KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

69. évfolyam 7. szám Budapest, 2019. október

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

A 60. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I.

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap*

1. *Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ függvényt, amelyre minden egész a, b esetén teljesül*

$$f(2a)+2f(b)=f\big(f(a+b)\big).$$

Szabó Kristóf megoldása. Jelölje $P(a,b)$ a függvényegyenletet:

$$P(a,b):\ f(2a)+2f(b)=f\big(f(a+b)\big)\quad \forall\, a,b\in\mathbb{Z}.$$

Minden függvényegyenletet érdemes behelyettesítések kipróbálásával elkezdeni. Esetünkben a 0 egy olyan helyettesítési érték, amely a képletben szereplő kifejezéseket jelentősen leegyszerűsíti:

$$(1)\qquad P(0,b):\qquad f(0)+2f(b)=f\big(f(b)\big),$$

$$(2)\qquad P(a,0):\qquad f(2a)+2f(0)=f\big(f(a)\big)\overset{(1)}{=}f(0)+2f(a),$$

$$(2.1)\qquad f(2a)=2f(a)-f(0).$$

A (2)-nél felhasználtuk az (1) egyenletet, majd rendezéssel kaptuk a (2.1)-et. Az (1) és (2.1)-es egyenlettel jelentősen leegyszerűsíthető az eredeti P egyenlet:

$$2f(a)-f(0)+2f(b)\overset{(2.1)}{=}f(2a)+2f(b)=f\big(f(a+b)\big)\overset{(1)}{=}2f(a+b)+f(0),$$

$$(3)\qquad f(a)+f(b)=f(a+b)+f(0).$$

Ebből minden n pozitív egészre:

$$f(n)=f(n-1)+f(1)-f(0)=f(n-2)+2f(1)-2f(0)=\dots=$$
$$=n\big(f(1)-f(0)\big)+f(0);$$

hasonlóan, ha n negatív:

$$f(n)+f(1)=f(n+1)+f(0)=\dots=n\big(f(1)-f(0)\big)+f(0).$$

*A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

Legyen $u=f(1)-f(0)$ és $v=f(0)$. (Mivel $f(0), f(1)$ egészek voltak, így u és v is az.) Az előzőek alapján $f(n)=un+v$. Visszahelyettesítve az eredetibe (P):

$$2ua+v+2ub+2v=u^2(a+b)+uv+v. \tag{4}$$

Az a, b helyére 0-t helyettesítve:

$$3v=(u+1)v. \tag{4.1}$$

Ezt kivonva a (4)-ből kapjuk, hogy:

$$2u(a+b)=u^2(a+b).$$

Ebből következik, hogy $2u=u^2$, tehát $u=0$ vagy 2.

Ha $u=0$, akkor (4.1) miatt $v=0$, tehát $f(n)=0$.

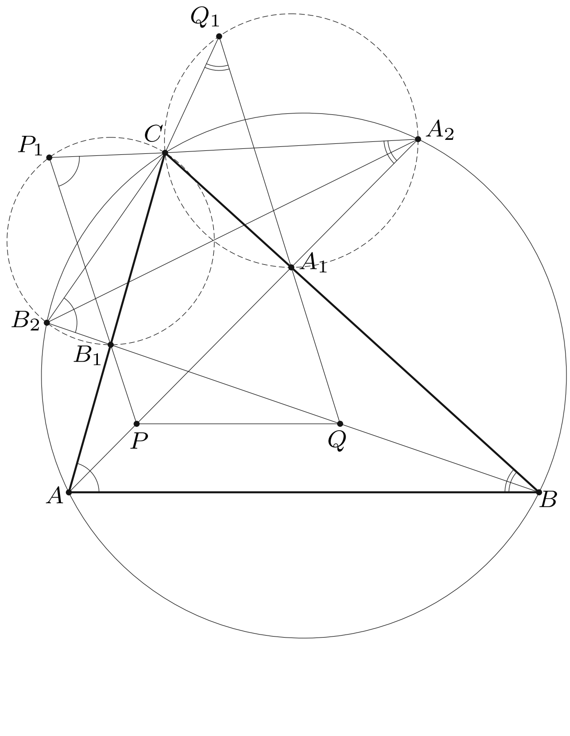
Ha $u=2$, akkor tetszőleges v-re $f(n)=2n+v$ megoldás lesz. Ellenőrzés:

$$4a+v+4b+2v=2\big(2(a+b)+v\big)+v=4a+4b+3v.$$

Ezzel megadtuk az összes lehetséges f függvényt.

2. *Az ABC háromszögben A_1 a BC oldalon, B_1 pedig az AC oldalon fekszik. Legyenek P és Q rendre az AA_1 és BB_1 szakaszok olyan pontjai, amelyekre PQ párhuzamos AB-vel. Legyen P_1 a PB_1 egyenes egy olyan pontja, amire B_1 a PP_1 szakasz belsejében fekszik, és $PP_1C\sphericalangle=BAC\sphericalangle$. Hasonlóan legyen Q_1 a QA_1 egyenes egy olyan pontja, amire A_1 a QQ_1 szakasz belsejében fekszik, és $CQ_1Q\sphericalangle=CBA\sphericalangle$.*

Bizonyítsuk be, hogy a P, Q, P_1, Q_1 pontok egy körön fekszenek.



Schrettner Jakab megoldása. Legyen az AA_1 és BB_1 egyenesek második metszéspontja az ABC háromszög körülírt körével rendre A_2 és B_2. Szögszámolással kapjuk, hogy

$$CA_2A_1\sphericalangle = CA_2A\sphericalangle = CBA\sphericalangle = CQ_1Q\sphericalangle = CQ_1A_1\sphericalangle,$$

felhasználva, hogy A_2 és B_2 is az ABC körön vannak. Ebből következik, hogy C, A_1, A_2, Q_1 egy körre esnek. Hasonlóan kaphatjuk, hogy C, B_1, B_2, P_1 is egy körre esnek.

Mivel PQ párhuzamos AB-vel, illetve a fentebb kapott húrnégyszögek miatt

$$QPA_2\sphericalangle = BAA_2\sphericalangle = BB_2A_2\sphericalangle = QB_2A_2\sphericalangle,$$

így P, Q, A_2, B_2 egy körre esnek. Továbbá

$$P_1PA_2\sphericalangle = PB_1A\sphericalangle + B_1AP\sphericalangle = P_1B_1C\sphericalangle + CAA_2\sphericalangle = P_1B_2C\sphericalangle + CB_2A_2\sphericalangle = \\ = P_1B_2A_2\sphericalangle.$$

Azaz P_1, B_2, P, A_2 egy körre esnek. Így P_1 is rajta van a P, Q, A_2, B_2 pontokat tartalmazó körön. Ugyanezen szögszámolást elvégezve a másik oldalon kapjuk, hogy Q_1, A_2, Q, B_2 is egy körre esnek, tehát Q_1 is rajta van a P, Q, A_2, B_2 pontokat tartalmazó körön.

Azt kaptuk tehát, hogy a P, Q, P_1, Q_1, A_2, B_2 pontok mind egy körre esnek, amiből a feladat állítása is következik.

3. *Egy szociális hálózatnak* 2019 *tagja van, közülük némely párok barátai egymásnak. Ha A barátja B-nek, akkor B is barátja A-nak. A következő típusú esemény előfordulhat többször egymás után, egy időben mindig csak egy ilyen esemény történik:*

> *Ha A, B, C olyanok, hogy A barátja B-nek is és C-nek is, de B nem barátja C-nek, akkor barátságot változtathatnak úgy, hogy B és C most már barátai egymásnak, A és B, valamint A és C barátsága viszont megszűnik. Az összes többi barátság változatlan marad.*

Kezdetben 1010 *olyan tag van, amelyek mindegyikének pontosan* 1009 *barátja van, és* 1009 *olyan tag, amelyek mindegyikének pontosan* 1010 *barátja van. Bizonyítsuk be, hogy létezik a fenti típusú eseményeknek egy olyan sorozata, amelyek végén minden tagnak legfeljebb egy másik tag a barátja.*

Zsigri Bálint megoldása. Gondoljunk a problémára egy gráfként.

Vegyük észre, hogy minden lépésben az élek száma eggyel csökken, és hogy bármely csúcs fokszámának a paritása állandó marad. Figyeljük meg továbbá a kiinduló gráf következő tulajdonságait. A gráfban nem lehet teljes gráf komponens, mert annak 1010 vagy 1011 csúcsúnak kéne lennie (hiszen minden csúcs fokszáma 1009 vagy 1010), vagyis csak 1010 csúcsú lehet: az 1010 darab 1009 fokú csúcs; viszont ekkor tetszőleges 1010 fokú csúcsra igaz, hogy mivel csak 1008 másik ilyen van, ezért össze van kötve 1009 fokúval is, ami ellentmondás. Az előzőek alapján szintén igaz, hogy a gráf minden komponensében van páratlan fokú csúcs. Tehát a kiinduló gráf olyan komponensekből áll, melyek mindegyike az alábbi három kategória egyikébe esik:

1. Izolált pont (eredetileg 0 darab).
2. 2 csúcsú teljes gráf (eredetileg 0 darab).
3. Egyéb nem teljes gráf, mely tartalmaz páratlan fokú csúcsot.

Ha van 3. típusú komponens, akkor nyilván tudunk lépni. Belátom, hogy ekkor olyat is tudunk lépni, amellyel továbbra is csak ilyen komponensek maradnak.

1. Tegyük fel, hogy tudunk olyat lépni, hogy azzal a gráf adott komponense továbbra is összefüggő marad.
   Ekkor ez a komponens továbbra is tartalmazni fog páratlan fokú csúcsot (mivel a csúcsok fokszámainak paritása állandó), és a többi komponens változatlan marad; tehát csak annyit kell belátni, hogy ez a komponens nem alakul teljes gráffá. Ehhez vizsgáljuk meg, hogyan keletkezhet teljes gráf.
   Ha egy izolált teljes gráf komponens keletkezik, akkor a keletkező komponens egyik csúcsának benne kellett lennie abban a három csúcsban, amelyre a lépést végrehajottuk.
   a) Ha csak az egyik csúcsa volt benne a keletkező teljes gráfnak a csúcshármasban, akkor az lehetett a cseresznye egyik vége, vagy a középső csúcs.
      i) Ha a cseresznye egyik vége benne volt a keletkező teljes gráfban, de a másik tehát nem (a cseresznyének csak 1 csúcsa volt benne!), akkor a keletkező komponens nem lesz izolált teljes gráf, mivel a cseresznye másik vége egy éllel hozzá lesz kötve (ellentmondásra jutunk).
      ii) Ha a cseresznyének a közepe van benne a keletkező teljes gráfban, akkor a cseresznyének a két vége a keletkező teljes gráf semelyik másik csúcsával sincs összekötve (hiszen izolált lesz a teljes gráf), tehát ők ezen lépés után elszakadnak. Mivel az 1. pontban vagyunk, ezért ez jelen esetben ellentmondásra vezetne (nem maradna a komponens összefüggő).
   b) Ha két csúcsa is benne van a csúcshármasnak a keletkező teljes gráfban, akkor azok közt eredetileg nem lehetett él, hiszen a lépés után muszáj köztük élnek lenni. Ekkor a cseresznye közepe nyilván nem lehetett benne a teljes gráfban, és nem is lehetett összekötve annak egyéb csúcsaival, tehát a lépés után ő elszakad tőle. Mivel az 1. pontban vagyunk, ezzel a lehetőséggel szintén nem kell törődnünk.

   Tehát ilyen esetben izolált teljes gráf komponens nem keletkezhet.
2. Tegyük fel most, hogy csak olyat tudunk lépni, hogy attól egy komponens kettészakad.
   a) Tételezzük fel, hogy van olyan 2 fokú csúcs, amely egy lehetséges lépésben a cseresznye közepe.
      Ekkor ezt a lépést végrehajtva ő elszakad, és 1. típusú komponens lesz, valamint a volt komponensének maradékában továbbra is lesz páratlan fokú csúcs (hiszen minden csúcs fokszámának paritása állandó). A kom-

ponensének a maradéka így vagy nem lesz teljes gráf, és ezzel 3. típusú lesz, vagy

i) 2 csúcsú teljes gráf lesz, vagyis 2. típusú.

ii) Tegyük fel, hogy 3 csúcsú teljes gráf lesz.
Ekkor az eredeti komponens egy 4 csúcsú kör volt, ami ellentmond az indukciós feltevésnek, mert a 3 kategória egyikébe sem esik bele. Ezzel tehát nem kell törődnünk.

iii) Tegyük fel, hogy legalább 4 csúcsú teljes gráf lesz.
Ekkor a csúcs, mely elszakad, eredetileg egy-egy éllel volt hozzákötve egy teljes gráfhoz, melynek egy éle (értelemszerűen) hiányzott. Ez az izolált teljes gráfok keletkezési lehetőségeinek fentebb tárgyalt módjaiból következik, és abból, hogy a cseresznye közepe 2 fokú. Ha viszont ebben az esetben egy olyan cseresznyével lépnénk, aminek a közepe az eredeti cseresznyénk egyik vége, és az egyik vége az eredeti cseresznyénk közepe (ő a teljes gráf semelyik másik csúcsával nincs összekötve, kivéve azt az egyet, amellyel az új középső nincs összekötve), akkor a komponens nem szakadna ketté (maradna a cseresznyén kívül 2 összekötött csúcs, amik együtt mindenkivel össze vannak kötve; az egyik az eredeti cseresznye másik vége, a másik pedig akármelyik másik). Mivel a 2. részben vagyunk, ez ellentmondás, és nem történhet meg.

Tehát a tulajdonság az *a*) esetben valóban megmarad.

b) Most azt tegyük fel, hogy minden cseresznye, amivel lehet lépni legalább 3 fokú középső csúccsal rendelkezik.
Legyen egy tetszőleges ilyen cseresznye középső csúcsa A, két vége pedig B és C, továbbá D az A-nak egy B-től és C-től különböző szomszédja. Mivel a BAC cseresznyével lépve (ahol A a középső csúcs) a komponens kettészakad, ezért B és D, illetve C és D közt nem futhat él (hiszen A-nak és B-nek, illetve A-nak és C-nek különböző komponensbe kell kerülnie), és minden köztük futó út átmegy A-n. Tehát a BAD és CAD cseresznyékkel is léphetünk. Ha ezek közül az egyikkel lépünk, akkor A és D különböző komponensekbe kerülnek, így A bármely másik szomszédja és D közt csak A-n keresztül vezethet út. Ugyanebből a lépésből ismert, hogy B és C közt is csak A-n keresztül mehet út.
Ebből általánosságban tudjuk, hogy A (aki tetszőleges cseresznye-közép volt!) bármely két csúcsa közt csak A-n keresztül vezethet út. Vagyis A-t elhagyva a gráfból minden szomszédja külön komponensbe kerül. Tekintsünk egy tetszőleges ilyen komponenst.
Ismert, hogy egy gráfban a fokszámok összege mindig páros, vagyis páros sok páratlan fokú csúcs van benne. A kiválasztott komponensünkbe viszont megy még kívülről egy él (A-ból), ami egy csúcs fokának a paritását megváltoztatja, vagyis páratlan sok páratlan fokú csúcsnak kell lennie egy ilyen leendő komponensben, tehát lennie kell páratlan fokú csúcsnak.
Mivel a kettészakadás után mindkét komponensben benne lesz egy-egy teljes ilyen komponens (legalább 3 ág van!), ezért mindkettőben lesz pá-

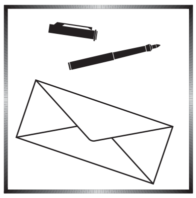
ratlan fokú csúcs. Így mindkét komponensre igaz, hogy vagy 2. típusú, vagy csak annyit kell róla belátni, hogy nem izolált teljes gráf. Tegyük fel indirekt módon, hogy mégis teljes gráf keletkezik.

i) Ha az 1./*a*)/*ii*) módon keletkezik a teljes gráf, akkor ezen cseresznye helyett azzal lépve, amelynek a közepe az eredeti közepe, egyik vége az eredeti egyik vége, és a másik vége a keletkező teljes gráf egyik csúcsa, a komponens nem szakadna ketté; tehát nem a 2. részben lennénk.

ii) Ha az 1./*b*) módon keletkezik a teljes gráf, akkor az eredeti cseresznye helyett azzal lépve, amelynek a közepe az eredeti egyik vége, egyik vége az eredeti közepe, a másik vége pedig a keletkező teljes gráfban van, a komponens nem szakadna ketté, és ekkor sem a 2. részben vagyunk.

Tehát egyik keletkező komponens nem lehet teljes gráf, vagyis 2. vagy 3. típusú.

Beláttuk tehát, hogy ha tudunk lépni, akkor tudunk úgy lépni, hogy minden komponens beleessen a fent felsorolt 3 kategória egyikébe, viszont csak akkor nem tudunk lépni, ha csak 1. és 2. típusú komponensek maradtak. Mivel minden lépésben az élek száma eggyel csökken, és kezdetben csak véges sok él volt, ezért csak véges sokat tudunk így lépni, vagyis előbb-utóbb a fent leírt állapotba jutunk, ami a feladat által leírt állapot. Tehát a feladat által meghatározott állapotba biztosan el tudunk jutni.



Térbe kilépő bizonyítások I.

Projektív geometriai tételek

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

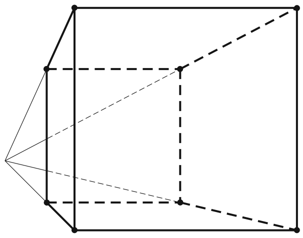
Az első részben olyan tételeket fogunk vizsgálni, amelyekben csak pontok, egyenesek és ezek illeszkedései szerepelnek, esetleg még egy kör vagy kúpszelet is. Gyakorlott versenyzők számára ezek a tételek jól ismertek, gyakran használjuk versenyfeladatok megoldásához is.

Vetítés az ablaküvegre

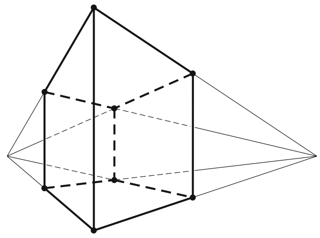
Klasszikus ábrázolási módszer, hogy a helyszínt egy üveglapon (ablakon) át nézzük, és az üvegre rajzoljuk rá a tárgyak körvonalait. Valójában a tárgyakat egy pontból – a szemünkből – vetítjük az ablak síkjára. Az ablakkeret a végtelen nagy képből vág ki egy téglalap alakú részletet.

Az ablakkal párhuzamos egyenesek vetületei az ablakon is párhuzamos egyenesek; speciálisan, ha az ablak függőleges irányú, akkor a függőleges egyenesek a képen is függőlegesek. Az ablak síkjával nem párhuzamos egyenesek képei viszont csak félegyenesek (mert nem látjuk a hátunk mögé eső részüket). Az egymással párhuzamos, de az ablakot döfő egyenesek képei egy pontból induló félegyenesek; a közös végpont az üvegen az a pont, ahol a szemünkön keresztül húzott párhuzamos döfi az ablak síkját. Ez a közös „iránypont" az adott irányú „végtelen távoli" vagy „ideális" pont képe.

Különösen műszaki rajzokon fordul elő, hogy csak néhány, esetleg csak háromféle irányt használunk. Attól függően, hogy a fő irányok közül hány (nem) párhuzamos a kép síkjával, beszélhetünk egy, kettő vagy három iránypontos perspektíváról (*1., 2.* és *3. ábra*).

