1,0 m hosszú fonállal. A korongnak $v = 1{,}0$ m/s nagyságú kezdősebességet adunk. Mennyi idő múlva csapódik a korong az oszlophoz?



(*3 pont*)

G. 666. Az *ábrán* egy vidámparki szórakoztatószerkezet vázlata látható. A középső, nagy henger egyenletesen forog körbe. A rajta lévő négy rögzítőkar segítségével négy tengelyezett, kör alakú „gondola” is körbejár. Minden gondola közepéhez egy-egy korongot rögzítettek, melyek ugyanúgy vannak tengelyezve, mint a gondola. A gondolák közepén lévő korongok csúszásmentes szíjáttétel segítségével csatlakoznak a szerkezet közepén található K koronghoz, ami rögzített, tehát egyáltalán nem forog. (Az ábrán – az áttekinthetőség kedvéért – csak az egyik gondolánál tüntettük fel ezt a szíjat.)



Az A, B, C és D pontok egy-egy utast ábrázolnak. Milyen pályán mozognak az utasok? Hogyan változik a közöttük lévő távolság a forgás közben? (A szerkezet vízszintes síkban forog, a tengelyek mind függőlegesek.)

(*4 pont*) *Amerikai feladat nyomán*

G. 667. Mekkora nyomást fejt ki az asztalra helyezett 10 cm oldalélű alumíniumkocka? Hány százalékkal változik a nyomás, ha a kockát 20 °C-ról 100 °C-ra melegítjük? Növekszik vagy csökken a nyomás?

(*3 pont*)

G. 668. Nézzük meg a `https://www.youtube.com/watch?v=hvqQ1XG1aQE` videót! Egy megfelelően nagy gomb és egy vékony zsineg segítségével készítsük el a bemutatott játékot (zúgattyút), és próbáljuk ki. Miért jön gyors forgásba a gomb?

(*3 pont*)

P. 5111. Függőlegesen feldobunk egy pingponglabdát. Vajon mi tart hosszabb ideig: a labda felfelé, vagy lefelé mozgása? (A légellenállás számottevő.)

(*3 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

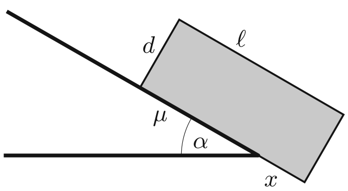
P. 5112. Egy H magasságú falról v_0 kezdősebességgel, a vízszintessel α szöget bezáró irányban eldobtunk egy hógolyót. Ugyanebben a pillanatban mekkora és milyen irányú sebességgel indult el egy gyerek a faltól s távolságban lévő pontból, ha a hógolyó az egyenletesen, egyenes vonalban mozgó gyereket éppen eltalálta? (A légellenállást ne vegyük figyelembe! A mozgások egy, a falra merőleges síkban történnek.)

Adatok: $H=45$ m, $s=21$ m, $v_0=5$ m/s, $\alpha=30°$.

(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 5113. Mennyit csökken méterenként egy 80 kg tömegű ember súlya, ha az Egyenlítőn épített toronyban halad felfelé?

(*4 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest



P. 5114. Egy asztal peremére illeszkedik egy α hajlásszögű lejtő, amelyről egy ℓ hosszúságú, d magasságú, homogén anyageloszlású, téglatest alakú hasáb csúszik le. Mennyivel nyúlik túl a hasáb az asztal peremén, amikor elkezd lebillenni, ha

a) a hasáb és a lejtő közötti súrlódás elhanyagolható;

b) a hasáb és a lejtő közötti súrlódási együttható μ? ($0<\mu<\operatorname{tg}\alpha$, és $\mu d<\ell$.)

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5115. Egy gömbszimmetrikus tömegeloszlású exobolygó tömege a Föld tömegének négyszerese, a nehézségi gyorsulás a – nem forgó – bolygó felszínén a földi érték kétszerese.

a) Mekkora a bolygó sugara és az átlagsűrűsége?

b) Mekkora a bolygón az első kozmikus sebesség?