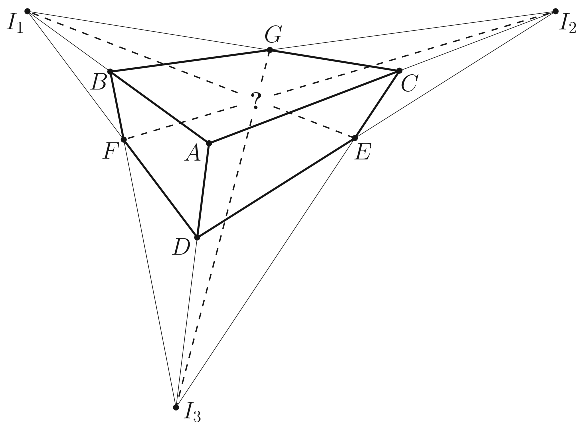


1. ábra. Egy iránypontos perspektíva



2. ábra. Két iránypontos perspektíva

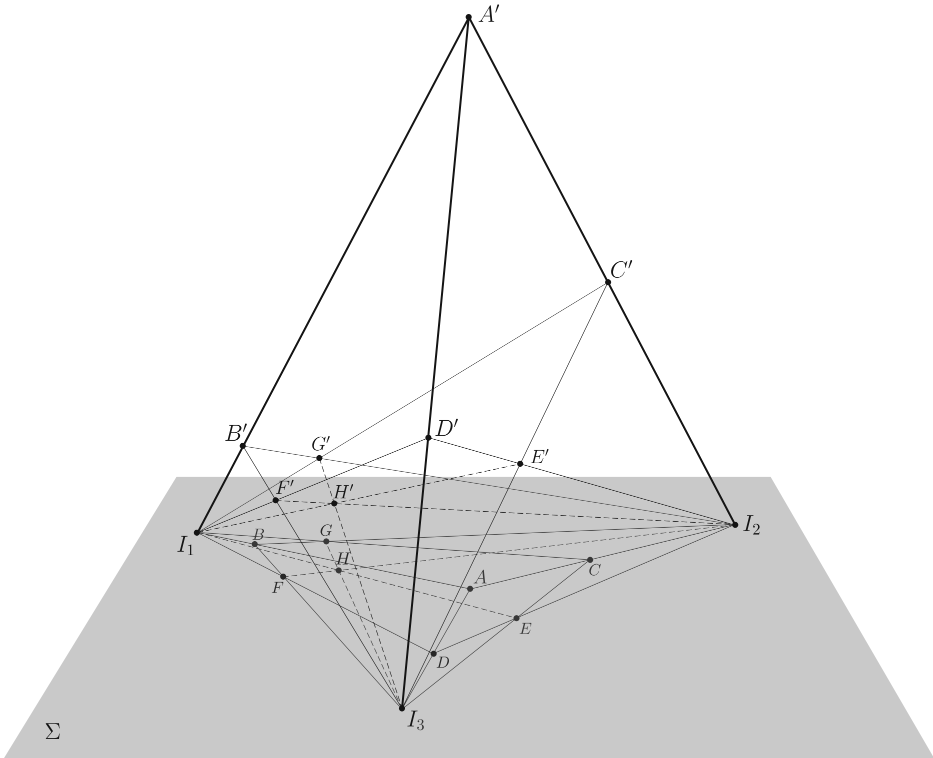
A rajzórán persze nem meresztjük a szemünket az ablaküvegen keresztül a szomszéd háztömbre; sokkal egyszerűbbnek tűnik, hogy valahogy felvesszük az iránypontokat és néhány további pontot, és vonalzóval elkezdjük összekötögetni. Képzeljük el, hogy a 3. ábrán látható rajzrészletet készítettük el.



3. ábra. Három iránypontos perspektíva

Ha ez a rajz egy valódi téglatest képe, akkor az I_1E, I_2F és I_3G egyenesek egy ponton, a téglatest nyolcadik csúcsának képén mennek át. Ha viszont csak úgy, találomra vettünk fel pontokat és húztunk egyeneseket, nem lehetünk biztosak ebben. Márpedig nem szeretnénk megszégyenülve pironkodni, főleg nem a rajztanár előtt. („Látod, kisfiam, ha nem csaltál volna, az a három egyenes egy ponton menne át …!") Szerencsére a vetítést visszafelé is el tudjuk végezni, és ki tudunk találni valamilyen térbeli alakzatot, amelynek a rajzrészletünk a vetülete. Azt is meg lehetne próbálni, hogy „valódi" párhuzamosokat találjunk a térben, de erre nem lesz szükség.

Jelöljük Σ-val a rajzunk síkját. Vegyünk fel a térben egy új A' pontot, ami nincs a Σ síkban, de az Σ-ra való merőleges vetülete éppen az A pont. Az I_1A, I_2A és I_3A szakaszokon legyen rendre B', C', illetve D' az a belső pont, amelynek merőleges vetülete Σ-ra B, C, illetve D. Az I_1I_2A' háromszögben az I_1C' és I_2B' Ceva-szakaszok[1] metszéspontja legyen G'. Mivel az I_1C' és I_2B' merőleges vetülete Σ-n I_1C és I_2B, ugyanez igaz a metszéspontjaikra: a G' merőleges vetülete Σ-n a G pont. Hasonlóan, legyen I_1D' és I_3B' metszéspontja F', és legyen I_2D' és I_3C' metszéspontja E'; ezek vetülete Σ-n F, illetve E (*4. ábra*).



4. ábra. Térbeli rekonstrukció a három iránypontos perspektívából

Most tekintsük az I_1I_2D', I_1I_3C', és I_2I_3B' háromszögek síkjait, jelölje ezeket Σ_{12}, Σ_{13}, illetve Σ_{23}. A Σ_{12} és Σ_{13} síkoknak I_1 és E' is közös pontja, tehát a két

[1]Olyan szakaszok, amelyek a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal egyik pontjával kötik össze.

sík metszésvonala az I_1E' egyenes. Hasonlóan, Σ_{12} és Σ_{23} metszésvonala az I_2F', Σ_{13} és Σ_{23} metszésvonala az I_3G' egyenes.

Az I_1I_2D' háromszögben az I_1E' és I_2F' Ceva-szakaszok a háromszög belsejében metszik egymást; a metszéspontjukat jelöljük H'-vel. Mivel I_1E' az Σ_{12} és Σ_{13}, I_2F' pedig az Σ_{12} és Σ_{23} síkok metszete, a metszéspont mindhárom síknak közös pontja. Ezért a H' ponton a Σ_{13} és Σ_{23} síkok metszésvonala, az I_3G' egyenes is átmegy. Ha a H' pont Σ-ra való vetületét elnevezzük H-nak, akkor azt kaptuk, hogy I_1E, I_2F, I_3G egyenesek egy ponton, H-n mennek át.

Három sík, három egyenes

Az előző bizonyítás fő lépését érdemes általánosabban is végiggondolni és kimondani. A következő tényt nagyon gyakran alkalmazhatjuk térbe kilépő bizonyításokban.

Lemma.[2] *Ha adott három egyenes úgy, hogy közülük bármelyik kettő egy síkban van (tehát metszik egymást vagy párhuzamosak), de a három egyenes együtt nincs egy síkban, akkor a három egyenes vagy egy ponton megy át, vagy pedig párhuzamosak egymással.*

A Lemma bizonyítása. Jelölje a három egyenest e_1, e_2 és e_3, és legyen $i = 1, 2, 3$ esetén $\Sigma_{i,i+1}$ az e_i és az e_{i+1} egyenesek síkja. (Szokás szerint ciklikusan indexelünk: e_4 azonos e_1-gyel, és e_5 azonos e_2-vel.)

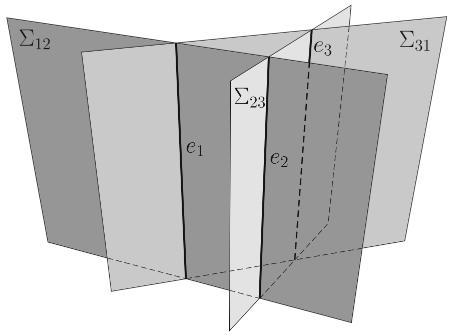
Először is vegyük észre, hogy az e_1 egyenes nem lehet a Σ_{23} síkban – mert akkor akkor mindhárom egyenes ebben a síkban lenne –, ezért e_1 biztosan különbözik e_2-től és e_3-tól. Ugyanígy láthatjuk, hogy e_2 és e_3 egymástól is különbözik. Két különböző egyenesre legfeljebb csak egyféle sík illeszthető, ezért a Σ_{12}, Σ_{23} és Σ_{31} síkok egyértelműen meghatározottak. Mivel a három egyenes nincs egy síkban, a Σ_{12}, Σ_{23} és Σ_{31} síkok különbözők. A $\Sigma_{i+2,i}$ és $\Sigma_{i,i+1}$ metszésvonala az e_i egyenes mindegyik i indexre.

Két, egy síkban fekvő egyenes vagy párhuzamos, vagy metszi egymást. Ha a három egyenes párhuzamos akkor kész vagyunk, a Lemma állítása teljesül (*5. ábra*). Ellenkező esetben a három közül valamelyik két egyenes, mondjuk e_1 és e_2 metszi egymást egy P pontban. A P az e_1 egyenesen van, ami viszont a Σ_{12} és Σ_{31} síkok metszete. Ugyanígy a P ponton az e_2 egyenes is átmegy, ami a Σ_{12} és Σ_{23} síkok metszésvonala. A P pont tehát mindhárom síkra illeszkedik; emiatt P közös pontja a Σ_{23} és Σ_{31} síkoknak; akkor viszont ezek metszésvonala, a harmadik, e_3 egyenes is átmegy P-n (*6. ábra*).

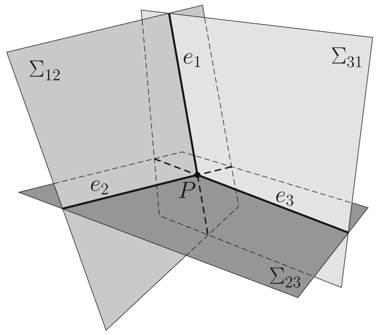
Két klasszikus projektív geometriai tétel

A Lemma alkalmazására két példát mutatunk.

[2]A görög „λήμμα” szó jelentése *kapott valami, például ajándék, profit vagy korrupt pénz.* Matematikában olyan állítást, tételt jelent, ami nem önmagában érdekes, hanem más tételek bizonyításához használjuk fel. A „lemma” helyett a „segédtétel” vagy „segédállítás” szavakat is írhatnánk.



5. ábra. e_1, e_2, e_3 párhuzamosak



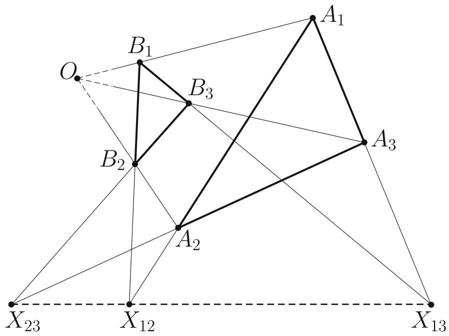
6. ábra. e_1, e_2, e_3 metszőek

Desargues[3] tétele: *Legyen $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ két háromszög a síkon, amelyek csúcsai és oldalegyenesei is különbözők. Legyen az A_1A_2 és B_1B_2 egyenesek metszéspontja X_{12}, az A_1A_3 és B_1B_3 egyenesek metszéspontja X_{13}, és az A_2A_3 és B_2B_3 egyenesek metszéspontja X_{23}. A következő két állítás ekvivalens:*

(a) *A két háromszög megfelelő csúcsait összekötő A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.*

(b) *A két háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai, vagyis az X_{12}, X_{13} és X_{23} pontok egy egyenesre esnek* (7. ábra).

A tétel bizonyítása azon múlik, hogy ez a tíz pontból és tíz egyenesből álló elrendezés egy térbeli geometriai alakzat vetülete (8. ábra).

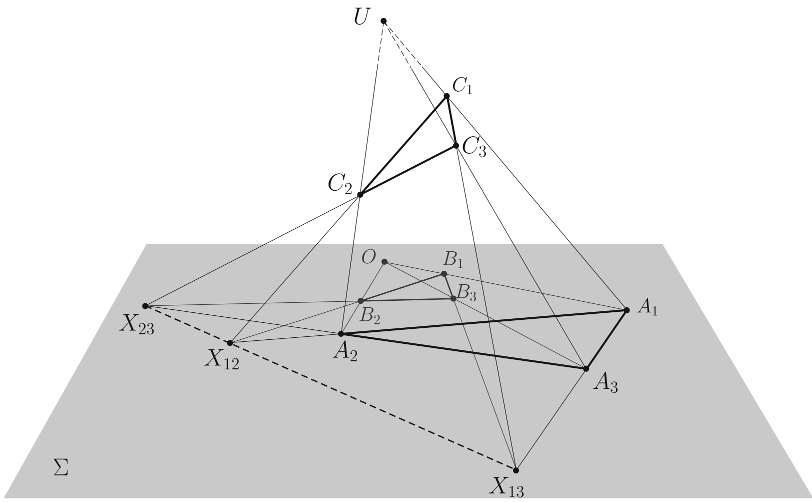


7. ábra. A Desargues-tétel

Az $(a) \Rightarrow (b)$ irány bizonyítása: Az ábra síkját most is jelöljük Σ-val. Ha az A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek az O ponton mennek át, akkor vegyünk fel a térben egy U pontot, amelynek merőleges vetülete a Σ síkon O. Az UA_1, UA_2 és UA_3 egyeneseken legyen C_1, C_2, illetve C_3 az a pont, amelynek vetülete B_1, B_2, illetve B_3. Ha A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 párhuzamosak, akkor vegyünk a térben, az A_1, A_2, A_3 pontokon keresztül három, egymással párhuzamos egyenest, amelyek merőleges vetülete éppen A_1B_1, A_2B_2, illetve A_3B_3, és ezeken vegyük fel azokat a C_1, C_2, illetve C_3 pontokat, amelynek vetülete B_1, B_2, illetve B_3.

Alkalmazzuk most a Lemmát az A_1A_2, B_1B_2 és C_1C_2 egyenesekre. Az A_1A_2 és B_1B_2 egyenesek a Σ síkban fekszenek; a C_1C_2 a B_1B_2-n keresztül Σ-ra állított merőleges síkban, végül az A_1A_2 és C_1C_2 egyenesek az A_1C_1 és A_2C_2 egyenesek síkjában vannak. A C_i pontok nem lehetnek a Σ síkban, mert akkor a teljes A_1C_1 egyenes, és vele az U pont is Σ-ban lenne. A Lemma feltételei teljesülnek: az A_1A_2,

[3] Gérard Desargues francia matematikus és építész, 1591–1662.



8. ábra. A Desargues-tétel bizonyítása

B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek közül bármelyik kettő egy síkban van, de a három egyenes együtt nincs egy síkban. Ezért a három egyenes egy ponton megy át; mivel A_1A_2 és B_1B_2 az X_{12} pontban metszi egymást, ez azt jelenti, hogy a C_1C_2 egyenes is átmegy az X_{12} ponton. Az indexek permutálásával ugyanígy láthatjuk, hogy a C_{13} egyenes átmegy átmegy X_{13}-on, illetve C_{23} átmegy átmegy X_{23}-on.

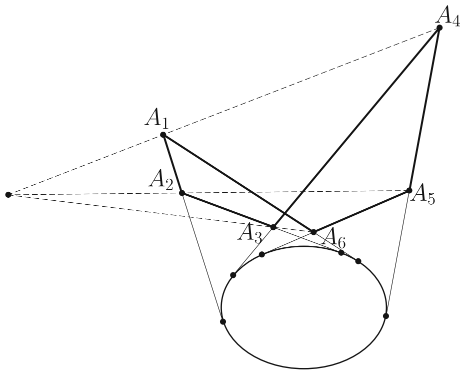
Ezek után az X_{12}, X_{13}, X_{23} pontok mind közös pontjai az $C_1C_2C_3$ és a Σ síknak, ezért egy egyenesen vannak.

A $(b) \Rightarrow (a)$ irány bizonyítása: Ugyanezt a térbeli ábrát építjük fel, csak fordított sorrendben. Az $X_{12}X_{13}X_{23}$ egyenesen keresztül fektessünk egy Σ' síkot, ami különbözik Σ-tól, de nem merőleges rá, és ezen jelöljük ki azokat a C_1, C_2, C_3 pontokat, amelyek Σ-ra eső merőleges vetülete B_1, B_2, illetve B_3. A C_1, C_2, X_{12} pontok közös pontjai az Σ' síknak és a B_1B_2 egyenesen keresztül Σ-ra állított merőleges síknak, ezért egy egyenesre, a két sík metszésvonalára esnek. Ugyanígy látható, hogy C_1, C_3 és X_{13}, valamint C_2, C_3 és X_{23} is egy egyenesre esik.

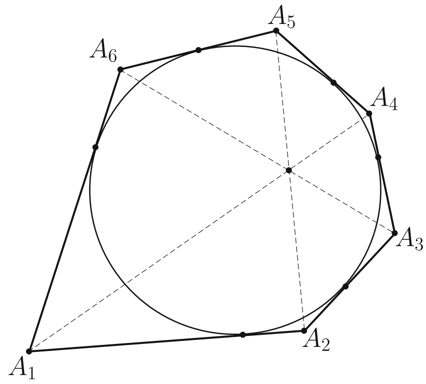
A Lemmát most az A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 egyenesekre alkalmazzuk. Bármely $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ indexpárra az A_iC_i és A_jC_j egyenesek az $A_iC_iX_{ij}$ síkban vannak, tehát a három egyenes közül bármelyik kettő egy síkban van; ugyanakkor az $A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3$ pontok nincsenek egy síkban. A Lemma szerint tehát az A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak. A három egyenest visszavetítve Σ-ra látjuk, hogy az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

Brianchon[4] tétele: *Ha az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (esetleg hurkolt) hatszög oldalegyenesei érintői egy nem elfajuló kúpszeletnek (kör, ellipszis, parabola vagy hiperbola), akkor a hatszög szemközti pontjait összekötő A_1A_4, A_2A_5 és A_3A_6 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak* (9. ábra).

[4] Charles Julien Brianchon francia matematikus, 1783–1864.



9. ábra. A Brianchon-tétel

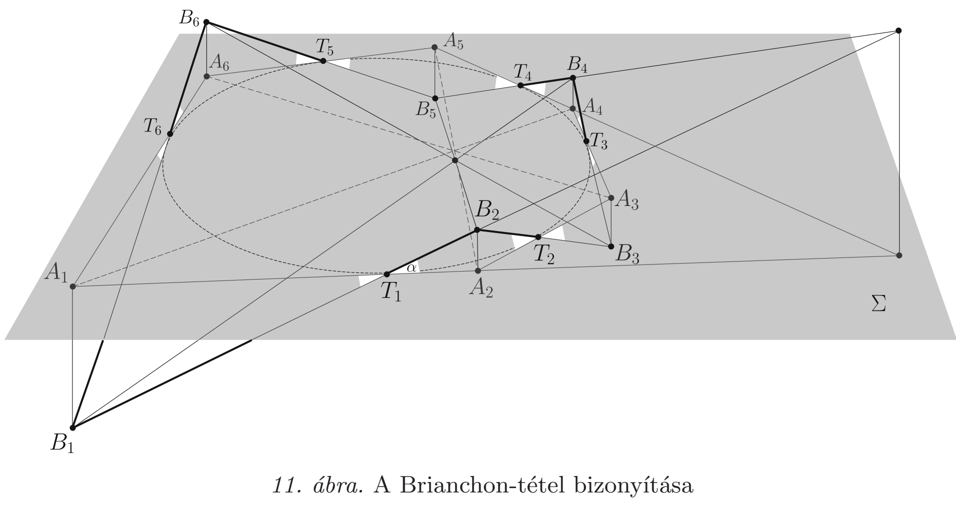


10. ábra. A Brianchon-tétel érintőhatszögben

A tételnek számtalan változatát, speciális és határesetét lehetne felsorolni, az egybeeső oldalegyenesek esetétől a (parabolát érintő) végtelen távoli oldal esetéig. A kedves Olvasónak ajánljuk, hogy valamilyen számítógépes programmal, mint például a GeoGebra, próbáljon minél többféle speciális vagy elfajuló esetet keresni. Itt most nem célunk ezeknek az áttekintése; a tételnek csak az egyik legegyszerűbb esetét fogjuk bizonyítani.

Brianchon tétele, speciális eset: *Ha az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ konvex hatszögbe kört lehet írni, akkor a hatszög A_1A_4, A_2A_5 és A_3A_6 átlói egy ponton mennek át* (10. ábra).

Bizonyítás a speciális esetre. Az ábra síkját most is Σ-val fogjuk jelölni. A hatszögbe írt kör érintési pontjai legyenek $T_1, \ldots, T_6$ a *11. ábra* szerint. Válasszunk egy α hegyesszöget, és jelöljük ki a térben azokat a $B_1, \ldots, B_6$ pontokat,



11. ábra. A Brianchon-tétel bizonyítása amelyek felváltva Σ két oldalán helyezkednek el, merőleges vetületük a Σ síkon rendre $A_1, \dots, A_6$, és az $A_iT_iB_i\sphericalangle$ és $A_iT_{i-1}B_i\sphericalangle$ szögek mindegyike α nagyságú. Mivel a körhöz húzott érintő szakaszok egyenlők, mindegyik i indexre $A_iT_i = A_iT_{i-1}$, így az $A_iT_iB_i$ és $A_iT_{i-1}B_i$ derékszögű háromszögek egybevágók, és az $A_iT_iB_i\sphericalangle$ és $A_iT_{i-1}B_i\sphericalangle$ szögek automatikusan egyenlők. (Úgy is mondhatnánk, hogy a hatszög oldalegyeneseit Σ-ra merőlegesen α szöggel megdöntjük, és az így kapott egyeneseknek vesszük a metszéspontjait.)

A Lemmát most a B_1B_4, B_2B_5 és B_3B_6 egyenesekre alkalmazzuk. A B_1B_2 és B_4B_5 egyenesek egymás tükörképei a T_1T_4 szakasz felező merőleges síkjára, ezért egy síkban vannak; ebben a síkban fekszik a B_1B_4 és a B_2B_5 egyenes. Ugyanígy láthatjuk, hogy a B_2B_5 és B_3B_6, illetve a B_3B_6 és B_1B_4 egyenesek egy síkban vannak.

Hátra van még annak ellenőrzése, hogy a B_1B_4, B_2B_5 és B_3B_6 egyenesek nem lehetnek egy síkban; ez nyilvánvalónak látszik, de formálisabban is igazolhatjuk: ha a B_1B_4, B_2B_5 és B_3B_6 egyenesek valamilyen síkban vannak, akkor ebben a síkban vannak a $B_1, \dots, B_6$ pontok, a teljes $B_1 \dots B_6$ töröttvonal, és vele együtt a $T_1, \dots, T_6$ pontok is. A $T_1, \dots, T_6$ pontok síkja csak a Σ lehet, de ez nem lehetséges, mert a B_1 pontokat Σ-n kívül vettük fel.

A Lemma feltételei tehát teljesülnek, ezért a B_1B_4, B_2B_5 és B_3B_6 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak. Ugyanez igaz a merőleges vetületeikre, az A_1A_4, A_2A_5 és A_3A_6 egyenesekre is. Mivel azonban az A_1A_4, A_2A_5 és A_3A_6 átlók közül bármelyik kettő metszi egymást, ez csak úgy lehet, ha a három átló egy ponton megy át.

Ajánlott irodalom

A fenti tételek teljesebb tárgyalásához be kellene vezetnünk a projektív sík és tér „ideális" objektumait, ez most nem volt célunk. Emiatt a tételeket sem mondtuk ki legáltalánosabb formájukban.

Ha valaki szeretne többet tanulni a projektív geometriáról, annak a következő könyveket ajánlom.

[1] Reiman István: *A geometria és határterületei.* Gondolat, Budapest, 1986.

[2] H. S. M. Coxeter: *Projektív geometria.* Gondolat, Budapest, 1986.

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy a 3. ábrán az AG, CE és DF szakaszok egy ponton mennek át.
2. Egy perspektivikus képen, csak egyenes vonalzót használva, hogyan jelölhetünk ki egyenlő szakaszokat egy egyenesen? Hogyan többszörözhetünk, felezhetünk vagy harmadolhatunk egy szakaszt?
3. Vezessük le a Desargues-tételből, hogy a háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át.
4. Az ABC háromszög beírt köre az oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti. Jól ismert, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 Ceva-szakaszok egy ponton, a háromszög

Gergonne-pontján mennek át. Gondoljuk meg, hogy ez a tény a Brianchon-tételnek milyen elfajuló esete, és igazoljuk közvetlenül, térbe kilépéssel is.

5. Az $ABCD$ érintőnégyszög beírt köre az AB, BC, CD, DA oldalakat rendre az E, F, G, illetve H pontban érinti. Mutassuk meg, hogy az AC, BD, EG és FH szakaszok egy ponton mennek át.
6. Legyen $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ érintőhatszög, legyen az A_1A_3 és A_4A_6 egyenesek metszéspontja P, az A_2A_4 és A_5A_1 egyenesek metszéspontja Q, az A_3A_5 és A_6A_2 egyenesek metszéspontja R. Mutassuk meg, hogy a P, Q és R pontok egy egyenesen vannak.

Kós Géza

EGMO beszámoló

Kis csapatunk vasárnap reggel kezdte meg útját Ukrajna fővárosába, Kijevbe. Az út kellemesen telt és már kora délután a szálláson voltunk. Remek helyen laktunk, gyönyörű kilátással a 9. emeletről. Másnap volt lehetőségünk egy kis városnézésre, főleg Kijev belvárosában. Láttunk néhány nagyon érdekes épületet, tornyokat és arany tetejű kék templomokat. Még egy kisebb galériában is körbe néztünk. Ezen a napon került sor a nyitó ceremóniára is, ami a szokásosnál talán kicsit izgalmasabb volt, mivel megismerkedhettünk néhány hagyományos ukrán hangszerrel, amelyeken ukrán népviseletbe öltözött zenekar játszott.

A harmadik és a negyedik nap főleg a versenyről szólt. Az első négy és fél óra alatt egy algebra, egy kombinatorika és egy geometria, míg a második négy és fél óra alatt egy geometria, egy számelmélet és egy kombinatorika feladaton gondolkozhattunk. Összességében nagyon érdekesnek találtam őket, bár a második feladatsor hossza némileg ijesztő volt elsőlátásra. Talán a legjobban az első nap harmadik feladata tetszett, mivel végre hasznos volt észben tartani a jó tanácsot: „egy életem, egy halálom, az inverziót megpróbálom".

A verseny ötödik napján kirándulni voltunk, egy látogatók számára épített ukrán faluban. Az idegenvezetőnk egy népviseletbe öltözött néni volt, aki sokat mesélt nekünk a faluk mindennapjairól, a szokásokról és ünnepekről. Azt is megtanította, hogyan kell a kendőt szépen felkötni a fejünkre. Egyetlen rossz dolog volt a kirándulásban: az idő. Sajnos nagyon hideg volt, az eső is esett, ami majdnem elvette a kedvünket a kirándulástól. Ezt próbálták vendéglátóink orvosolni néhány hagyományos népi játékkal és ukrán néptánc tanításával. A mozgás némileg felmelegítette megdermedt végtagjainkat és visszagondolva nagyon kellemes napot töltöttünk el a fogvacogtató hideg ellenére.

Mire visszaértünk a szállásra, a feladatok nagy része már ki volt javítva és estére az éremhatárok meghatározása is megtörtént. A magyar csapat 2 bronz-, 1 ezüst- és 1 aranyérmet szerzett és az országok listáján 8. (az európaiak listáján 7.) lett.

Az eredménynek mindannyian nagyon örültünk, de a napnak még nem volt vége. Fekete Panna és Kiss Melinda (csapatvezetőnk és csapatvezető helyettesünk) egy különleges programmal készült számunkra. Kipróbálhattuk, milyen az ő helyükben lenni és a diákok pontjaiért küzdeni.

A hatodik napon közösen vettünk részt egy hajókiránduláson, majd a záró ceremónián és végül az utolsó közös vacsorán, melyet egy éjfélig tartó zenés-táncos mulatság zárt le. Ezután már csak összepakoltunk, mivel másnap hajnalban indultunk haza Budapestre.

Összefoglalva az idei EGMO is mókában, izgalmakban és érdekes matek példákban gazdag volt és mindannyian nagyon jól éreztük magunkat.

Kerekes Anna

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a $\cos 2x = 5\cos x - 3$ egyenletet, ha $x \in [-\pi; 2\pi]$. (*5 pont*)

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2\sqrt{\frac{x}{5}} - \sqrt{x+2-\sqrt{x+4}} \geqslant 0$$

egyenlőtlenséget. (*7 pont*)

2. Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ sorozatot korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából. Megállapításainkat igazoljuk. (*11 pont*)

3. Egy baráti társaságban 32 lapos magyar kártyával játszottak. (Itt a „színek": piros, zöld, makk, tök; mindegyik színen belül ász, király, felső, alsó, tízes, kilences, nyolcas, hetes lapok találhatók.) Egyik este Károly feljegyezte, hogy az első tíz osztás alkalmából hány piros lapot kapott. Az 1, 3, 0, 2, 4, 2, 5, 3, 2, 4 adatokat írta fel.

a) Mennyi az átlag, módusz, medián, szórás? (*4 pont*)

Egyszer a piros lap előfordulásának törvényszerűségeit vizsgálták úgy, hogy a jól megkevert pakliból találomra kihúztak egy lapot, feljegyezték, hogy piros-e vagy sem, majd visszatették a többi közé. Ezt összesen nyolcszor végezték el.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 5-ször kaptak pirosat? (*6 pont*)

Később megváltoztatták a húzás módját, ekkor egyszerre vettek ki 8 lapot a megkevert pakliból.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 6 piros lap van közöttük? (*3 pont*)

4. *a*) Van-e olyan másodfokú egyenlet, amelynek egyik gyöke racionális, a másik irracionális szám? (*3 pont*)

b) Van-e olyan egész együtthatós másodfokú egyenlet, amelynek egyik gyöke racionális, a másik irracionális szám? (*6 pont*)

c) Van-e olyan egyszerű gráf, amelynek 8 pontja és 29 éle van? (*3 pont*)

Ha az előbbi kérdésekre igen a válasz, adjunk példát ilyen esetre, ha nem, indokoljuk a választ.

d) Mutassuk meg, hogy az A, B kijelentések tetszőleges logikai értéke esetén $A \vee (A \wedge B) = A$. (*3 pont*)

II. rész

5. Nyári vitorlástábor 26 fiataljának úszásoktatást szerveztek fizikai erőnlétük javítása, vízi biztonságuk erősítése céljából. A táborban gyors-, mell- és hátúszás oktatására volt szakképzett oktató, így a résztvevők e három úszásnemre jelentkezhettek. Mindenkinek legalább egyet választania kellett. 17-en választották a gyorsúszást, 15-en jelentkeztek hátúszásra, 16-an pedig mellúszásra. 8 olyan, gyorsúszást választott fiatal van, aki hátúszásra nem jelentkezett. Azok közül, akik a gyorsot választották, 8-an mellre is jelentkeztek. Csupán ketten választották mindhárom úszásnemet.

a) Hány résztvevő választotta a mell- és hátúszást is? (*7 pont*)

Az oktatás végén a balatonboglári uszodában versenyt rendeztek a táborlakók számára. A leány mellúszás döntőjébe Anna, Bea, Cecília, Dóra, Edit és Flóra került.

b) Hányféleképpen végződhetett a döntő, ha tudjuk, Dóra nem lett dobogós (nem volt az első háromban), de nem is lett utolsó, továbbá Bea megelőzte Flórát, azonban kikapott Edittől? Holtverseny nem volt. (*6 pont*)

A táborzáró estén díjak, jutalmak átadására került sor. A szponzorok három értékes tárgyat sorsolással kívántak kiosztani, ezért a táborozók nevét felírták egy-egy cédulára és ezeket egy urnába dobták, majd a főszponzor kihúzott három cédulát.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom nyertes csak egy úszásnem oktatásán vett részt? (*3 pont*)

6. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-10;6)$, $B(2;-10)$, $C(11;3)$.

a) Írjuk fel a háromszög körülírt körének egyenletét. (*4 pont*)

b) Jelölje O a körülírt kör középpontját, S a súlypontot. Írjuk fel az OS egyenes egyenletét. Milyen helyzetű az OS egyenes az AB egyeneshez viszonyítva? Igazoljuk észrevételünket. (*4 pont*)

c) Hol van a C-n átmenő magasságvonal és a körülírt kör C-től különböző metszéspontja? (*4 pont*)

d) Mekkora a háromszög területe? (*4 pont*)

7. Egy mértani sorozat első négy tagjából rendre 1-et, 2-őt, 5-öt, 11-et elvéve egy számtani sorozat négy szomszédos tagját kapjuk.

a) Mennyi a mértani sorozat első tagja és hányadosa? (*8 pont*)

Számítsuk ki az adott eljárással a számtani sorozat elemeit, majd képzeletben folytassuk mindkét irányba a sorozatot.

b) Van-e ebben a számsorban olyan szomszédos elemekből álló rész, amelyben az elemek összege 2019? Ha igen, adjuk meg az összes megoldást. Indokoljuk a választ. (*8 pont*)

8. Egységsugarú körből megfelelő körcikket kivágva, majd egyenes körkúp palástjának kialakítva tölcsért készítünk.

a) Mekkora a körcikk középponti szöge, ha a tölcsér térfogata a lehető legnagyobb? (*9 pont*)

Rendelkezésre áll egy 10×16 egység oldalú téglalap alakú lemez, amelyből az *a*) részben kapott maximális térfogatú tölcséreket szeretnénk kialakítani.

b) Tudunk-e ebből a lemezből 50 db ilyen tölcsért csinálni? Megállapításunkat indokoljuk. (*7 pont*)

9. Adott az $f(x) = \cos x$ és a $g(x) = \sin 2x$ függvény ($x \in \mathbb{R}$).

a) Írjuk fel a $h(x) = f \circ g$, illetve $k(x) = g \circ f$ függvényeket, állapítsuk meg az értékkészletüket. (*6 pont*)

b) Hol metszi egymást az $f(x)$ és $g(x)$ függvény grafikonja? Adjuk meg a metszéspontok koordinátáit. (*5 pont*)

c) Mekkora e két görbe által közrefogott síkidom területe, ha $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$? (*5 pont*)

Németh László
Fonyód

Megoldásvázlatok a 2019/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Dani kerékpárversenyre készül. Először hegynek felfelé, utána vízszintes terepen, majd lejtőn lefelé hajtja a biciklit, ezután visszafelé ugyanezen az útvonalon hajt végig. Lejtőn lefelé* $60\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, *vízszintes terepen* $40\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, *míg hegynek felfelé* $20\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ *állandó sebességgel képes haladni. Az odafele utat* 1,75 *óra alatt, míg a visszafele utat* 2,25 *óra alatt tette meg. Milyen hosszúak az egyes útszakaszok, ha oda-vissza összesen* 130 km-*t biciklizett?*

(Közben sehol sem állt meg, a visszafordulás időveszteség nélkül zajlódik le.) (*13 pont*)

Megoldás. Jelöljük az egymás után következő utak hosszát (km-ben megadva) rendre a; b; c-vel. Dani az odafelé és a visszafelé vezető úton is először hegynek felfelé, majd vízszintes úton, végezetül lejtőn lefelé halad. Az odafelé vezető úton a, míg a visszafelé vezető úton c km hosszú úton halad hegynek felfelé. Az előbbieket és a $t=\frac{s}{v}$ összefüggést felhasználva kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\text{(I)} \qquad \frac{a}{20}+\frac{b}{40}+\frac{c}{60}=1{,}75,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{c}{20}+\frac{b}{40}+\frac{a}{60}=2{,}25,$$

$$\text{(III)} \qquad 2\cdot(a+b+c)=130,$$

azaz

$$\text{(I)} \qquad 6a+3b+2c=210,$$

$$\text{(II)} \qquad 2a+3b+6c=270,$$

$$\text{(III)} \qquad a+b+c=65.$$

Fejezzük ki a III. egyenletből c-t és helyettesítsük be a másik két egyenletbe. Mivel $c=65-a-b$, ezért

$$(1) \qquad 4a+b=80,$$

$$(2) \qquad 4a+3b=120$$

adódik. Ezt megoldva kapjuk, hogy az egyes útszakaszok $a=15$; $b=20$; $c=30$ km hosszúak.

Ellenőrzés a feladat szövege alapján.

2. *Tekintsük a következő állításokat.*

A: Meg tudunk úgy adni végtelen sok prímet, hogy bármely kettő összege ne legyen prím.

B: Ha az a_n^2 sorozat konvergens, akkor a_n is konvergens.

C: Ha öt különböző természetes szám összege osztható öttel, akkor öttel osztva különböző maradékot adnak.

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (*8 pont*)

b) Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az A állítás igaz, hiszen ha vesszük a páratlan prímeket, azok kielégítik a feltételeket. Nyilván végtelen sok van belőlük, mert végtelen sok prímszám van és az egyedüli páros prím a 2. Másrészt bármely két páratlan prím összege 2-nél nagyobb páros szám, ami biztosan nem prím.

A B állítás hamis, pl. $a_n = (-1)^n$ esetén $a_n^2 = 1$, ami nyilván konvergens, de az $a_n = (-1)^n$ sorozatról tudjuk, hogy nem konvergens.

A C állítás hamis, pl. 5; 10; 15; 20; 25 különböző számok összege osztható öttel, de öttel osztva nem adnak különböző maradékot (sőt, azonos maradékot adnak).

b) A C állítás megfordítása: Ha öt különböző természetes szám öttel osztva különböző maradékot ad, akkor összegük osztható öttel. Ez igaz, hiszen egy szám ötös maradéka 0; 1; 2; 3; 4 lehet, de a feltételek szerint ezek mindegyike fel is lép, méghozzá pontosan egyszer. A maradékok összege 10, ami osztható öttel. Az állítás megfordítása igaz.

3. *a*) *Döntsük el, hogy az implikáció asszociatív művelet-e, azaz tetszőleges A; B; C kijelentések esetén fennáll-e, hogy* $(A \to B) \to C = A \to (B \to C)$. (*4 pont*)

b) *Határozzuk meg azon* $P(x;y)$ *pontok halmazát a derékszögű koordinátarendszerben, amelyek koordinátáira igaz, hogy* $PA^2 + PB^2 = 22$, *ahol* $A(1;2)$ *és* $B(3;0)$. (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Írjuk fel az igazságtáblázatot. Mivel van olyan kiértékelés, amelynél a két állítás logikai értéke nem egyezik meg, ezért a két állítás nem egyezik meg, azaz az implikáció nem asszociatív művelet.

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \to C$	$A \to (B \to C)$
i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h	h
i	h	i	h	i	i	i
h	i	i	i	i	i	i
i	h	h	h	i	i	i
h	i	h	i	h	h	i
h	h	i	i	i	i	i
h	h	h	i	i	h	i

b) Írjuk fel a két pont távolságára vonatkozó összefüggést:

$$PA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \quad \text{és} \quad PB = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}.$$

Mivel $PA^2 + PB^2 = 22$, ezért $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-3)^2 + y^2 = 22$. Ezt kibontva és rendezve azt kapjuk, hogy $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 8 = 0$. Egyszerűsítve 2-vel és teljes négyzeteket kialakítva kapjuk, hogy $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$. Tehát a keresett pontok mértani helye egy kör, melynek középpontja $K(2;1)$ és sugara $r = 3$. Könnyen látszik, hogy a körvonal minden pontja kielégíti a feladat feltételeit.