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5116. R és $3R$ belső sugarú vezető gömbhéj egymástól távol helyezkedik el, falvastagságuk $d \ll R$. A gömbök középpontjában $2Q$, illetve Q töltés van. Mekkora minimális munkával lehet ezeket a töltéseket felcserélni? (A falakon kis lyukak vannak.)

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

P. 5117. Egy arany karikagyűrű éppen úgy helyezkedik el, hogy a földi mágneses indukcióvektor a gyűrű síkjával párhuzamos. A gyűrűt egyenletes forgómozgással 1 másodperc alatt 180°-kal elfordítjuk. A forgástengely a gyűrű síkjába esik, és

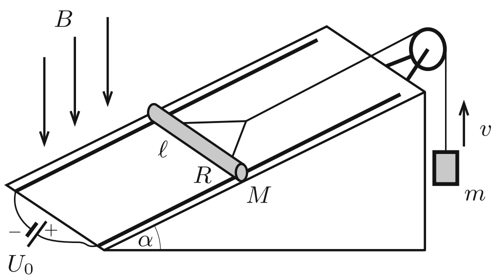
a) a mágneses indukcióvektor irányával párhuzamos;

b) a mágneses indukcióvektor irányára merőleges.

Melyik esetben kell több munkát végeznünk a gyűrű megfordítása közben? Becsüljük meg, hogy mekkora lehet a kétféle munkavégzés közötti különbség!

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5118. Egy $\alpha = 30°$-os hajlásszögű lejtőhöz két, egymástól $\ell = 10$ cm távolságra lévő, egymással párhuzamos, elhanyagolható ellenállású sín van rögzítve, melyeket az egyik végüknél állandó U_0 feszültségű áramforrás kapcsol össze. A sínekre merőlegesen egy $M = 30$ g tömegű, $R = 0{,}2\ \Omega$ ellenállású, vízszintes fémpálcát fektettünk, amely a síneken súrlódásmentesen mozoghat. A pálca közepéhez a sínekkel párhuzamos fonál csatlakozik, melynek elhanyagolható tömegű csigán átvetett függőleges darabjához egy $m = 50$ g tömegű nehezék van erősítve. A berendezés függőlegesen lefelé mutató, $B = 0{,}5$ T indukciójú, homogén mágneses mezőben van.



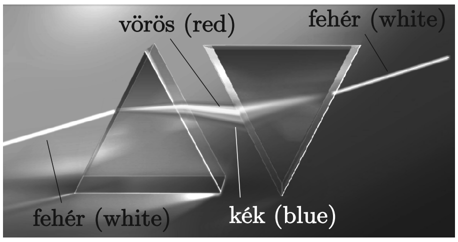
Mekkora legyen az áramforrás feszültsége, hogy az m tömegű nehezék

a) függőlegesen felfelé,

b) függőlegesen lefelé $v = 10$ m/s sebességgel egyenletesen haladjon?

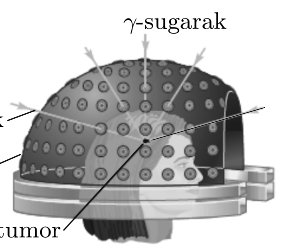
(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

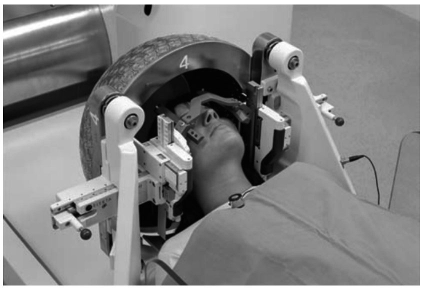
P. 5119. Newton híres kísérletében (experimentum crucis) a fehér fényt színekre bontotta prizma segítségével. A színes fénysugarakat újra egyesítette fehér fénnyé. Megvalósítható-e a fehér fény felbontása és újraegyesítése a *képen* látható módon? (Lásd még a hátsó belső borítón lévő színes ábrát!)