4. *Legyen A a* $2^x + 2^{1-x} \leqslant 3$ *egyenlőtlenség megoldáshalmaza, B pedig az alábbi két függvény értékkészletének közös része:*

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sin(2019\pi x) \quad \textit{és} \quad g(x) = 4x^2 - 4x + \frac{3}{2}.$$

a) Határozzuk meg az A halmazt. *(5 pont)*

b) Határozzuk meg a megadott függvények értékkészletét és a B halmazt. *(7 pont)*

c) Hány eleme van az $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ halmaznak, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát jelöli? *(2 pont)*

Megoldás. *a)* $2^x + 2^{1-x} \leqslant 3 \ \leftrightarrow\ 2^x + \frac{2}{2^x} \leqslant 3$. Mindkét oldalt szorozzuk meg a $2^x > 0$ kifejezéssel és rendezzük az egyenlőtlenséget. Ekkor az egyenlőtlenség iránya nem változik meg, hiszen pozitív kifejezéssel szoroztunk.

$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$, vezessük be az $a = 2^x > 0$ ismeretlent. Az $a^2 - 3a + 2 \leqslant 0$ egyenlőtlenség megoldása: $1 \leqslant a \leqslant 2$. Most írjuk vissza $a = 2^x$-t. Az $f(x) = 2^x$ függvény szigorúan monoton nő, ezért az $1 \leqslant 2^x \leqslant 2$ egyenlőtlenség megoldása: $x \in [0; 1]$.

Tehát $A = [0; 1]$.

b) Mivel $\forall\, t \in \mathbb{R}$ esetén $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$, ezért $-1 \leqslant \sin(2019\pi x) \leqslant 1$, így az f függvény értékkészlete: $R_f = \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$. A g függvényt teljes négyzetté alakítjuk:

$$g(x) = 4x^2 - 4x + \frac{3}{2} = 4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

így $R_g = \left[\frac{1}{2}; \infty\right[$. Innen $R_f \cap R_g = \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$.

Tehát $B = \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$.

c) Látható, hogy $A \setminus B = \left[0; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{2}{3}; 1\right]$. Innen kapjuk, hogy $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z} = \{0; 1\}$, ennek a halmaznak pedig két eleme van.

II. rész

5. *a) Egyik este Anna, Bea, Csilla, Dóra és Emese elmentek vacsorázni a közeli pizzázóba. Mindannyian másféle pizzát rendeltek. A pincér még új, így a rendelt ételeket véletlenszerűen osztotta ki a lányoknak (de azokat hozta ki, amiket rendeltek). Jelölje X azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy hányan kapták a saját rendelésüket. Határozzuk meg X várható értékét.* *(8 pont)*

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán:

$$2^n - 1 = m^2. \qquad (8\ pont)$$

Megoldás. *a)* Könnyen látható, hogy X értékkészlete a $\{0; 1; 2; 3; 5\}$ halmaz. Ezek valóban megvalósíthatók. Az X nyilván nem veheti fel a 4 értéket, mert ha 4 pizzát a megfelelő személy kap, akkor az ötödiket is csak az azt megrendelő személy kaphatja. A pincér összesen $5! = 120$ különböző módon oszthatja ki a pizzákat, így $P(X = 5) = \frac{1}{120}$.

$P(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}}{120} = \frac{10}{120}$, mivel ki kell választani azt a 3 főt, akik jó pizzát kapnak és a másik 2 ember csak egyféleképpen nem kaphatja a sajátját.

$P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}\cdot 2}{120}=\frac{20}{120}$, mivel ki kell választani azt a 2 főt, akik jó pizzát kapnak és a másik 3 embernél kétféleképpen történhet meg az, hogy senki sem kapja a saját rendelését. Ugyanis jelöljük pl. A; B; C-vel azokat az embereket, akik az a; b; c pizzákat rendelték és egyikük sem kapta a sajátját. Ennek lehetőségei:

A	b	c
B	c	a
C	a	b

$P(X=1)=\frac{\binom{5}{1}\cdot 9}{120}=\frac{45}{120}$. Itt egyedül a 9-et érdemes magyarázni az alábbi táblázattal:

A	b	b	b	c	c	c	d	d	d
B	a	c	d	a	d	d	a	c	c
C	d	d	a	d	a	b	b	a	b
D	c	a	c	b	b	a	c	b	a

A várható érték kiszámolásához $P(X=0)$ értékére nincs szükségünk, ugyanis

$$E(X)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)+3\cdot P(X=3)+$$
$$+5\cdot P(X=5)=$$
$$=0+1\cdot\frac{45}{120}+2\cdot\frac{20}{120}+3\cdot\frac{10}{120}+5\cdot\frac{1}{120}=1.$$

Megjegyzések. $P(X=0)$ értéke többféle módon is meghatározható.

1. Tudjuk, hogy $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=5)=1$, hiszen ezek eloszlást alkotnak. Innen $P(X=0)=\frac{44}{120}$ adódik.

2. Lényegében azt kell meghatározni $P(X=0)$ esetén, hogy mennyi a kedvező esetek száma. Ezen esetek száma valójában azt adja meg, hogy öt elemnek hány olyan permutációja van, amikor semelyik sem kerül a helyére, ún. fixpontmentes. Ismert az alábbi összefüggés n elem fixpontmentes permutációinak számára:

$$n!\cdot\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Itt n helyére 5-öt helyettesítve éppen 44-et kapunk eredményül.

3. A 44-et másképpen is megkaphatjuk. Gondoljuk meg, hogy pl. Anna a pizzája hány helyre kerülhet: 4 helyre. Kerüljön pl. Beához. Ezen belül vizsgálunk két lényegesen eltérő esetet aszerint, hogy Bea b pizzája hová kerül.

i) Ha Bea b pizzája Annához kerül. Ekkor lényegében arról van szó, hogy Anna kapta Bea pizzáját és viszont. Így azt kell megválaszolni, hogy hány olyan eset van, amikor Csilla, Dóra és Emese egyike sem kapja a saját pizzáját. Ebből 2 eset van, ezt már láttuk. Ekkor összesen $4\cdot 2=8$ jó esetünk van.

ii) Ha Bea b pizzája nem Annához kerül. Ekkor 4 embernek kell kiosztani 4 pizzát úgy, hogy mindegyiknél pontosan 1 pizza van tiltva, hogy odakerüljön. Ezen eseteket is megszámoltuk már, ezekből 9 eset van. Ekkor összesen $4\cdot 9=36$ jó esetünk van.

Tehát összesen $8+36=44$ jó eset van.

4. Ha d_n-nel jelöljük a fixpontmentes permutációk számát n elem esetén, akkor teljesül az alábbi rekurzió: $d_1=0$; $d_2=1$; $d_n=(n-1)\cdot d_{n-1}+(n-1)\cdot d_{n-2}$, $n\geqslant 3$ esetén.

b) Mivel $n\in\mathbb{N}^+$, ezért 2^n-1 páratlan, így m^2 is páratlan, tehát m páratlan.

Legyen $m=2k+1$, ahol $k\in\mathbb{N}$. Egyenletünk az alábbi alakot ölti: $2^n-1=(2k+1)^2$, ahonnan $2^n=4k^2+4k+2$. A jobb oldali kifejezés 4-gyel osztva (sőt 8-cal osztva is) 2 maradékot ad. Ha $n\geqslant 2$, akkor $4\mid 2^n$. Ekkor nem kapunk megoldást. Tehát, ha van megoldás, az csak akkor lehet, ha $n=1$. Ha $n=1$, akkor $m=1$.

Ez valóban megoldása az egyenletnek.

6. *a*) *Egy derékszögű háromszög beírt és köré írt körének sugarát jelölje r és R. Mekkorák a háromszög oldalai, ha tudjuk, hogy $r+R=31$ és $rR=150$?* (*8 pont*)

b) *Egy szabályos ötszög mindegyik oldalát kiszínezzük három adott szín valamelyikével. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha két színezést nem tekintünk különbözőnek, ha forgatással egymásba vihetők?* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Megoldjuk az

$$\text{(I)}\qquad r+R=31,$$
$$\text{(II)}\qquad rR=150$$

egyenletrendszert. Mivel $R=31-r$, ezért $r(31-r)=150$, innen $r_1=25$; $r_2=6$ és $R_1=6$; $R_2=25$ adódik. Derékszögű háromszögben teljesül, hogy $r=\frac{a+b-c}{2}$ és $R=\frac{c}{2}$. A továbbiakban két esetet vizsgálunk meg.

1. eset: Ha $r=25$ és $R=6$. Érezhető, hogy ekkor nem fogunk megoldást kapni, de ezt igazoljuk is. $\frac{a+b-c}{2}=25$ és $\frac{c}{2}=6$, így $c=12; a+b=62$.

Pitagorasz tétele szerint $a^2+b^2=c^2=144$, így mivel $b=62-a$, az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk, melynek nincs valós megoldása: $a^2-62a+1850=0$.

2. eset: Ha $r=6$ és $R=25$. Ekkor $\frac{a+b-c}{2}=6$ és $\frac{c}{2}=25$, így $c=50$; $a+b=62$.

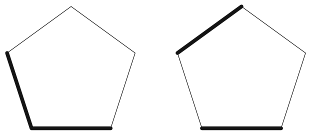
Pitagorasz tétele szerint $a^2+b^2=c^2=2500$, továbbá $b=62-a$. Az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk: $a^2-62a+672=0$.

Így $a_1=14$; $a_2=48$ adódik, melyekre a $b_1=48$; $b_2=14$ értékeket kapjuk. Tehát a háromszög oldalai: 14; 48; 50, melyek valóban kielégítik a feladat feltételeit.

b) Legyen a három szín pl. piros, kék és zöld. Aszerint fogunk eseteket vizsgálni, hogy a színezés során hány különböző színt használunk.

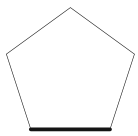
1. eset: Ha 1 színt használunk. Ekkor nyilván 3 jó színezés van.

2. eset: Ha 2 színt használunk. Először eldöntjük, hogy melyik 2 színt használjuk, erre $\binom{3}{2}=3$ lehetőségünk van. Legyen pl. piros és kék. Ezekből rendre $4+1$; $3+2$; $2+3$ vagy $1+4$ színelosztás lehetséges. A $4+1$ és $1+4$ elosztások mindegyikéből csak 1 lehetőség van a forgásszimmetria miatt. A $3+2$ és $2+3$ elosztásokból a forgásszimmetria miatt rögzítsük a 2 egyforma színűből az egyiket, pl. a szabályos ötszög „talpa” legyen piros. A másik piros helyére 2 lehetőségünk van, ezeket az alábbi *ábrák* mutatják:



Tehát a 2. esetben összesen $\binom{3}{2}\cdot(2+2\cdot 2)=18$ jó színezés van.

3. eset: Ha 3 színt használunk. Ezekből $3+1+1$ vagy $2+2+1$ színelosztás lehetséges. A $3+1+1$ elosztásnál először eldöntjük, hogy melyik színből használunk hármat, erre $\binom{3}{1}=3$ lehetőségünk van. Legyen pl. piros, ekkor 3 piros, 1 kék és 1 zöld színt használunk fel. A forgásszimmetria miatt rögzítsük a zöld helyét, legyen az ötszög „talpa” zöld színű.



Ekkor a maradék 4 hely bármelyike lehet kék színű és mindegyik különböző esetet jelent. Így a $3+1+1$ elosztásból összesen $\binom{3}{1}\cdot 4=12$ jó színezés van.

A $2+2+1$ elosztásnál először eldöntjük, hogy melyik színből használunk egyet, erre $\binom{3}{1}=3$ lehetőségünk van. Legyen pl. piros, ekkor 1 piros, 2 kék és 2 zöld színt használunk fel. A forgásszimmetria miatt rögzítsük a piros helyét, ismét legyen az ötszög „talpa” piros színű. Ekkor, ha a maradék 4 helyet bárhogyan is színezzük 2 kékkel és 2 zölddel, mindig különböző eseteket kapunk. Erre $\binom{4}{2}=6$ lehetőség van. Így a $2+2+1$ elosztásnál összesen $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}=18$ jó színezés van.

Tehát összesen $3+18+12+18=51$ jó színezése van az ötszögnek.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy ha egy szabályos p-szöget a feladatbeli feltételeknek megfelelően színezünk a darab színnel, ahol p prím, akkor a jó színezések száma $\frac{a^p-a}{p}+a$.

7. *a) A lappföldi Mikulásnak két rénszarvasa van: Vágta és Éppenhogycsak. Ha valamelyik nap Vágta egyedül x sebességgel ($x>1$) húzná a szánt, akkor Éppenhogycsakot melléfogva az még $1/x$ sebességet tud hozzáadni. A Mikulás már öreg, emiatt ijedős. Minél gyorsabban megy a szán, annál többször fogja vissza az állatokat. A precíz mérések szerint, ha Vágta x sebességgel húzná a szánt, akkor ez éppen $\ln x$ sebességcsökkenést eredményez. Egyszer egy ellenőrzésnél azzal vádolják meg a Mikulást, hogy lassan hajtott. Lappföldön a lassúhajtás határa $7/4$. Meg tudja-e védeni magát a Mikulás?*

(Használjuk fel, hogy $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.) *(9 pont)*

b) A sakk egy érdekes változata az ún. Fischer random sakk, melyet Robert Fischer amerikai világbajnok hozott létre 1996-ban. A lényegi eltérés a tisztek (király (K), vezér (V), 2 bástya (B), 2 huszár (H), 2 futó (F)) elhelyezkedésében rejlik.

Az alapállás szabályai:

- *A király a bástyák között foglal helyet.*
- *A futók ellentétes színű mezőn állnak.*

A felsorolt tiszteket az alábbi 1×8*-as táblázatba kell elhelyezni (az* ábrán *egy helyes kitöltés látható):*

F	**H**	**B**	**F**	**H**	**K**	**B**	**V**

Az azonos minőségű tisztek között (pl. két huszár stb.) csak a futóknál van megkötés arra, hogy szükségszerűen különböző színen kell állniuk.

Mutassuk meg, hogy 960 *megengedett alapállás lehetséges a Fischer random sakkban.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A Mikulás akkor tudja magát megvédeni, ha $\forall x\in\,]1;\infty[$ esetén $x+\frac{1}{x}-\ln x>1{,}75$. Vezessük be az $f:\,]1;\infty[\,\to\mathbb{R}$; $f(x)=x+\frac{1}{x}-\ln x$ függvényt. A függvényvizsgálatot deriválás segítségével végezzük el. Egy differenciálható függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $f'(x)=0$.

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=0\ \to\ x^2-x-1=0;$$

$x_1=\frac{1+\sqrt5}{2}\approx 1{,}618$; $x_2=\frac{1-\sqrt5}{2}\approx -0{,}618$. Minket csak az $\frac{1+\sqrt5}{2}$ érdekel, mert $D_f=\,]1;\infty[$. Mivel $f''(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}>0$, $\forall\,x\in\,]1;\infty[$ esetén, így az f függvénynek $x=\frac{1+\sqrt5}{2}$ helyen helyi minimuma van.

$$f\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)=\frac{1+\sqrt5}{2}+\frac{1}{\frac{1+\sqrt5}{2}}-\ln\frac{1+\sqrt5}{2}\approx 1{,}7549>1{,}75.$$

Tehát a Mikulás biztosan gyorsabban hajtott, mint $\frac{7}{4}$, így képes magát megvédeni.

b) Először a futóknak keressük meg a helyüket. Erre $4\cdot 4=16$ lehetőség van, hiszen a világos és sötét mezejű futóknak egymástól függetlenül 4 lehetséges helye van. A maradék 6 helyből megkeressük, hogy hányféleképpen foglalhat helyet a 2 bástya és a király. Ezen figuráknak az egymáshoz való elrendezése rögzített, hiszen a király a 2 bástya között van, továbbá a bástyák között nincs kitüntetettség. Ezek elhelyezésére $\binom{6}{3}=20$ lehetőség van. A maradék 3 helyre a vezért és a 2 huszárt kell elhelyezni. Ezt nyilván $\binom{3}{1}=3$-féle módon tehetjük meg. Tehát a figurák elhelyezésére valóban $4\cdot 4\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}=960$ lehetőség van.

8. *a*) *Egy tizenkét elemű, egész számokból álló mintából ismerünk hét értéket:* 4; 4; 4; 5; 7; 9; 13. *Tudjuk, hogy a minta egyetlen módusza* 5 *és a minta átlagának szórás sugarú környezete három tizedesjegyre kerekítve* $]\bar{x}-\sigma;\bar{x}+\sigma[\,=\,]3{,}292;8{,}708[$. *Határozzuk meg a minta hiányzó öt elemét.* (*8 pont*)

b) *Egyenlő szárú háromszög szára* 13 cm, *alapja* 24 cm. *Számítsuk ki a háromszög súlypontjának a háromszög köré írható kör középpontjától való távolságát.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) A minta módusza 5 és van 3 darab 4-es benne, ezért az 1 darab 5-ös mellett még biztosan van legalább 3 darab 5-ös. Tehát a minta az alábbi módon néz ki: 4; 4; 4; 5; 7; 9; 13; 5; 5; 5; x; y, ahol x, $,y \in \mathbb{Z}$. Tudjuk, hogy $\bar{x}-\sigma=3{,}292$ és $\bar{x}+\sigma=8{,}708$. Ezért $\bar{x}=6$ és $\sigma=2{,}708$. Mivel $\bar{x}=6$, ezért $\frac{3\cdot4+4\cdot5+7+9+13+x+y}{12}=$ $=6$, ahonnan $x+y=11$ adódik. Mivel $\sigma=2{,}708$, ezért

$$\sigma^2=2{,}708^2=$$

$$=\frac{3\cdot(6-4)^2+4\cdot(6-5)^2+(6-7)^2+(6-9)^2+(6-13)^2+(6-x)^2+(6-y)^2}{12},$$

innen $(6-x)^2+(6-y)^2=13$.

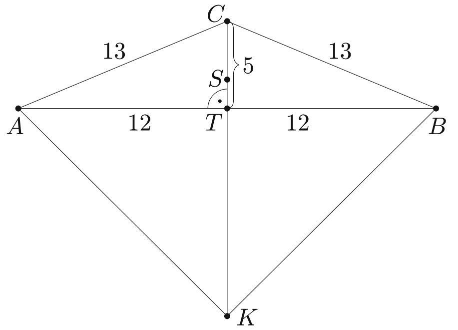
Tehát meg kell oldani az

(I) $$x+y=11,$$

(II) $$(6-x)^2+(6-y)^2=13$$

egyenletrendszert az egész számok halmazán. Az $y=11-x$ összefüggést beírva a másik egyenletbe, kibontva és rendezve az alábbit kapjuk: $x^2-11x+24=0$. Innen adódik, hogy $x_1=3$; $x_2=8$ és $y_1=8$; $y_2=3$. Tehát a minta hiányzó öt eleme: 3; 5; 5; 5; 8, ezzel a rendezett minta az alábbi módon néz ki: 3; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 7; 8; 9; 13.

Ellenőrzés a feladat szövege alapján.



b) Készítsünk *ábrát* a feladathoz. Mivel $13^2+13^2<24^2$, ezért a feladatban szereplő háromszög tompaszögű, így a háromszög köré írt kör középpontja a háromszögön kívül helyezkedik el. Szimmetriaokok miatt a K köré írt kör középpont rajta van a C-ből induló magasságvonalon. A háromszög alaphoz tartozó magassága Pitagorasz tétele miatt 5 cm hosszú, melyet a súlypont harmadol, ezért $TS=\frac{5}{3}$ cm. A háromszög területe $T=\frac{24\cdot5}{2}=60$ cm^2, köré írt körének sugara $R=\frac{abc}{4T}=16{,}9$ cm. Mivel $R=KC=16{,}9$ cm és $SC=\frac{10}{3}$ cm, így a keresett KS távolság $16{,}9-\frac{10}{3}=\frac{407}{30}\approx$ $\approx 13{,}57$ cm.