(*4 pont*) *Az internet nyomán*

P. 5120. Sugárkezeléskor egy meghatározott dózist (tömegegységenként elnyelt energiát) kell eljuttatni a daganatba anélkül, hogy a környező egészséges szövetek túlságosan nagy dózisnak lennének kitéve. Vizsgáljuk ezt a problémát a következő egyszerű modellen. A beteg fejét egy 8 cm sugarú, homogén gömbnek tekintjük. A kis méretű daganat a gömb középpontjában van, és öt különböző átmérő irányából γ-fotonokkal sugározzuk be ugyanakkora intenzitással. A sugárnyaláb intenzitása (egységnyi felületre jutó teljesítménye) exponenciálisan csökken, ahogy a nyaláb áthalad a gömböt kitöltő szöveten az $I(x)=I_0\mathrm{e}^{-\mu x}$ egyenletnek megfelelően.*



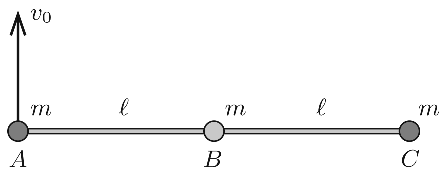


Kétféle sugárzást alkalmazhatunk: 1 MeV-es γ-fotonokat egy ^{60}Co forrásból, ezekre $\mu=0{,}07\ \mathrm{cm}^{-1}$, vagy 6 MeV-es γ-fotonokat, amelyeket egy elektrongyorsítóval lehet létrehozni, itt $\mu=0{,}028\ \mathrm{cm}^{-1}$.

Melyik sugárzás kíméli jobban az egészséges szöveteket, azaz melyik eredményez kisebb dózist a gömb felületénél? Mekkora a dózis a gömb felületének közelében, ha a daganatnál a szükséges dózis értéke D?

(*5 pont*) Közli: *Takács László,* Baltimore, USA

*Az $x_0=\ln 2/\mu$ távolságot *felező rétegvastagságnak* nevezik; ennek számértéke függ a fotonok energiájától és az elnyelő közeg anyagától. 2,5 MeV-es fotonokra pl. vízben $x_0=23$ cm.



P. 5121. Három (A, B és C jelű) kicsiny, egyforma, m tömegű golyó úgy van összekötve két elhanyagolható tömegű, ℓ hosszúságú rúddal, hogy az egyik rúd az A és a B golyót, a másik rúd a B és a C golyót köti össze. A B golyónál a kapcsolódás csuklós, így a rudak közötti szög akadálytalanul változhat. A rendszer a súlytalanság állapotában nyugalomban van, és a három golyó egy egyenes mentén helyezkedik el. Ekkor az A golyónak pillanatszerűen a rudakra merőleges, v_0 nagyságú sebességet adunk. Mekkora erő hat a rudakban az indítást követő pillanatban?

(*6 pont*) *Olimpiai versenyfeladat nyomán*

Beküldési határidő: 2019. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 69. No. 3. March 2019)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 159): **K. 619.** What is the largest possible number of primes such that the sum of any three of them is also a prime? **K. 620.** The sum of five positive integers is 20. The absolute values of their pairwise differences are 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10. Find all such sets of five numbers. **K. 621.** Nine members of a math club are designing a 3×3 square flag as shown in the *figure*. In the nine fields, they arrange the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so that the sum of the numbers in each row, each column, and each diagonal is divisible by 3. How many different flags may they make? **K. 622.** The 16 tokens in the game of QUARTO are all different from each other in some property. The tokens can be categorized into two sets of the same number of elements in four different ways: – tall or flat; – black or white; – round or square; – with or without a hole on the top. Is it possible to arrange the 16 tokens in a circle so that adjacent ones should have exactly two properties in common? **K. 623.** The front side of a square sheet of paper $ABCD$ is red, and the back side is white. E and F divide diagonal AC into three equal parts, with E lying closer to A. The sheet is folded along lines perpendicular to AC by folding the back side towards the front (that is, making the back of the sheet appear on top). During the first folding, point A is moved to cover F, and during the second folding, point C is moved to cover E. What will be the ratio of the red area to the white area on the front side of the sheet in the end?