9. *a*) *Bence nemrég tanulta az iskolában a szinusztételt és a koszinusztételt. Sajnos rosszul emlékezett rájuk és azokat az alábbi módon jegyezte meg (a jelölések a szokásosak):*

$$c^2=a^2+b^2+2ab\cdot\sin\gamma \quad \textit{és} \quad \frac{a}{b}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyre igazak a Bence által megtanult összefüggések? *(7 pont)*

b) *Határozzuk meg az a; b; c egész paraméterek értékét úgy, hogy az* $f(x)=$ $=ax^2+bx+c$ *egyenletű parabola az alábbi feltételek mindegyikét teljesítse.*

1. $f'(3) = -11$.

2. $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

3. *Csúcspontja illeszkedik az* $y = \frac{1}{2}x + 1$ *egyenletű egyenesre.* (*9 pont*)

Megoldás. *a*) A koszinusztétel szerint $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$, ezt összevetve Bence formulájával azt kapjuk, hogy $2ab \cdot \sin\gamma = -2ab \cdot \cos\gamma$. Mivel $a; b > 0$, ezért $\sin\gamma = -\cos\gamma$ adódik. Ha $\cos\gamma = 0$ lenne, akkor $\sin\gamma = 0$ adódna, de ez ellentmond a $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$ összefüggésnek. Tehát $\cos\gamma \neq 0$, így oszthatunk vele. Azt kapjuk, hogy $tg\gamma = -1$, innen $\gamma = 135^\circ$ (mivel háromszög belső szögéről van szó). A sinustétel szerint $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, ezt összevetve Bence formulájával azt kapjuk, hogy $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. Innen $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, azaz $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Mivel háromszög belső szögeiről van szó, ezért $\alpha = \beta$.

Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, $\gamma = 135^\circ$ és $\alpha = \beta$, ezért $\alpha = \beta = 22{,}5^\circ$ adódik.

Tehát a háromszög szögei $22{,}5^\circ$; $22{,}5^\circ$; 135°.

Megjegyzés. Az alábbi befejezést is választhattuk volna. A koszinusztételből $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ és $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, így

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}.$$

Innen $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2} \to a = b$. Mivel $a = b$, ezért $\alpha = \beta$. Innentől ugyanúgy fejezhető be a feladat, mint előbb.

b) Mivel $f(x) = ax^2 + bx + c$, ezért $f'(x) = 2ax + b$, így $f'(3) = 6a + b = -11$. A 2. feltétel szerint

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{d}x = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_{-1}^{1} = \frac{2a}{3} + 2c = \frac{2}{3},$$

innen $a + 3c = 1$. Ismert, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolának $x = -\frac{b}{2a}$ helyen van szélsőértéke, mely egyben csúcspontjának x-koordinátája is. Mivel $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2+4ac}{4a}$, ezért a parabola csúcspontjának koordinátái: $T\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$, így a 3. feltétel miatt $\frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{b}{4a} + 1$, azaz $b^2 + 4a = b + 4ac$. Feladatunk megoldani az alábbi egyenletrendszert az egész számok halmazán:

(I) $\qquad 6a + b = -11,$

(II) $\qquad a + 3c = 1,$

(III) $\qquad b^2 + 4a = b + 4ac.$

Mivel $b = -6a - 11$ és $c = \frac{1-a}{3}$, ezért a III. egyenlet így alakul:

$$(-6a - 11)^2 + 4a = -6a - 11 + 4a \cdot \frac{1-a}{3}.$$

Ezt összevonva, majd rendezve az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$56a^2 + 211a + 198 = 0.$$

A gyökök: $a_1 = -2$; $a_2 = \frac{-99}{56}$. Mivel $a; b; c \in \mathbb{Z}$, ezért csak $a = -2$ lehet jó. Ekkor $b = 1$ és $c = 1$. Tehát $a = -2$; $b = 1$; $c = 1$.

Ellenőrzés a feladat feltételei alapján.

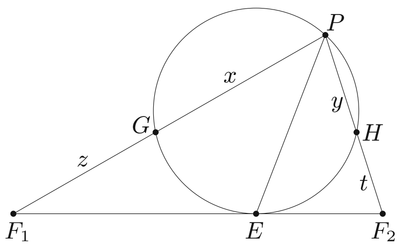
Fridrik Richárd
Szeged

Matematika feladat megoldása

B. 5026. *Adott ellipszis nagytengelyének végpontjaitól különböző tetszőleges P pontját kössük össze az F_1, F_2 fókuszpontokkal. Az $F_1PF_2\sphericalangle$ szögfelezője E-ben metszi F_1F_2-t. A P-n átmenő, F_1F_2-t E-ben érintő kör PF_1-et G-ben, PF_2-t H-ban metszi. Mutassuk meg, hogy GH hossza nem függ P megválasztásától.*

(*4 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

Megoldás. Legyen $PG = x$, $PH = y$, $GF_1 = z$, $HF_2 = t$. A szokásos jelölésekkel $F_1F_2 = 2c$, $PF_1 + PF_2 = 2a$, ahol $2a$ az ellipszis nagytengelyének, $\sqrt{a^2 - c^2} = b$ pedig a fél kistengelyének a hossza. A szögfelező-tétel alapján



$$F_1E = 2c \cdot \frac{x+z}{x+z+y+t} = 2c \cdot \frac{x+z}{2a}, \quad \text{és}$$

$$F_2E = 2c \cdot \frac{y+t}{x+z+y+t} = 2c \cdot \frac{y+t}{2a}.$$

Az F_1, illetve az F_2 pontnak a körre vonatkozó hatványa:

$$z(x+z) = F_1E^2 = \left(2c \cdot \frac{x+z}{2a}\right)^2, \quad \text{illetve} \quad t(y+t) = F_2E^2 = \left(2c \cdot \frac{y+t}{2a}\right)^2.$$

Innen

$$z = (x+z)\frac{c^2}{a^2} \quad \text{és} \quad t = (y+t)\frac{c^2}{a^2},$$

azaz egyrészt

$$x\frac{c^2}{a^2} = z\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = z\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{így} \quad x = z\frac{b^2}{c^2};$$

másrészt hasonlóan

$$y\frac{c^2}{a^2} = t\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = t\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{így} \quad y = t\frac{b^2}{c^2}.$$

Innen $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \frac{x+z}{y+t}$, tehát a PGH háromszög hasonló a PF_1F_2 háromszöghöz, a hasonlóság aránya

$$\frac{x}{x+z} = \frac{z\frac{b^2}{c^2}}{z\frac{b^2+c^2}{c^2}} = \frac{b^2}{b^2+c^2}.$$

Ezért

$$GH = F_1F_2 \cdot \frac{b^2}{b^2+c^2} = 2c \cdot \frac{b^2}{b^2+c^2},$$

ami valóban független a P pont választásától.

Geretovszky Anna (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 11. évf.)

26 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 23 versenyző: Baski Bence, Beke Csongor, Bencsik Ádám, Csaplár Viktor, Geretovszky Anna, Győrffi Ádám György, Hámori Janka, Hegedűs Dániel, Jánosik Áron, Nagy Nándor, Nguyen Bich Diep, Osztényi József, Rareş Polenciuc, Sándor Péter, Sebestyén Pál Botond, Szabó Kornél, Telek Zsigmond, Tiderenczl Dániel, Tóth Ábel, Várkonyi Zsombor, Velich Nóra, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 2 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.

Polygon pályázat matematikából középiskolásoknak

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete pályázatot hirdet középiskolás diákok (9–12. évfolyam) számára.

A pályázat témája:

Középiskolai matematikához kapcsolódó problémák, érdekességek

Ami biztosan ide tartozik: hogyan lehet egy ismert feladatot folytatni, újszerű és érdekes feladatok vagy trükkös megoldások, régi korok matematikája, hétköznapok matematikája, a matematika és a természettudományok kapcsolata, gyakorlati alkalmazások, informatikai alkalmazások és kapcsolatok (például algoritmusok) stb. Pályázni egyénileg lehet, vagy maximum 3 fős csapattal. A pályamunkákat a Bolyai Intézet oktatóiból álló zsűri fogja elbírálni.

Díjak (csapat esetén a jutalom megoszlik a tagok közt):
I. díj: 25 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
II. díj: 20 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
III. díj: 15 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
Dicséret: Polygon könyv.

A díjazottak és a dicséretben részesültek oklevelet kapnak, amelyen a helyezésüket is feltüntetjük. A pályázó(k) által megnevezett felkészítő tanár(ok) a díjazottakkal és a dicséretben részesültekkel azonos jutalomban és szintén oklevélben részesülnek. Minden pályamunkáról szöveges szakmai értékelést készítünk, amit a díjkiosztó ünnepségen vehetnek át a versenyzők. A legjobb dolgozatokat a Polygon c. folyóirat szerkesztőbizottsága is megvizsgálja közölhetőség szempontjából. A beadott dolgozatok maximális terjedelme 10 oldal lehet (ábrákkal, képekkel, táblázatokkal, grafikonokkal együtt).

Beküldési határidő: **2019. december 15.** A pályamunkákat a következő címre kérjük beküldeni: Katonáné dr. Horváth Eszter egyetemi docens, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1. A borítékra kérjük ráírni: Polygon pályázat matematikából, középiskolásoknak. A dolgozatokhoz az alábbi adatok mellékelését kérjük:

1. a pályázó(k) neve, lakcíme, telefonszáma, email címe,
2. a pályázó(k) iskolájának neve, címe, telefonszáma, email címe,
3. a felkészítő tanár(ok) neve, email címmel.

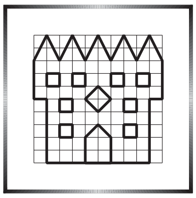
`http://www.math.u-szeged.hu/~horvath/palyazat.htm`.

Felhívás feladatjavaslat küldésre a NMMV-re

A 29. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 2020. márciusában a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium szervezésében kerül megrendezésre. Kérjük a matematika tanárokat, hogy feladatjavaslat küldésével támogassák a versenyt. A versenyfeladat-javaslatokat megoldással, pontozási útmutatóval és évfolyam megjelölésével együtt elektronikus formában a `nmmv2020@gmail.com` címre várjuk legkésőbb **2020. január 31**-ig.

Köszönjük:

a Szervezők



A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (629–633.)

K. 629. Hét kiskacsa slattyog a tó felé egymás mögött: Lópi, Hápi, Tápi, Kepi, Bipi, Pepi és Szipi. Minden nap ugyanabban a sorrendben szoktak menni, de most fordított sorrendben sorakoztak föl egymás mögött. A következőket tudjuk a jelenlegi sorrendjükről:

A Lópi előtt menő kacsák hatféle sorrendben rendeződhetnének egyes oszlopba.

Bipi előtt feleannyian mennek, mint mögötte.

Pepi és Tápi között egy híján kétszer annyi kacsa megy, mint Szepi és Hápi között.

Kepi mögött megy Hápi és Tápi is.

Milyen sorrendben szoktak haladni a kacsák a tóra?

K. 630. Egy parti végén, mikor már mindenki indul hazafelé, a nők a nőkkel, a férfiak a férfiakkal kezet fognak. A búcsúzkodás közben betoppan a házigazda egyik barátja, aki mindazokkal kezet fog (férfiakkal és nőkkel is), akiket ismer. Összesen 83 kézfogás történt. Tudjuk, hogy a partin résztvevő férfiak közül 5-nek ott volt a felesége is. Hány embert ismerhet a házigazda betoppanó barátja?

K. 631. Indokoljuk lépésről lépésre, hogy igaz a következő állítás: ha tíz pozitív egész szám szorzata három nullára végződik, akkor van közöttük hat olyan szám, amelyek szorzatára ugyanez teljesül.

K. 632. Egy apa egy kosár szilvát osztott szét a fiai között a következő módon: az elsőnek adott 2-t, és a maradék n-ed részét, a másodiknak 4-et és a maradék n-ed részét, a harmadiknak 6-ot és a maradék n-ed részét, és így tovább. Az utolsó részt magának tartotta meg. Az osztozkodás végére az derült ki, hogy mindenki egyforma mennyiségű szilvát kapott. Mennyi legyen n értéke, hogy a fenti osztozkodás megvalósítható legyen, ha legalább 2 fia van az apának?

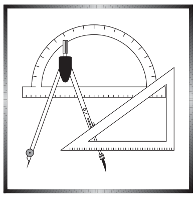
K. 633. Dorka gondolt egy egész számra, amely legalább 3 és legfeljebb 25. Annának megmondta, hogy az a szám négyzetszám-e, prím-e, és 5 többszöröse-e. Anna a válaszokból már egyértelműen tudta, hogy Dorka melyik számra gondolt. Melyik számra gondolhatott Dorka?

❄

Beküldési határidő: 2019. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1560–1566.)



Feladatok 10. évfolyamig

C. 1560. Egy iskola hat osztálya kirándulni megy Pécsre, Szegedre, Debrecenbe vagy Miskolcra. (Egy osztály csak egy városba látogat el.) Mindegyik helyszínre legalább egy osztálynak kell utaznia. Hányféleképpen választhatnak úti célt?

C. 1561. Mekkorák lehetnek egy háromszög szögei, ha a háromszögbe írt kör érintési pontjai által meghatározott háromszög hasonló az eredetihez?

Feladatok mindenkinek

C. 1562. Bizonyítsuk be, hogy ha az n egész szám esetén n^2+1 osztható 5-tel, akkor az $(n-1)^2+1$ és $(n+1)^2+1$ számok közül az egyik szintén osztható 5-tel.

C. 1563. Egy félszabályos háromszöget elforgatunk a derékszögű csúcsa körül 30°-kal, majd újra 30°-kal. Mekkora a három háromszög közös része által alkotott síkidom területe? (Félszabályosnak hívunk egy háromszöget, ha szögei 30°, 60°, illetve 90°.)

C. 1564. Egy 6×6-os négyzetrácsot rácsvonalak mentén n darab különböző területű téglalapra bontottunk föl. Adjunk példát a fölbontásra minden lehetséges $n > 1$ érték esetén.

Feladatok 11. évfolyamtól

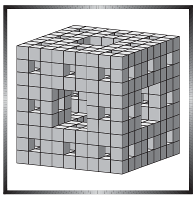
C. 1565. Egy trapéz oldalai (valamilyen sorrendben) 2, 3, 5, illetve 6 egység hosszúak. Adjuk meg a területének lehető legnagyobb értékét.

C. 1566. Kétgyermekes családok körében gyakoribb-e az, hogy a testvérek különböző neműek, mint az, hogy azonos neműek? (Feltesszük, hogy minden gyermeknél p a valószínűsége annak, hogy fiú születik.)

❄

Beküldési határidő: 2019. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5046–5053.)

B. 5046. Legyen $n \geqslant 3$, és tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai az (i,j) rácspontok, ahol $1 \leqslant i,j \leqslant n$, és a különböző (i,j) és (k,l) pontokat akkor kötjük össze éllel, ha $i^2+j^2+k^2+l^2$ osztható 3-mal. Mely n-ekre lehet a gráf éleit úgy bejárni, hogy mindegyik élen pontosan egyszer haladunk át?

(*4 pont*) Javasolta: *Pálfy Máté* (Budapest)

B. 5047. Az ABC derékszögű háromszögben a D pont az AC befogó belsejében, az E pont az AB átfogó B-n túli meghosszabbításán helyezkedik el. Az ADE és a BCE kör második, E-től különböző metszéspontja F. Mutassuk meg, hogy $CFD\sphericalangle = 90°$.

(*4 pont*)

B. 5048. Egy konvex sokszög alapú gúla oldallapjainak területe egyenlő. Válasszuk ki az alaplap egy tetszőleges pontját, majd tekintsük a pontnak az oldallapoktól vett távolságainak az összegét. Bizonyítsuk be, hogy ez az összeg nem függ a pont választásától.

(*3 pont*) (*Horvát feladat*)

B. 5049. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan pozitív egész (a,b) pár létezik, amelyre

$$2019<\frac{2^a}{3^b}<2020.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5050. Oldjuk meg a

$$\cos 3x+\cos^2 x=0$$

egyenletet.

(*3 pont*)

B. 5051. Az $ABCD$ négyszög oldalai $AB=8$, $BC=5$, $CD=17$ és $DA=$ $=10$. Az AC és BD átlók metszéspontja E, $BE:ED=1:2$. Mekkora a négyszög területe?

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5052. Kezdő és Második egy kezdetben üres 19×19-es táblázat mezőibe ír felváltva egy-egy számot, 0-t vagy 1-et. Amikor már az összes mező ki van töltve, kiszámolják a sorösszegeket és az oszlopösszegeket. A legnagyobb sorösszeg legyen A, a legnagyobb oszlopösszeg pedig B. Ha $A>B$, akkor Kezdő nyer; ha $A<B$, akkor Második; ha pedig $A=B$, akkor döntetlen a játék eredménye. Van-e valakinek nyerő stratégiája?

(*6 pont*)

B. 5053. Az $ABCD$ tetraéder beírt gömbjét jelölje G, a BCD laphoz írt gömbjét G_A. A G lapsíkokon levő érintési pontjai által meghatározott tetraéder legyen T, míg G_A lapsíkokon levő érintési pontjai által meghatározott tetraéder legyen T_A. Mutassuk meg, hogy a gömbök és a tetraéderek térfogataira

$$\frac{V^3(T)}{V^3(T_A)}=\frac{V^2(G)}{V^2(G_A)}.$$

(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2019. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (758–760.)

A. 758. Az $ABCD$ négyszögben $AB=BC=\frac{1}{\sqrt{2}}DA$, és az $ABC\sphericalangle$ derékszög. A BC szakasz felezőpontja E, C merőleges vetülete AD-re F, és B merőleges vetülete CD-re G. A H középpontú BCF kör és a BG egyenes 2. metszéspontja K, a BHC kör és a HK egyenes 2. metszéspontja L. BL és CF metszéspontja M. A BFM háromszög Feuerbach-körének középpontja N. Bizonyítsuk be, hogy a $BNE\sphericalangle$ derékszög.

Javasolta: *Fehér Zsombor* (Cambridge)

A. 759. Véletlenszerűen kiválasztjuk (egyenletes eloszlással) az $1,2,\ldots,n$ számok egy permutációját. Bizonyítandó, hogy a permutációban a leghosszabb növő részsorozat hosszának várható értéke legalább $\sqrt{n}$.

Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

A. 760. Egy bűvész és a segédje a következő trükköt hajtja végre.

Legyen k egy pozitív egész. Egy néző $n=k!+k-1$ darab golyót kap, melyek az $1,2,\ldots,n$ számokkal vannak ellátva. A bűvész szemét bekötik, és a néző sorba rakja a golyókat. A segéd megnézi golyókat, kiválaszt k egymás mellett lévő golyót, és letakarja egy kendővel. Ezután a bűvész szeméről leveszik a kötést, aki megnézi a golyók sorozatát, és megmondja a letakart golyók pontos sorrendjét.

Adjunk meg egy stratégiát a bűvész és a segédje számára, amely mindig működik.

(Egzisztenciabizonyításra csak részpontszám jár. Teljes pontszám konstruktív módszerre adható, amely n függvényében polinomiális lépésszámban megadja a módszert. Azt nem kell külön indokolni, hogy a megadott konstruktív módszer polinomiális lépésszámmal fut.)

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Bulgária) és *Palmer Mebane* (USA)

❄

Beküldési határidő: 2019. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A 2018–2019-es tanévi pontversenyek végeredménye – kiegészítés

A szeptemberben megjelent végeredményből technikai hiba folytán lemaradt a K pontverseny végeredményének egy része. A versenyzőktől elnézést kérünk, a hiányt most pótoljuk.