New exercises for practice – competition C (see page 160): **Exercises up to grade 10: C. 1532.** Show that if a, b, c are positive numbers and $a+b+c\geqslant \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$, then one of them is at least 1. **C. 1533.** The perimeter of a right-angled triangle is k, one of the legs is b, and the opposite angle is β. Consider the triangle in which there are two sides of lengths k and $b\cdot\sqrt{2}$, and they enclose an angle of 45°. Find the smallest angle of this triangle. **Exercises for everyone: C. 1534.** Find all real pairs (x,y) satisfying $5x^2+y^2-4xy+24\leqslant 10x-1$. **C. 1535.** Prove that if the area of a convex quadrilateral is halved by each diagonal, then the quadrilateral is a parallelogram. **C. 1536.** Find all real pairs (x,y) satisfying $xy=x+y+5$, $x^2+y^2=5$. **Exercises upwards of grade 11: C. 1537.** A circle k_1 of radius 6 and a circle k_2 of radius 3 touch each other on the outside, and each of them touches a circle k of radius 9 on the inside. One common exterior tangent of k_1 and k_2 intersects circle k at points P and Q. Determine the length of the line segment PQ. (*Croatian problem*) **C. 1538.** Six pairs of twin brothers participated in one of the practices of the Twins' Table Tennis Club. The coaches did not want any brothers to play at the same table. *a*) In how many different ways may they divide the players to play round-the-table games at two different tables? *b*) In how many different ways is it possible to divide the players into sets of four to play doubles at three different tables? (The position of the players at the tables does not matter.) (*Based on an English problem*)

New exercises – competition B (see page 162): **B. 5014.** After the elections in Nowhereland, there are $50<n<100$ representatives in the parliament, all from a single party called the Blue Party. (The Blue Party has a single president.) According to the law, a party in the parliament may be divided into two parties as long as the following conditions are met: • The president of the old party is not allowed to become a member of the newly formed parties. His or her parliament mandate will terminate, thereby reducing the total number of representatives. • Every other member may decide which new party to join. • Each of the new parties must have at least one member among the representatives. • Each of the new parties must elect a president from their representatives. If at least one such splitting of a party results in all parties in the parliament having the same number of members, the parliament will be dissolved. What should be the value of n so that this could never happen? (*3 points*) **B. 5015.** The second intersections of three concurrent unit circles are A, B and C. What is the radius of the circle ABC? (*3 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 5016.** In a convex quadrilateral $ABCD$, point E_1 lies on side AD, point F_1 lies on side BC, E_2 lies on diagonal AC, and F_2 lies on diagonal BD. Given that $AE_1:E_1D=BF_1:F_1C=AE_2:E_2C=BF_2:F_2D=AB:CD$ and no pair of points coincide, prove that the lines E_1F_1 and E_2F_2 are perpendicular. (*4 points*) **B. 5017.** Is there a function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ with the following properties: (1) if $x_1\neq x_2$ then $f(x_1)\neq f(x_2)$, (2) there exist appropriate constants $a,b>0$ such that $f(x^2)-\big(f(ax+b)\big)^2\geqslant\frac{1}{4}$ for all $x\in\mathbb{R}$? (*4 points*) **B. 5018.** The sultan imprisoned all the 1024 mathematicians of his empire. They were not allowed to keep any of their possessions except for a single copper coin each. The mathematicians know that there are 1024 of them, but they are not able to communicate with one another in any way. On his birthday the sultan offered them the following game: they are taken to the prison yard one by one. Each of them may say either 0 or 1 when taken there. If the sum of the numbers they say is 1, then he will let them all go free. (The mathematicians cannot signal to each other, they do not know how many others have been to the yard before them, or what those before them have done in the yard.) What are the chances that they can get out of the prison? (*5 points*) **B. 5019.** The quadrilateral $ABCD$ is cyclic. Given that $AB+BC=AD+DC$ and $BA+AC=BD+DC$, show that $ABCD$ is a rectangle. (*6 points*) **B. 5020.** A parabola is reflected in a line that passes through its focus and encloses an angle α with its axis. Show that the parabola and its reflection intersect at an angle of α. (*5 points*) (Proposed by *L. Németh,* Fonyód) **B. 5021.** A positive integer n is not divisible by 3. The sum of its positive divisors that leave a remainder of 1 when divided by 3 is $A(n)$, and the sum of its positive divisors that leave a remainder of 2 when divided by 3 is $B(n)$. Find those numbers n for which $\big|A(n)-B(n)\big|<\sqrt{n}$. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 163): **A. 746.** Let p be a prime number. How many solutions does the congruence $x^2+y^2+z^2+1\equiv 0 \pmod p$ have among the modulo p remainder classes? (Proposed by: *Zoltán Gyenes,* Budapest) **A. 747.** In a simple graph on n vertices, every set of k vertices has an odd number of common neighbours. Prove that $n+k$ must be odd. (Proposed by: *András Imolay, Dávid Matolcsi, Ádám Schweitzer* and *Kristóf Szabó,* Budapest) **A. 748.** The circles Ω and ω in its interior are fixed. The distinct points A, B, C, D, E move on Ω in such a way that the line segments AB, BC, CD and DE are tangents to ω. The lines AB and CD meet at point P, the lines BC and DE meet at Q. Let R be the second intersection of the circles BCP and CDQ, other than C. Show that R moves either on a circle or on a line. (Proposed by: *Carlos Yuzo Shine,* Sao Paolo)

Problems in Physics

(see page 185)

M. 385. When a relatively large obstacle having a horizontal (planar) face is placed under the water stream flowing from the kitchen tap, then the spreading water forms a circular area where it has a visible increase in its height. This is called the hydraulic jump. At a certain obstacle-tap distance, measure how the radius of the circle depends on the rate of water flow.

G. 665. In this problem the motion of a small disc sliding along a horizontal frictionless surface of ice is investigated. A column, having a square-shaped cross section, emerges from the ice. The side of the square is 10 cm. The disc is attached to the column by means of a piece of 1.0 m long thread. The top view of the arrangement is shown in the *figure.* The disc is given an initial speed of $v=1.0$ m/s. How much time elapses until the disc hits the column? **G. 666.** The *figure* shows the sketch of the structure of an amusement park ride. The big cylinder-shaped pole at the centre is rotating uniformly. By four horizontal struts circular "gondolas" are attached to the pole and move around it. At the centre of each gondola a horizontal disc is fixed to the gondola such that the symmetry axis of the disc coincides with the vertical shaft of the gondola about which it can be rotated. These discs on the gondolas are connected by transmission belts to disc K, which is attached to the pole at the centre of the structure. Disc K is fixed, and not rotating at all. (For clarity reasons only one of the transmission belts was drawn in the figure.) At points A, B, C and D there is a passenger in each gondola. What is the path of each passenger? How does the distance between them change during the rotation? (The structure is rotating in the horizontal plane and all the rotational axes are vertical.) **G. 667.** There is an aluminium cube of edge 10 cm on a table. What is the pressure due to the cube on the table? By what percent does this pressure change when the temperature of the cube is increased from 20 °C to 100 °C? Does it increase or decrease? **G. 668.** Watch the following YouTube video: `https://www.youtube.com/watch?v=hvqQ1XG1aQE`, make your own button spinner (buzzer) from a button of appropriate size and a piece of thin thread, and then try it. Why does the button begin to spin fast?