K-jelű matematika gyakorlatok versenye

Dicséretben részesül: 54. *Kovács Brúnó Aurél* (Budapest XIII. Ker. Berzsenyi D. Gimn.) 117 pont; **55–57.** *Bodor Bence Ádám* (Pécsi Janus Pannonius Gimn.); *Sipos Teodor* (Szegedi Radnóti M. Kís. Gimn.); *Szaniszló Máté Zsolt* (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn.) 115 pont; **58.** *Gálffy Márton* (Budapest, Városmajori Gimn. és Kós Károly Ált. Isk.) 113 pont; **59.** *Szepesi Dorina* (Szegedi Radnóti M. Kís. Gimn.) 111 pont; **60.** *Lajtos Enikő* (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk.) 109 pont; **61–62.** *Harmat Máté* (Szegedi Radnóti M. Kís. Gimn.); *Szakál Kende* (Debreceni Fazekas M. Gimn.) 108 pont; **63–66.** *Bányai Kristóf* (Miskolci Herman Ottó Gimn.); *Richlik Bence* (Budapest XIV. Ker. Szent István Gimn.); *Ryan Voecks* (Nagy-Britannia, London, University College School); *Toronyi András* (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., Ált. Isk. és Koll.) 107 pont; **67.** *Tóth Gergő* (Pécsi Janus Pannonius Gimn.) 105 pont; **68.** *Fórizs Botond* (Budapest, Városmajori Gimn. és Kós Károly Ált. Isk.) 104 pont; **69–71.** *Győrffy Attila* (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., Ált. Isk. és Koll.); *János Szabolcs* (Bonyhádi Petőfi S. Evang. Gimn. és Koll.); *Szatmáry Sára* (Budapest XIII. Ker. Berzsenyi D. Gimn.) 103 pont; **72–73.** *Sárvári Borka Luca* (Dunakeszi Radnóti M. Gimn.); *Vincze Dorka* (Szegedi Radnóti M. Kís. Gimn.) 102 pont; **74–75.** *Héjja Márton* (Szegedi Radnóti M. Kís. Gimn.); *Pala Martin* (Debreceni Fazekas M. Gimn.) 101 pont; **76–77.** *Szalay Réka* (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn.); *Szin Imola* (Budapest V. Ker. Eötvös J. Gimn.) 99 pont; **78.** *Csuka Balázs Márk* (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., Ált. Isk. és Koll.) 96 pont; **79.** *Tóth Vivien* (Miskolci Herman Ottó Gimn.) 95 pont; **80–81.** *Drávecz Boróka Anna* (Pécsi Janus Pannonius Gimn.); *Meskó Gabriella Eszter* (Miskolci Herman Ottó Gimn.) 93 pont; **82–84.** *Domokos Lóránt* (Bonyhádi Petőfi S. Evang. Gimn. és Koll.); *Gál Máté* (Miskolci Herman Ottó Gimn.); *Üveges Laura* (Miskolci Herman Ottó Gimn.) 91 pont; **85–86.** *Horváth János Endre* (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., Ált. Isk. és Koll.); *Udvardy Kata* (Pápa, Türr István Gimn. és Koll.) 90 pont; **87.** *Buránszki Domonkos* (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., Ált. Isk. és Koll.) 89 pont; **88–90.** *Iván Zsombor* (Miskolci Herman Ottó Gimn.); *Morvai Gergő* (Miskolci Herman Ottó Gimn.); *Nagy Kristóf* (Szombathelyi Nagy Lajos Gimn.) 88 pont.

A többi versenyzőnek kevesebb pontja van.

Informatikából kitűzött feladatok

I. 490. Az udvaron N diák $(5 \leqslant N \leqslant 35)$ kieséses játékot játszik. A játék elején mindenki választ magának egy pozitív egész számot (mindenki különbözőt). A játék körökből áll, a köröket játék közben számolják, a játék a legelső körrel indul. Egy-egy kör végére néhány játékos kieshet, így ők a következő körökben már nem játszanak. A játék akkor ér véget, amikor két egymást követő körben nem esik ki egyetlen játékos sem. Ekkor a bennmaradók a játék győztesei.

A játék egy-egy körében a következőket teszik a játékosok:

1. számuk szerint növekvő sorrendbe állnak külön-külön a páros és a páratlan számmal rendelkezők;
2. a két sort összefésülik úgy, hogy egy új sor keletkezzen:
   a) a páratlan sorszámú körökben az első (legkisebb) páratlan számú diák kerül az új sor elejére (ha van ilyen diák);
   b) a páros sorszámú körökben az első (legkisebb) páros számú diák kerül az új sor elejére (ha van ilyen játékos);
   c) a többiek felváltva csatlakoznak az egyik és a másik sorból, amíg mindkét sor elég hosszú;
   d) majd a hosszabb sorból jönnek egymás után a megmaradt játékosok;
3. ezután minden olyan játékos kiesik, akinek a száma ebben az új sorban kisebb a mellette álló mindkét játékos számánál (a sorban most első és utolsó játékos tehát nem eshet ki).

Készítsünk programot, amely megadja, hogy egy adott játék hányadik körben ér véget, és kik a győztesei.

A standard bemenet első sorában a játszók N száma, második sorában a játékosok által választott N darab szám szerepel. A standard kimenet első sorába írjuk ki a körök számát, második sorába a győztes versenyzők számát növekvő sorrendben.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`8` `2 32 5 10 18 9 7 11`	`4` `10 18 32`

Beküldendő egy `i490.zip` tömörített állományban a program forráskódja és egy rövid leírás, ami megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 491. A Monor városi sportcsarnok egy multifunkciós csarnok, mely sport- és rendezvényközpontként működik. Az épület hasznos alapterülete 4166 m^2, az ülőhelyek száma 1030, de nagy rendezvény esetén az épület maximális befogadóképessége (a küzdőtér használatával) 1500 fő.

A `monor.txt` pontosvesszővel tagolt, UTF-8 kódolású állományban a sportcsarnok látogatottsági statisztikája áll rendelkezésre 2016. szeptember 18. óta. Az A oszlopban az évek, a B oszlopban a hozzá kapcsolódó hónapok, a második sorban pedig a napok kaptak helyet.

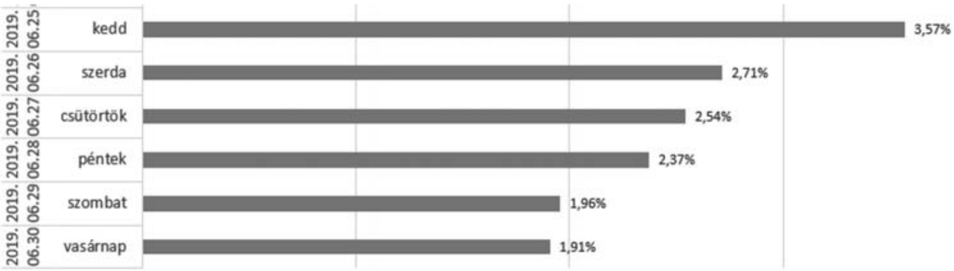
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			1	2	3	4	5	6
3	2016	szeptember						
4	2016	október	4	6	11	12	21	18
5	2016	november	49	80	34	27	34	63
6	2016	december	59	18	14	98	30	27
7	2017	január	49	39	63	51	91	53

1. Töltsük be a `monor.txt` szövegfájlt a táblázatkezelő egy munkalapjára az A1-es cellától kezdődően.
2. Munkánkat `monor` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában. Az üres cellák azt jelzik, hogy nincsen adat. A táblázatot úgy készítsük el, hogy 2020. januárig feltölthető legyen, amint rendelkezésre állnak az adatok. A képletek kialakításánál és a számításoknál is készüljünk föl ezekre az adatokra.
3. Töltsük fel a B oszlopot a hónapnevekkel, a második sort a napok számaival.
4. Függvény segítségével töltsük fel az A oszlopot a megfelelő évekkel a 43. sorig.
5. Az AH3:AH43 tartomány celláiban számítsuk ki, mennyi volt az adott hónapban a látogatók száma.
6. Az AL3:AL7 tartományban függvény segítségével adjuk meg az összes látogatási adat figyelembevételével, hogy mennyi volt a látogatók összes száma az alábbi létszámsávokban.

0 – 49
50 – 199
200 – 599
600 – 999
1000 –

7. Az AK8-as cellában adjuk meg függvény segítségével, hogy mennyi volt az egy napon belüli legnagyobb látogatószám a sportcsarnokban.
8. Feltételes formázás segítségével jelöljük a három legnagyobb látogatószámot tartalmazó cellát piros kitöltő színnel. Ha több egyforma érték is van, akkor mindegyiket jelöljük meg.

9. Készítsünk a táblázat alá a mintán látható diagramhoz hasonlót a 2019. júniusi adatokból (a júniusi teljes hónapról – a mintán kevesebb, mint egy hét látszik). A százalékos értékek azt mutatják, hogy az adott napon a júniusi összesített látogatói adathoz képest az emberek hány százaléka látogatott el a sportcsarnokba az adott napon. Mivel már végleges adatokról van szó, így nem szükséges a diagramnak az adatok változását követnie.



10. A fő táblázatot a könnyebb átláthatóság érdekében állítsuk be úgy, hogy az év, a hónap és a napok mindig láthatóak maradjanak görgetéskor. Nyomtatáskor a fő adatok egy oldalra férjenek el.

Források:
`www.monorisportcsarnok.hu` (utolsó letöltés 2019.09.10.);
`http://monorisportcsarnok.hu/stat/statistic.php?ev=2016&ho=9&l=m`
(utolsó letöltés 2019.09.10.).

Beküldendő egy tömörített `i491.zip` állományban a munkafüzet, valamint egy rövid leírás, amelyben szerepel az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

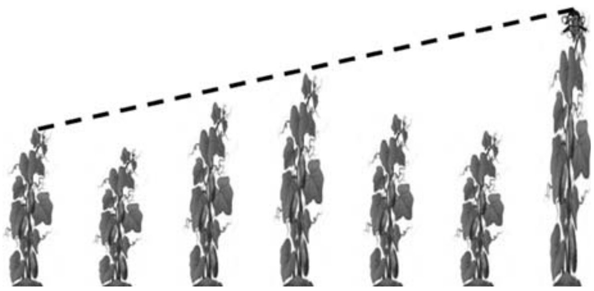
I. 492 (É). Ubullal, az Uborkanemesítő Intézet kismajmával egy korábbi feladatban (I. 398.) már találkoztunk. Azóta Ubul átköltözött az Intézet egyik kísérleti parcellájába, ahol N sorban és M oszlopban ($1 \leqslant N, M \leqslant 100$) ültetve helyezkednek el az uborkafák.

Az uborkafák magasságát a weblapunkról letölthető `ubifak.txt` nevű, UTF-8 kódolású, tabulátorokkal tagolt szöveges állomány centiméterben megadva tartalmazza. Egy uborkafa nagyon magas, de legfeljebb 100 méteres lehet. Az állomány első eleme az $(1;1)$, utolsó eleme pedig az $(N;M)$ koordinátájú fa magasságát adja meg.

Készítsünk programot `i492` néven a következő feladatok megoldására. A program futása során a képernyőre való kiíráskor utaljunk a feladat sorszámára.

1. Olvassuk be a fájlból az uborkafák magasságát, és az adatokat tároljuk el.
2. Kérjük be egy fa koordinátáit (sorszám, oszlopszám) és írassuk ki a képernyőre az adott koordinátájú uborkafa magasságát.
3. Ubul az előző feladatban megadott fán ücsörög. Hány olyan fa van a parcellában, amely az előbb megadott koordinátájú fánál magasabb?

4. Szemléltessük a kilátást a `kilatas.txt` nevű állománnyal, amely N sorban és M oszlopban karaktereket tartalmaz (szóközök nélkül) a következő módon. Ubul előbb megadott helyét egy `U` betű jelöli. Az adott pontban lévő fánál magasabb fákat $\times$ jelöli, míg a többi fát egy-egy pont.
5. Ubul napközben legszívesebben a parcella legmagasabb fáján szeret ücsörögni. Hol van ez a fa és milyen magas? Írassuk ki a választ a képernyőre. Ha több ilyen van, mindegyik koordinátái jelenjenek meg.
6. Az éjszakát Ubul azon a fán töltötte, amely a sorok legnagyobb fái közül a legkisebb, hogy ne fázzon. Reggel át akar ugrálni arra a fára, amely az oszlopok legkisebb fái közül a legnagyobb. Ha Ubul mindig csak az adott sor vagy adott oszlop szomszédos fájára ugrik, legalább hány ugrással közelítheti meg ezt a fát? (Feltehetjük, hogy a két szélsőérték egyértelmű.)



7. Látja-e Ubul a megadott koordinátájú fáról az adott sorban, illetve az adott oszlopban lévő szélső fák tetejét? Mind a négy eset eredményét írassuk ki a képernyőre. (Feltételezhetjük, hogy a fák egyenlő távolságra vannak egymástól.)

Beküldendő egy tömörített `i492.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 38. Egy munkahelyen N ember dolgozik, akiket 0-tól $(N-1)$-ig sorszámokkal azonosítunk. Mindenkinek pontosan egy közvetlen főnöke van, kivéve a 0. sorszámú embert, a cégvezetőt. Minden emberre teljesül, hogy ha vesszük a közvetlen főnökét, majd annak a közvetlen főnökét és így tovább, amíg lehet, akkor végül a cégvezetőhöz jutunk. Egy A sorszámú embernek beosztottja minden olyan ember, ahonnan az előbbi módon, a közvetlen főnökökön végighaladva egy idő után az A sorszámú emberhez jutunk. Egy A sorszámú ember tudja kezelni egy B sorszámú beosztottját, ha a cégnél töltött éveik számának különbsége legfeljebb K. Egy A sorszámú ember jó főnök, ha minden beosztottját tudja kezelni (ha valakinek nincs beosztottja, akkor jó főnök). Készítsünk programot, amely megadja a jó főnökök számát.

Standard bemenet: az első sor tartalmazza N-et és K-t. A következő sor $N-1$ darab számot tartalmaz, az i-edik szám az i-edik sorszámú ember közvetlen főnökének sorszámát. A következő sor N darab számot tartalmaz, az i-edik szám az $(i-1)$-edik sorszámú ember cégnél töltött éveinek számát.

Standard kimenet: a jó főnökök száma.

Korlátok: $3 \leqslant N \leqslant 10^5$, $0 \leqslant K \leqslant 10^9$, $1 \leqslant$ a cégnél eltölött évek száma $\leqslant 10^9$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 1000$.

Példa:

Bemenet (a / jel a sortörést helyettesíti)	**Kimenet**
7 3 2 0 2 0 4 4 6 1 5 7 10 7 8	4

Beküldendő egy `is38.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 137. A Lamök bolygón összeírták egy elektronikus szótárba az univerzum összes szavát ABC-sorrendben. Sajnos a rendszert támadás érte, ezáltal nemcsak a szavak sorrendje, hanem az egyes szavakon belül a betűk sorrendje is összekeveredett. A bolygó lakói szeretnék minél hamarabb visszaállítani az eredeti szótárat, ezért a hibás szótár összes szavára meg akarják határozni, hogy minimum és maximum hányadik lehetett az eredeti szótárban. Sajnos ez túl nehéz feladatnak bizonyult számukra, ezért a te segítségedet kérik: készíts programot, amely megadja, hogy egy-egy szó legalább és legföljebb hányadik lehetett az eredeti szótárban.

A standard bemenet első sora tartalmazza a szótár szavainak N számát. Ezután N sor következik: a bemenet $(i+1)$-edik sora tartalmazza a hibás szótár i-edik szavát. A szavak csak az angol ABC kisbetűit tartalmazzák.

A standard kimenet N sort tartalmaz: az i-edik sorba írjuk ki, hogy a hibás szótár i-edik szava az eredeti szótárban minimum és maximum hányadik lehetett.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10^5$, $1 \leqslant$ egy szó hossza $\leqslant 20$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 10^4$.

Példa (a / jel sortörést helyettesít):

Bemenet	**Kimenet**
5 / mlaa / tenebem / osr / lama xyz	1 3 / 1 4 / 3 4 / 1 3 / 5 5

Beküldendő egy `s137.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2019. november 10.

Kapacitások összetett rendszerekben

Bevezetés

Idézzünk fel két ismert példát! Az első a síkkondenzátor, melynek a kapacitása (ha a fegyverzetek felülete A, a távolságuk d, és ez elég kicsiny)

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}. \tag{1}$$

Ez a mennyiség az egyik fegyverzetről a másikra átvitt Q töltés és a töltésátvitel hatására kialakuló U feszültség közötti összefüggést adja meg:

$$Q = CU. \tag{2}$$

Másik példánk egy, a térben mindentől távol lévő, önmagában álló, R sugarú vezető gömb, amely esetében

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R, \tag{3}$$

és ez a gömbre (valahonnan) felvitt töltés és a végtelenhez (mint nullához) viszonyított feszültség közötti arányossági tényező.

A kétféle kapacitásfogalom nagyon hasonló, amennyiben egy feszültség (illetve potenciál) és az annak létrehozásához szükséges töltés között teremt kapcsolatot, de azt is látjuk, hogy nem teljesen azonos, hisz az egyikben csak egy vezető test, míg a másikban az elektromos megosztás útján kapcsolatban lévő két test együttes tulajdonságáról van szó. Az alábbiakban a kapacitás fogalmának egy általánosabb tárgyalását adjuk, amelyben mindkét kapacitásértelmezés természetes módon jelenik meg.

Töltések és potenciálok

Az egyszerűség kedvéért egy olyan esetet vizsgálunk, amelyben csak két (F_1-gyel és F_2-vel jelölt) fémtest (ún. fegyverzet) helyezkedik el a térben, de a megfontolásaink általánosíthatók akárhány fegyverzetre. Arra vagyunk kíváncsiak, milyen összefüggés van az egyes testekre felvitt töltés és a rajtuk kialakuló potenciál között. Először azt gondoljuk meg, mi történik, ha csak az F_1 fémre viszünk fel töltést! Tudjuk, hogy a statikus esetben a töltések úgy oszlanak el a fémek felületén, hogy azok ekvipotenciális felületek legyenek, másképp mondva: úgy, hogy a töltésekből kiinduló elektromos tér erővonalai a fémek felületéről merőlegesen induljanak ki, illetve merőlegesen érkezzenek oda. Az F_1-re felvitt töltések és az F_2-n a megosztás miatt *szétvált* töltések sűrűsége tehát olyan, hogy az elektroszatikus tér eleget tegyen ennek a merőlegességi feltételnek.

Nyilván igaz, hogy ha az F_1 fegyverzetre mondjuk x-szer nagyobb töltést viszünk fel, mint korábban, a kialakuló töltéssűrűségek az előzőhöz hasonlóak, de mindenhol x-szer nagyobbak lesznek. Ennek eredményeként az elektromos térerősség és a potenciál is mindenhol, így a fémek felületén is x-szer akkora lesz, mint az előző esetben. Eszerint a töltés és a végtelenhez viszonyított feszültségek, vagyis a potenciálok között *egyenes arányosság* áll fenn:

$$U_1(1) = a_{11}Q_1, \qquad U_2(1) = a_{21}Q_1. \tag{4}$$

Megjegyzés. A fenti képlettel kapcsolatban látnunk kell, hogy az a_{21} nem lehet nulla, hisz az F_1-en levő töltések tere csak a végtelenben tűnik el, így biztos, hogy az F_1-es test terében elhelyezkedő F_2 fegyverzet potenciálja $U_2(1) \neq 0$. Az a_{21} együttható konkrét értéke mindkét fegyverzet adataitól függ. Hasonlóan az a_{11} arányossági tényező sem csak az 1-es test méretétől, alakjától stb, hanem az F_2 adataitól és pozíciójától is függ, hiszen a megosztás miatt annak is van tere, ami hozzájárul $U_1(1)$-hez.

Teljesen hasonló gondolatmenettel oda jutunk, hogy ha csak az F_2 fegyverzetre teszünk töltést, akkor a kialakuló potenciálok

$$U_1(2) = a_{12}Q_2, \qquad U_2(2) = a_{22}Q_2. \tag{5}$$

Itt a_{12} és a_{22} (éppúgy, mint a_{21} és a_{11}) a két fegyverzet *együttesére* jellemző mennyiségek.

Végül, ha mindkét fegyverzetre viszünk töltést, akkor a fémek felületén kialakuló töltéssűrűség az első és a második esetnek megfelelő sűrűségek összege kell legyen, mert ez biztosítja azt, hogy az elektromos tér a fémek felületére merőleges. Következésképp az eredő elektromos tér a két esetnek megfelelő tér összege lesz, és ez igaz az egyes testeken kialakuló potenciálokra is (szuperpozíció elve):

$$U_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2, \qquad U_2 = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2. \tag{6}$$

Ez a két összefüggés invertálható:

$$Q_1 = c_{11}U_1 + c_{12}U_2, \qquad Q_2 = c_{21}U_1 + c_{22}U_2. \tag{7}$$

Ebben a két kifejezésben a c_{ij} $(i,j = 1,2)$ elemek *kapacitások* (az ún. kapacitásmátrix elemei), amelyek értéke a két testre és azok egymáshoz viszonyított pozíciójára, tehát magára az elrendezésre jellemző.

Ezekkel érdemes kifejezni az a_{ij} elemeket:

$$a_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}}, \qquad a_{12} = -\frac{c_{12}}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}}, \qquad a_{21} = -\frac{c_{21}}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}}, \qquad a_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}}. \tag{8}$$

Az energia

További megfontolásainkban fontos szerepe lesz annak, hogy mennyi az elektrosztatikus energiája egy ilyen töltött rendszernek. Ez az energia azonos azzal a munkával, amennyit végeznünk kell ahhoz, hogy a fegyverzetekre töltéseket vigyünk. Ennek kiszámításához tegyük fel, hogy a két fegyverzetet úgy töltjük fel a kívánt potenciálra, hogy a folyamat során a töltések aránya (és ezzel együtt a potenciálok aránya is) mindig ugyanannyi legyen! Ilyenkor mindkét fegyverzet aktuális potenciálja arányos a rá addig felvitt töltéssel, ezért a munka a töltések és az átlagfeszültségek (a végső feszültségek $\frac{1}{2}$ része) szorzataként kapható meg:

$$W = \frac{1}{2}Q_1U_1 + \frac{1}{2}Q_2U_2. \tag{9}$$

Ennyi munkát kell végeznünk a fegyverzetek feltöltése során, tehát ennyi lesz a rendszer elektrosztatikus energiája. A töltéseket a feszültségekkel, vagy a feszültségeket a töltésekkel kifejezve

$$W = \frac{1}{2}\left[c_{11}U_1^2 + (c_{12}+c_{21})U_1U_2 + c_{22}U_2^2\right], \tag{10}$$

illetve

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{c_{22}Q_1^2 - (c_{12}+c_{21})Q_1Q_2 + c_{11}Q_2^2}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}}. \tag{11}$$

A rendszer energiája természetesen nem függ attól, hogy hogyan, pl. milyen sorrendben töltjük fel a fegyverzeteket. Erre alapozva belátható,hogy

$$c_{12} = c_{21}. \tag{12}$$

(Ennek bizonyítása az **F1** függelékben található meg.)

Részkapacitások

A c_{ij} kapacitások helyett igen praktikus bevezetni az úgynevezett *részkapacitásokat* a következő módon:

$$C_1 = c_{11} + c_{12}, \qquad C_2 = c_{22} + c_{12}, \qquad C_k = -c_{12} = -c_{21}. \tag{13}$$

Ezekkel minden fontos mennyiséget ki tudunk fejezni:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1U_1 + C_k(U_1 - U_2),\\ Q_2 &= C_2U_2 + C_k(U_2 - U_1), \end{aligned} \tag{14}$$

illetve

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{C_2Q_1 + C_k(Q_1+Q_2)}{C_1C_2 + C_k(C_1+C_2)},\\ U_2 &= \frac{C_1Q_2 + C_k(Q_1+Q_2)}{C_1C_2 + C_k(C_1+C_2)}, \end{aligned} \tag{15}$$

és végül az energia

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{C_2Q_1^2 + C_1Q_2^2 + C_k(Q_1+Q_2)^2}{C_1C_2 + C_k(C_1+C_2)}. \tag{16}$$

A részkapacitások igen jól szemléltethetők az **F2** függelékben megadott kép segítségével. Fontos megjegyeznünk, hogy bár a jelölés ezt sugallhatná, de *nem* igaz, hogy a C_1 vagy a C_2 csak az F_1 vagy F_2 fegyverzet tulajdonsága lenne: ezek a mennyiségek is a teljes elrendezést jellemzik.

A nagy távolság esete

A térben elhelyezett, töltött fémtestek feszültség- és energiaviszonyainak fent bemutatott, kapacitásokra alapozott leírása akkor könnyíti meg a munkánkat, ha a fegyverzetek távolsága azonos nagyságrendű vagy jóval kisebb, mint a testek mérete. Ellenkező esetben, tehát amikor a testek méreténél a távolságuk jóval nagyobb, a megosztás hatása elhanyagolható. Az egyes fegyverzetek saját kapacitását (azt, ami akkor lenne, ha a test magában állna) ekkor is figyelembe kell venni, de a köztük lévő kölcsönhatás szempontjából a töltések jó közelítéssel egy-egy pontba koncentráltnak tekinthetők.

A síkkondenzátor

A számunkra igazán izgalmas esetek közül először azt nézzük meg, hogyan illeszkedik ebbe a képbe egy valóságos (nem ideális) síkkondenzátor. Tegyük fel, hogy a két fegyverzet egyforma, és mondjuk az F_1 fegyverzetet feltöltjük úgy, hogy potenciálja U legyen, miközben vigyázunk arra, hogy az F_2 fegyverzet potenciálja nulla maradjon. A tapasztalat az, hogy praktikusan ugyanannyi, csak ellenkező előjelű töltés kerül mindkét fegyverzetre, (14) szerint tehát

$$Q_1 + Q_2 = C_1U \approx 0, \tag{18}$$

ahonnan a (14) első egyenletéből adódó $U \approx \frac{Q_1}{C_k} \neq 0$ összefüggés miatt egyenesen következik, hogy

$$C_1 (= C_2) \ll C_k. \tag{19}$$

A C_k tényező a kondenzátor *kapacitása* (amit szabatosan *főkapacitásnak* neveznek, de ezt az elnevezést szinte senki nem használja), C_1 és C_2 pedig a *szórt kapacitások.*

A síkkondenzátor kapacitását, ami tehát C_k, az (1) képlet adja meg. Eszerint ha rögzített nagyságú töltés mellett csökkentjük a d távolságot, akkor növekszik C_k, csökken a fegyverzetek közötti feszültség, és a kondenzátorban tárolt energia is. Határesetben, amikor a fegyverzetek összeérnek, a töltések kiegyenlítik egymást, de mivel ez gyakorlatilag nulla feszültség mellett történik, nincs energiaveszteség. (Természetesen nem sérül az energiamegmaradás tétele: a kondenzátor kezdeti elektrosztatikus energiája a lemezek közelítése során a fékezőerők elleni munkát fedezi.)

Töltött gömbök viselkedése

Másik példának tekintsünk két egymáshoz közel, de minden mástól távol lévő gömböt! (A két sugár legyen R_1 és R_2, a középpontok távolsága D, a felületek legkisebb távolsága pedig d!) A probléma az elektrosztatika mint tudományterület kialakulása óta foglalkoztatja a kutatókat, jelentős részben ki is van dolgozva, de máig tartogat érdekességeket. Ennek legfőbb oka, hogy az általános megoldás nem adható meg zárt alakban, a kapacitások, a töltéseloszlások stb. csak végtelen sorok formájában kaphatók meg, és bármely részlet kiszámítása nem egyszerű feladat. Itt most a rendszer olyan tulajdonságait vizsgáljuk csak, amelyek nem igényelnek különleges matematikai felkészültséget.

A két gömb kapacitása, ha külön-külön egyedül állnának, $4\pi\varepsilon_0 R_1$ és $4\pi\varepsilon_0 R_2$ lenne, de valójában C_1 és C_2 ennél kisebb, és d csökkenésével monoton csökkenő függvény. (*Figyelem:* Nem igaz az az elterjedt nézet, hogy C_1 és C_2 aránya a két sugár arányával megegyezne!) A $d=0$ határesetben mindkettő véges, nem nulla értéket vesz fel, amelyek összege adja a két érintkező gömb együttes kapacitását. Ezzel szemben miközben $d \to 0$, a C_k kapacitás végtelenhez tart. Ennek az az oka, hogy az egymással szemben lévő felületek egyre közelebb kerülnek egymáshoz, és így a megosztás hatása egyre jobban érvényesülhet. Mivel nem síkok, hanem görbült felületek közelítenek egymáshoz, C_k divergenciája (végtelenhez tartása) lassabb, mint a síkkondenzátor esetében. Értékét az irodalom szerint a

$$C_k \approx 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\left\{\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2R_1R_2}{(R_1+R_2)d}\right)+\gamma\right\} \tag{20}$$

összefüggés adja meg, amelyben γ egy ismert nagyságú numerikus konstans.

C_k fenti értéke annál pontosabb, minél kisebb a d távolság. A C_k kapacitás végtelenhez tartásának – hasonlóan a síkkondenzátor esetéhez – érdekes következményei vannak. Elsőként vegyük észre: ha a (15) képletek nevezőjében a végtelen naggyá váló $C_k(C_1+C_2)$ tag mellett a véges értékhez tartó C_1C_2 tagot elhagyjuk, megállapíthatjuk, hogy

$$U_1 \to U_2 \to \frac{Q_1+Q_2}{C_1+C_2}, \tag{21}$$

miközben a kettő különbsége

$$\Delta U = U_1 - U_2 \approx \frac{1}{C_k}\frac{C_2Q_1 - C_1Q_2}{C_1+C_2} \tag{22}$$

szerint tűnik el.

Megjegyzés. Ha a két gömböt töltetlen állapotban összeérintjük, és így viszünk fel a rendszerre $Q = Q_1' + Q_2'$ töltést, akkor az a kialakuló egyensúlyban úgy fog eloszlani a két gömb között, hogy $Q_1'/C_1 = Q_2'/C_2$, azaz $C_1Q_2' - C_2Q_1' = 0$ legyen, tehát az érintkező gömbök esetében ez tekintendő a stabil töltéseloszlásnak.

Tanulságos megvizsgálnunk az energiát is. A (16) kifejezés azonos átalakításokkal az alábbi alakra hozható:

$$W = \frac{1}{2}\frac{(Q_1+Q_2)^2}{C_1+C_2} + \frac{1}{2}\frac{C_1+C_2}{C_k(C_1+C_2)+C_1C_2}\frac{(C_1Q_2 - C_2Q_1)^2}{(C_1+C_2)^2}. \tag{23}$$

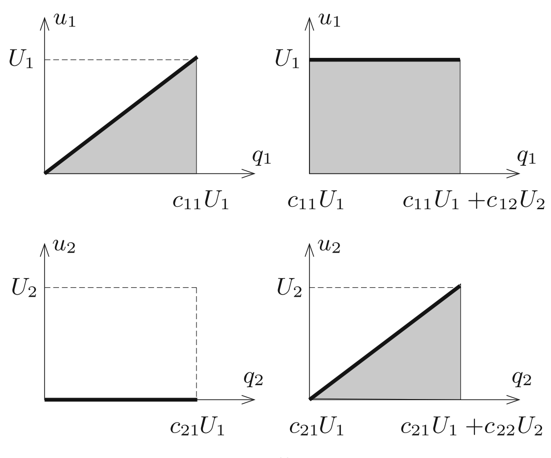
Rögzített össztöltés mellett W akkor minimális, ha $C_2Q_1 - C_1Q_2 = 0$. Ebből következik, hogy minden olyan töltéseloszlás, amelyre ez nem igaz, instabil azokra a mechanizmusokra nézve, amelyek képesek töltést szállítani a két gömb felülete között. Ilyen mechanizmus lehet pl. a két felület között kialakuló (az **F3** függelékben leírt) nagy térerősség miatt átugró szikra, de az is, hogy az érintkezési pontban az ellentétes töltések semlegesítik egymást. Látni kell azonban, hogy a $C_2Q_1 = C_1Q_2$ állapot kialakulása során az elektrosztatikus energia nagyon keveset, ideális esetben elhanyagolható mértékben csökken: a folyamat során az energia változása $\Delta Q \cdot \Delta U$ nagyságrendű, ami annál kisebb, minél kisebb távolság mellett zajlik le a töltéskiegyenlítődés.

Végezetül megjegyezzük, hogy az energia távolságtól való függése következtetni enged a töltött gömbök között fellépő erőkre. Egy ilyen, kicsi d mellett érvényes elemzést mutatunk be az **F3** Függelékben.

Függelék

F1. A kapacitásmátrix szimmetriája

Ennek megmutatásához azt használjuk ki, hogy a rendszer energiája nem függhet attól, hogyan (milyen sorrendben) töltjük fel a fegyverzeteket, csak attól függhet, hogy mekkora rajtuk a feszültség (vagy a töltés). Tegyük fel, hogy először az F_1 fegyverzetet töltjük fel U_1 potenciálúra úgy, hogy az F_2 potenciálját nullán tartjuk (F_2-t földeljük). Ebben a folyamatban F_1-re $c_{11}U_1$ töltést kell vinnünk, az F_2-re pedig $c_{21}U_1$ töltés kerül. Ezután megszüntetjük F_2 földelését, és feltöltjük úgy, hogy potenciálja U_2 legyen, és közben ügyelünk arra, hogy az F_1 potenciálja ne változzon. Ehhez, miközben az F_2-re a már ott lévőhöz még $c_{22}U_2$ töltést adunk, az F_1-re további $c_{12}U_2$ töltést kell vinnünk. A potenciál–töltés viszonyokat az *1. ábrán* szemléltetjük.



1. ábra

(A két fegyverzetre vonatkozó grafikonon a töltéstengelyeken a skála különböző: úgy állítottuk be őket, hogy az összetartozó töltésértékek egymás fölé kerüljenek.) A folyamat során végzett munkát, tehát a töltött rendszer energiáját a sötétebben jelölt részek összterülete adja meg:

$$W=\frac{1}{2}\,c_{11}U_1^2+c_{12}U_1U_2+\frac{1}{2}\,c_{22}U_2^2.$$

Nyilvánvaló, hogy a testek feltöltését másképp is, pl. a fordított sorrendben is elvégezhetjük. Ekkor

$$W=\frac{1}{2}\,c_{11}U_1^2+c_{21}U_1U_2+\frac{1}{2}\,c_{22}U_2^2$$

adódik. Mivel az energia nem függhet attól, hogy hogyan töltöttük fel a rendszert, a két érték megegyezik, tehát

$$c_{12}=c_{21}.$$

F2. A részkapacitások helyettesítőképe

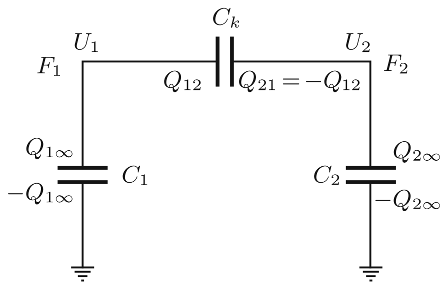
A részkapacitások használata egy igen szemléletes (a mérnöki gyakorlatból kölcsönzött) helyettesítőkép bevezetését teszi lehetővé.

A *2. ábrán* jelölt kapacitások ideális kondenzátorok, a sarkok a két fegyverzetet (F_1, F_2), a földelés pedig a nulla potenciálú helyet, esetünkben a végtelent jelenti. Az egyes töltések értéke

$$Q_{1\infty}=Q_1-Q_{12},$$

$$Q_{2\infty}=Q_2-Q_{21},$$

$$Q_{12}=\frac{C_k(C_2Q_1-C_1Q_2)}{C_1C_2+C_k(C_1+C_2)}=-Q_{21}.$$



2. ábra

Természetesen mindennek akkor van értelme, ha az itt szereplő, eddig csak formálisan kezelt C_1, C_2 és C_k kapacitások pozitívok. Ennek teljesülését viszont könnyű belátni, elég végiggondolni, milyen előjelű töltések kerülnek az egyes fegyverzetekre, ha az egyiket földeljük, a másikat pedig valamilyen feszültségre feltöltjük. Ezt az elemzést az Olvasóra bízzuk.

F3. Azonos töltésű gömbök is vonzhatják egymást

Mielőtt ezt az igen meglepő jelenséget tárgyalnánk, érdemes visszatérnünk a feszültségekhez! Fontos észrevétel, hogy bár a (22)-vel adott ΔU feszültség nagyon kicsiny, határesetben el is tűnik, a két gömb között kialakuló elektromos térerősség mégis annál nagyobb, minél kisebb a gömbök távolsága. A térerősség átlagos értéke a legközelebbi pontok között az $E\sim\Delta U/d$ kifejezéssel becsülhető, és ez, ha

$C_2Q_1 \neq C_1Q_2$, akkor végtelenhez tart. (Ez a logaritmusfüggvény azon tulajdonságának köszönhető, hogy az $\ln(1/d)$ végtelenhez tart, a $d \cdot \ln(1/d)$ kifejezés viszont nullához közelít, ha $d \to 0$.) Ez fizikailag úgy értelmezhető, hogy a $C_2Q_1 = C_1Q_2$ esetet kivéve, nagyon kicsiny d távolság mellett az elektromos megosztás miatt akkor is ellentétes előjelű töltések ülnek a felületek legközelebbi pontjai környékén, ha Q_1 és Q_2 előjele azonos. Sőt, mi több, az ellentétes töltéseknek megfelelő töltéssűrűség a távolság csökkenésével egyre kisebb felületre koncentrálódik.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a két gömb között (a $Q_1/C_1 = Q_2/C_2$ kiegyenlített esetet kivéve) mindig vonzás alakul ki, ha a gömbök elég közel kerülnek egymáshoz. Ez közismert, ha a két töltés ellentétes előjelű, vagy az egyikük nulla, de meglepő, ha a töltések azonos előjelűek! A jelenség oka az, hogy – ahogy már említettük – a gömbök egymáshoz közeli oldalán a megosztás miatt *ellentétes*, a távoli oldalakon azonos előjelű töltések ülnek, és a nagyon kicsiny távolság miatt az előbbiek vonzása érvényesül. Matematikailag ez abból következik, hogy míg C_1 és C_2 jó közelítéssel d lineáris függvénye szerint közeledik a $d = 0$ esetén felvett $C_1(0)$ és $C_2(0)$ értékekhez, addig C_k a (20) képlet szerint végtelenhez tart.

Az energia (23) kifejezéséből indulunk ki. Ez a $C_k \gg C_1, C_2$ esetnek megfelelő közelítésben tovább egyszerűsödik:

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{(Q_1+Q_2)^2}{C_1+C_2} + \frac{1}{2C_k}\,\frac{(C_1Q_2-C_2Q_1)^2}{(C_1+C_2)^2}.$$

(Ez a kifejezés is annál pontosabb, minél nagyobb a C_k kapacitás, azaz minél közelebb van a két gömb egymáshoz.) A második tag viselkedését a C_k végtelenhez tartása határozza meg, ezért itt C_1 és C_2 helyett vehetjük a $C_1(0)$ és $C_2(0)$ értékeket. Az első tagban használjuk a

$$C_1 + C_2 \approx C_1(0) + C_2(0) + \Delta C$$

közelítést, ahol ΔC egy d-vel arányos szám. Mind a számlálót, mind a nevezőt megszorozva a $C_1(0) + C_2(0) - \Delta C$ kifejezéssel, és a $(\Delta C)^2$-es tagot már elhanyagolva végül is a

$$W - W(0) \approx -\frac{\Delta C}{2}\left(\frac{Q_1+Q_2}{C_1(0)+C_2(0)}\right)^2 + \frac{1}{2C_k}\left(\frac{Q_1C_2(0)-Q_2C_1(0)}{C_1(0)+C_2(0)}\right)^2$$

kifejezést kapjuk, ahol a $W(0)$ az energia $d = 0$-nál vett értéke.