P. 5111. A ping-pong ball was thrown vertically upward. Which takes longer, the upward or the downward motion of the ball? (Consider air drag.) **P. 5112.** From a wall of height H a snowball was thrown at an initial speed of v_0 and at an angle of α with respect to the horizontal. A child, who was at a distance of s from the wall, began to run at the same moment when the snowball was thrown. What was the initial direction and speed of the child, if he ran at a constant speed along a straight line and the snowball hit him? (Air drag is negligible.) Both the motions of the child and the snowball are in a vertical plane, which is perpendicular to the wall. *Data:* $H=45$ m, $s=21$ m, $v_0=5$ m/s, $\alpha=30°$. **P. 5113.** An 80-kg man is walking up in a tower built on the Equator of the Earth. How much does the apparent weight of the man decrease in each metre of ascent? **P. 5114.** Ending at the rim of the table there is a slope of angle of elevation of α, from which a uniform density rectangular block of length ℓ and of height d is sliding down. By what length does the block move further from the end of the table until it tilts, if *a*) friction between the slope and the block is negligible; *b*) the coefficient of kinetic friction between the slope and the block is μ ($0 < \mu < \tan\alpha$, and $\mu d < \ell$)? **P. 5115.** The mass of an exoplanet, whose mass distribution has a spherical symmetry, is four times that of the Earth, and the acceleration due to gravity on the surface of the – non-rotating – planet is twice of the gravitational acceleration on the Earth. *a*) What is the radius of the exoplanet, and what is its average density? *b*) At what speed should an object be projected in order that it undergoes uniform circular motion right above the surface of the exoplanet? **P. 5116.** Two spherical shells of inner radius R and $3R$ are placed far from each other. They are made of some thin conducting material, the width of their wall d is thin: $d \ll R$. At the centres of the spheres there are charges of $2Q$ and Q. What is the minimum work which should be done in order to interchange the charges? (There are small holes on the walls.) **P. 5117.** A golden wedding ring is positioned such that the magnetic induction vector of the Earth is parallel to the ring. The ring is rotated uniformly by 180° in 1 second. The axis of rotation is in the plane of the ring, and *a*) parallel to the magnetic induction vector; *b*) perpendicular to the magnetic induction vector. In which case do we have to do more work, while the ring is turned? Estimate the difference between the values of the performed work in the two cases. **P. 5118.** A pair of parallel rails of negligible resistance is fixed to a slope of angle of elevation of $\alpha = 30^\circ$, at a distance of $\ell = 10$ cm from each other. A power supply of constant voltage of U_0 is connected across the lower ends of the rails. A horizontal metal rod of mass $M = 30$ g and of resistance $R = 0.2\ \Omega$ is placed perpendicularly to the rails. The rod can move frictionlessly. A piece of thread, which is parallel to the rails, is attached to the middle of the rod, and looped over a massless pulley. An object of mass $m = 50$ g is hung to the vertical end of the thread. The arrangement is in vertically upward uniform magnetic field of induction $B = 0.5$ T. What should the voltage of the power supply be in order that the object of mass m moves *a*) vertically upward, *b*) vertically downward at a constant speed of $v = 10$ m/s? **P. 5119.** Newton in his famous crucial experiment (experimentum crucis) separated a beam of white light into colours by means of a prism. Then he combined the spectrum back into white light. Is it possible to form a spectrum from a beam of white light and then combine it back into white light by means of the system of prisms used as shown in the *figure?* **P. 5120.** When radiotherapy is applied, the tumour is exposed to a certain dose (absorbed energy per unit mass) of radiation, such that the surrounding healthy tissues do not absorb a too large dose. Investigate this problem by using the following simple model: the patient's head is considered to be a uniform sphere of radius 8 cm. The small tumour is located at the centre of the sphere and is radiated by beams of γ photons, having the same intensity. The radiation beams are aimed from the direction of five different diameters. The intensity (power per unit area) of the radiation beam is decreasing exponentially as the beam passes the tissues in the sphere, in accordance with the following equation: $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$.* Two different types of radiation can be applied: either γ-photons of energy 1 MeV emitted by a source of ^{60}Co, for which $\mu = 0.07\ \mathrm{cm}^{-1}$, or γ-photons of energy 6 MeV, which can be generated by a particle accelerator, here $\mu = 0.028\ \mathrm{cm}^{-1}$. Which radiation spares more the healthy tissues, that is, which one results a smaller dose at the surface of the sphere? What is the value of the dose next to the surface of the sphere if the necessary dose value at the tumour is D? **P. 5121.** Three small alike balls (denoted by the letters A, B and C) of mass m are attached by means of two negligible-mass rods of length ℓ, such that one of the rods joins balls A and B, whilst the other joins balls B and C. At ball B there is an articulate joint so the angle between the rods can be freely varied. The system is at rest in weightlessness, and the three balls are collinear. Then at an instant an initial velocity of v_0 is given to ball A perpendicularly to the rods. What are the forces in the rods at the moment right after starting ball A?

*The distance of $x_0 = \ln 2/\mu$ is called the *half-value layer*; its numerical value depends on the energy of the photons and the material of the absorbing medium. E.g. for photons of energy 2.5 MeV it is $x_0 = 23$ cm in water.