Tekintsük először a $Q_1C_2(0) = Q_2C_1(0)$ kiegyensúlyozott esetet! Ilyenkor a fenti energiakifejezésnek csak az első tagja nem nulla, és nagyon szemléletes, hogy a gömbök azonos előjelű töltése miatt taszítást kell leírnia. Ennek megfelelően ez a tag d növekedésével csökken, azaz ΔC egy d-vel arányos *pozitív* mennyiség. A második tag a $Q_1C_2(0) \neq Q_2C_1(0)$ kiegyenlítetlen helyzetben mindig pozitív, és a távolság növekedésével nő, tehát egy vonzóerőnek felel meg. A kérdés, hogy hogyan viselkedik az összegük. Mivel a logaritmus függvény olyan, hogy $d \cdot \ln(1/d) \to 0$, ha $d \to 0$, a két tag hányadosában szereplő $\Delta C \cdot C_k$ nullához tart, ahogy d csökken. Ebből következik, hogy minél kisebb a d távolság, annál nagyobb lesz a második tag az elsőhöz képest, tehát a gömbök viselkedését, ha azok elég közel kerülnek egymáshoz, ez a tag fogja meghatározni. Így elég kis távolság esetén a *vonzás* érvényesül!

Ennek fényében gondoljuk végig, mi történik, ha két azonos előjellel, mondjuk pozitívan, de nem kiegyenlítetten töltött gömböt egymáshoz közelítünk! Legyen pl. $Q_2/C_2(0) > Q_1/C_1(0)$. Elég nagy távolság esetén mindkét felületen a töltéssűrűség mindenhol pozitív, és a gömbök taszítják egymást. A távolságot csökkentve a töltések a külső pólusok felé tolódnak, elég kis távolságnál az F_1 belső felületén a töltéssűrűség negatívvá válik, még kisebb távolságnál pedig a különböző töltések közötti vonzás válik dominánssá. Amikor a két gömb összeér, megtörténik a töltéskiegyenlítődés, aminek során a szemben lévő ellentétes töltések eltűnnek, a felületi töltéssűrűség újra mindenhol pozitívvá válik, és a gömbök újra taszítják egymást.

Woynarovich Ferenc

Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye

Versenyfelhívás és beszámoló

Ha szereted a fizikát, a kísérletezést, jól beszélsz angolul, és egy életre szóló élményre vágysz, akkor itt a helyed!

A Fizika Világbajnokságnak is nevezett IYPT (Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye, angolul International Young Physicists' Tournament) egy angol nyelvű, kísérleti fizikai csapatverseny, ahova a világ minden tájáról (több mint 30 országból) érkeznek középiskolások, hogy összemérjék tudásukat. Az IYPT a XXI. század kihívásainak megfelelő készségeket vár el az indulóktól: nemcsak a fizikában kell jártasnak lenni, hanem az eredményeket prezentálni és megvédeni is tudni kell! A résztvevő diákok a versenyt megelőzően elvégzett fizikai méréseiket és kutatásaikat egy – angol nyelven előadott – tudományos prezentáció formájában mutatják be a rivális csapatoknak.

Az IYPT verseny magyarországi első fordulójára (Hungarian Young Physicists' Tournament, HYPT) az `hypt.elte.hu` oldalon való regisztráció határideje:

2019. október 21. éjfél.

A jelentkező diákoknak egy kiválasztott problémáról 2019. november 18-ig kell elküldeni egy magyar nyelvű dolgozatot. Ezen dolgozatok alapján a legjobb beküldők az ELTE TTK-n december közepén megrendezésre kerülő szóbeli fordulón vehetnek részt. Az induló diákoknak az általuk kidolgozott feladat angol nyelvű bemutatásában kell összevetniük tudásukat.

A decemberi fordulót idén 100 000 forint összdíjazással hirdetjük meg, amiben az évfolyamonkénti első helyezett versenyzők osztoznak.

A decemberi szóbeli fordulót követően a 8-10 legmagasabb pontszámot elérő diák az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszékén végezheti a további kutatásait. A felkészülés során nyújtott teljesítmény alapján 3 diák indulhat az osztrák AYPT versenyen, az 5 legjobb diák pedig bekerül a Temesváron megrendezésre kerülő 33. IYPT magyar csapatába.

Jelentkezés, a feladatok szövege és további információk az `hypt.elte.hu` weboldalon, illetve az `email@hypt.elte.hu` email címen találhatók.

Néhány példa a 2020-ra kitűzött IYPT feladatok közül:

1. Találd fel magad. Építs egy olyan eszközt, amely az áramerősséget méri a hőhatása alapján. Térképezd fel mi a pontossága, megbízhatósága és mérőhatára a módszernek!

5. Édes délibáb. A Fata Morgana a délibábok egy speciális formája. Hasonló jelenség látható, ha lézerrel világítunk meg egy folyadékot, melyben törésmutató-gradiens van. Vizsgáld meg a jelenséget!

13. Súrlódó oszcillátor. Egy szilárd tárgyat két egyforma, párhuzamos tengelyű, vízszintes hengerre helyezünk. A két henger azonos szögsebességgel, de ellentétes irányban forog. Vizsgáld meg, hogy a tárgy mozgása a hengereken hogyan függ a megfelelő paraméterektől!

Bronzérem Varsóban

A 2019-es, Varsóban megrendezett IYPT versenyen a magyar csapat 34 jelenlévő ország közül a 12. helyet érte el, ezzel bronz minősítést szerzett. De az egy hetes varsói látogatás természetesen nem csak a versenyzésről szólt! Más ország csapataival való ismerkedés, a különleges építészetű és nagymúltú lengyel főváros megismerése (a teljesen újjáépített óvárosával) szintén része volt a programnak. A csapat ellátogatott a Copernicus Science Centerbe, a díjkiosztó után pedig a Visztula partján pihente ki a verseny megpróbáltatásait a homokos strandon, babzsákokon feküdve. Ami garantált volt egész héten, az a jókedv, minden más csak „hab volt a tortán”. Ha pedig ez mind nem győz meg, és a kint töltött hét jó hangulatáról és minőségi munkájáról akarsz megbizonyosodni, akkor látogasd meg, és kövesd Facebook oldalunkat: `www.facebook.com/hypt.elte.hu`, ahol a csapat képeit és eseményeit találod, amik többet mondanak minden szónál!

A magyar csapat tagjai voltak:

Kadlecsik Ádám (Tatai Eötvös József Gimn. és Koll., 11. évf.);

Lipovics T. Dániel (Budapest, Piarista Gimn., 11. évf);

Penc Patrik (Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyak. Gimn., 12. évf.);

Somogyi Boglárka (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., Ált. Isk. és Koll., 10. évf.);

Stiga Viktória (Budapest, Német Nemzetiségi Gimn. és Koll., 12. évf.).

Idén is nagyon sok munka és tanulás előzte meg a nemzetközi versenyt. Az ELTE TTK épületében található diáklaborunk mellett a felkészülés során idén egy edzőtáboron és egy felkészülési versenyen is részt tudtunk venni. A felkészítő munkát egyetemi oktatók/kutatók (*Asbóth János, Boross Péter, Ispánovity Péter, Hömöstrei Mihály, Jenei Péter, Széchenyi Gábor, Tüzes Dániel, Vincze Miklós*) és fizika tanárszakos hallgatók (*Bottka Benedek, Horváth András*) végezték az ELTE Fizikai Intézetében.

A sok nevetéssel és kemény munkával töltött év után most indul a felkészülés a 2020-as, Temesváron megrendezésre kerülő megmérettetésre.

az HYPT szervezők csapata

Beszámoló a 13. Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpiáról

Idén 13. alkalommal rendezték meg az IOAA-t (International Olympiad on Astronomy and Astrophysics). A rendezvény kiemelkedően fontos volt számunkra, már csak amiatt is, mert hazánk volt a rendező ország. Az IOAA a fizikai diákolimpia „leágazásaként” 2007-ben kezdte meg működését, Magyarország 2011-ben csatlakozott hozzá. Létjogosultságát mi sem bizonyítja jobban, mint az egyre növekvő népszerűsége, töretlen fejlődése, aminek eredményeként az IOAA a tudományterület legrangosabb középiskolai versenyévé nőtte ki magát a világon. Az első olimpián Thaiföldön még 22 ország csapata versenyzett, a magyar rendezés minden idők legnépesebb küldöttségét láthatta vendégül: 46 ország 258 versenyzője és mintegy 100 csapatvezetője, megfigyelője volt jelen. A rendezők régi álma valósult meg ezzel. Nem kell nagy képzelőerő ahhoz, hogy belássuk, mekkora munka, milyen nagyfokú előkészítés, milyen sok ember áldozatos odaadása kellett a sikeres rendezéshez.

A csillagászati diákolimpia egyik fő célja a csillagászat iránt érdeklődő, tehetséges fiatalok felkarolása, segítése, lehetőséget adni a versengésre, tudásuk felmérésére, és ami talán még ezeknél is fontosabb: a legtehetségesebbek leendő tudományos karrierjének elindítása. Az is érthető, hogy miért különült el ez az olimpia a fizikaitól. A csillagászati diákolimpián olyan asztronómiai, asztrofizikai, műszertechnikai, égboltismereti tudásra van szükség, ami nem várható el egy fizikai diákolimpián.

A versengés helyszíne a festői Balaton-felvidék volt. A diákok Keszthelyen, a csapatvezetők Hévízen voltak elszállásolva. A varázslatos táj a világ minden részéről idesereglett vendégeket őszinte ámulattal töltötte el. Az időjárás is kegyes volt hozzánk, az észlelési forduló estéjén ragyogó égbolt fogadott bennünket.

A diákolimpia két hivatalos társszervezője a Szegedi Tudományegyetem és a Magyar Tudományos Akadémia Csillagászati és Földtudományi Kutatóközpontja volt, ugyanakkor több más intézmény és szervezet (elsősorban a Magyar Csillagászat Nonprofit Kft., az MTA CSFK Csillagászati Intézete és az SZTE Bajai Obszervatóriuma, valamint az Eötvös Loránd Tudományegyetem, az ELTE Gothard Asztrofizikai Obszervatórium, az Magyar Csillagászati Egyesület és a Pannon Egyetem) is bekapcsolódott az előkészítésbe. Az olimpia főszervezői posztját olimpiai biztosként *dr. Kiss Áron Keve,* valamint hazai IOAA-koordinátorként *dr. Hegedüs Tibor* töltötte be.

A feladatkitűző bizottságban képviseltette magát a magyar csillagász társadalom színe-java, élükön *Kiss László* akadémikussal, aki szakmai koordinátorként is tevékenykedett.

A rendező ország jogán Magyarország két csapattal is indulhatott. A csapattagok *Tófalusi Ádám, Varga Vázsony, Császár Kornél, Mendei Barna* és *Kozák András* (első csapat), illetve *Soós Benjámin, Rajmon Imola, Bacsó Zétény, Bánhidi Dominik* és *Tordai Tegze* (második csapat) voltak. A csapatvezetői feladatokat *dr. Szalai Tamás* (SZTE), *Udvardi Imre* (Újpesti Könyves Kálmán Gimn.), illetve két volt olimpikon, *Dálya Gergely* és *Kalup Csilla* (ELTE) látták el.

A versenyt az olimpiai kerettagok kiválasztásának, felkészítésének hosszú folyamata előzte meg. Hazánkban a csillagászat nem különálló tantárgy (jó néhány országgal ellentétben), így nem támaszkodhatunk jól bejáratott, a diákság számára közismert tanulmányi versenyekre, magunknak kell megszerveznünk a válogatóversenyeket. Így a tanév során az év elején meghirdetett háromfordulós verseny alapján hívjuk be a legjobbakat az országos döntőbe, és ott választjuk ki a bővebb olimpiai keretet. Velük kezdjük meg a felkészülést, és a nyári tábor záróversenyén szerzik meg a kiutazók a versenyzés jogát. Természetesen a versenyekre való felkészüléshez szakköri foglalkozásokat, online-tanagyagot biztosítunk. Mozgalmunk szélesebb körben való megismertetését szolgálta a KöMaL-lal való együttműködésünk is, melynek keretében az elmúlt egy évben rendszeresen jelentek meg a kitűzött feladatok között csillagászati témájúak, remélve, hogy egyre több olvasónak keltjük fel az érdeklődését az olimpia iránt. A kedvező tanulói visszajelzések okán is szeretnénk folytatni az együttműködést. A csillagászati diákolimpia hazai hivatalos honlapja: `www.bajaobs.hu/ioaa`. Itt a versennyel kapcsolatos minden kérdésére választ kaphatnak a csillagászat iránt érdeklődő diákok.

A verseny lebonyolítása nem tér el más tudományos diákolimpiákétól. A csapatvezetők megvitatják a rendező ország által kitűzött feladatokat (a tanácskozás nyelve az angol), majd a közös megegyezéssel elfogadott angol nyelvű verziót lefordítják a diákok anyanyelvére, akik mind a két nyelven megkapják a feladatokat. A zsűri és a csapatvezetők külön-külön pontozzák a dolgozatokat, majd az esetleges eltéréseket megbeszélve alakulnak ki a végső pontszámok.

A csillagászati diákolimpia öt fordulóból állt. A verseny első fordulóját az öt órás elméleti megmérettetés jelentette, majd egy újabb napon a szintén öt órás adatanalízis következett. A már említett észlelési forduló is nagy élményt jelentett mind a versenyzőknek, mind a szervezőknek. A gyönyörű égbolton kívül az észlelőréten felállított 88 egyforma távcső látványa is maradandó emlék lesz számunkra.

A következő forduló feladatait három, egyenként 8 méter átmérőjű, felfújható planetáriumban oldották meg a versenyzők. Természetesen más földrajzi helyek égboltjainak ismeretére is szükség volt.

Azonban hátravolt még a csapatverseny. Az elmúlt évek jó tapasztalatai alapján véletlenszerűen sorsolták össze a csapatok tagjait. Nagy szerepet kapott tehát az együttműködés és egymás megismerése.

Az embert próbáló fordulók közben a szervezők igyekeztek kirándulások, kulturális és sportprogramok keretében biztosítani a kikapcsolódást. Mind a diákok, mind a csapatvezetők felejthetetlen élményekkel gazdagodtak. A sümegi középkori várjátékok, a salföldi major, Keszthely felfedezése, fürdés a Balatonban, a magyar népzene és néptánc megismerése életre szóló élmény marad a diákok számára. A sok új barátság, ismerkedés, a szervezők teremtette ragyogó hangulat, a Balaton varázsa az egyik legemlékezetesebb olimpiává tette a magyarországit.

A legjobban várt pillanat persze az eredményhirdetés volt. Versenyzőink eredménylistája:

Bronzérmet kapott:

Kozák András (ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn., 11. évf.);

Mendei Barna (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 11. évf.);

Soós Benjámin (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.);

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.).

Kiemelt dicséretben (Honorable Mention) részesült:

Bacsó Zétény (Budapest V. ker. Eötvös József Gimn., 11. évf.);

Bánhidi Dominik (Baja, Szent László ÁMK, 12. évf.);

Császár Kornél (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn., 12. évf.);

Rajmon Imola (Budapest XIII. kerületi Berzsenyi Dániel Gimn., 12. évf.);

Tófalusi Ádám (Debreceni Református Koll. Dóczy Gimn., 12. évf.);

Tordai Tegze (Hódmezővásárhely, Bethlen Gábor Református Gimn. és Szathmáry Koll., 11. évf.).

Ezen kívül az aranyérmes és az ezüstérmes csapatban is volt magyar versenyző *Soós Benjamin* és *Rajmon Imola* személyében.

A fentebb vázolt „nehézségek” tükrében is mindenképpen büszkék lehetünk erre az eredményre. Szeretnénk, ha sok diák kapna kedvet e csodálatos tudományág megismeréséhez, műveléséhez. Jó lenne, ha minél többen kapcsolódnának be a szakköri munkába, a versenyzésbe. Minden – csillagászat iránt érdeklődő – középiskolást várunk az új tanévben versenyeinkre, szakköreinkre, hogy a következő, 2020-ban Kolumbiában megrendezendő olimpián is hasonló sikereket érhessünk el.

Az olimpiával és az új tanév versenyeivel kapcsolatos további információk találhatók az alábbi linkeken:

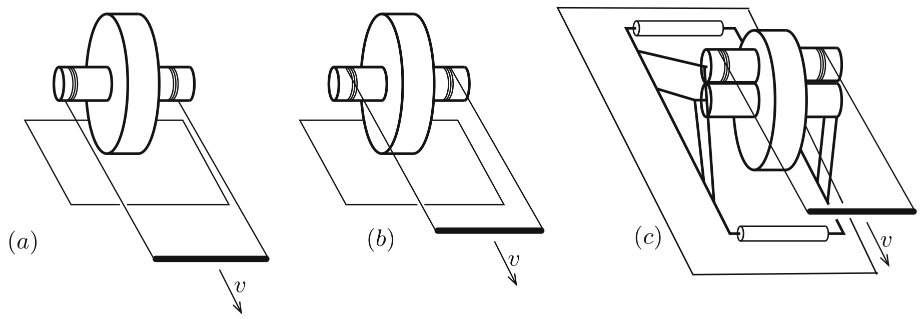
`www.ioaa2019.hu`
`https://www.facebook.com/ioaa2019/`
`http://www.bajaobs.hu/ioaa/`

Az utóbbi honlap archívumában hamarosan megtekinthetők lesznek a feladatok és azok megoldásai is.

Udvardi Imre

Fizika gyakorlat megoldása

G. 662. *Az* (a) *és a* (b) ábrán *látható összeállítás egy nagyobb korongból és egy-egy, hozzá koncentrikusan rögzített, kisebb hengerből áll. A kis hengerekre fonalakat csévéltünk, amelyeknek végét egy rúd segítségével vízszintesen, v sebességgel mozgatjuk.*



A (c) *esetben a kis hengerhez felülről egy vele azonos átmérőjű, szabadon forgó másik kis henger is csatlakozik. A felső henger nekiszorul az alsónak, és a lebillenését egy-egy görgőhöz csatlakozó rúdszerkezet akadályozza meg. A felső hengerre is fonalat csévéltünk, és a fonál végét v sebességgel húzzuk. A korongok a talajon, illetve a kis hengerek egymáson nem csúsznak meg.*

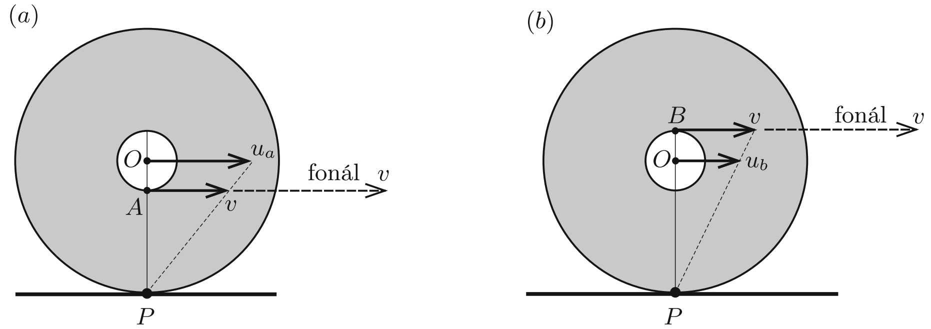
Melyik irányban, és v-nél nagyobb vagy kisebb sebességgel fog mozogni a korong középpontja az egyes esetekben?

(*3 pont*)

Megoldás. A korong és a henger(ek) mozgása szempontjából az oldalirányú méretek lényegtelenek, ezért mindhárom elrendezésnek csak az oldalnézetét (2D ábrázolását) vizsgáljuk.

Mindhárom esetben a korong a talajjal érintkező P pontja (a pillanatnyi forgástengely) körül fordul el. Ha a korong középpontjának u sebességét szeretnénk meghatározni, elegendő a korongnak a függőleges OP szakasz menti vékony darabját tekinteni, vagyis a korongból képzeletben kivágott, vékony rúd mozgását vizsgálni. Egy ilyen, a legalsó P pontja körül elforduló rúd bármelyik pontjának sebessége egyenesen arányos a P ponttól mért távolsággal, amint azt az *1. ábra* mutatja.

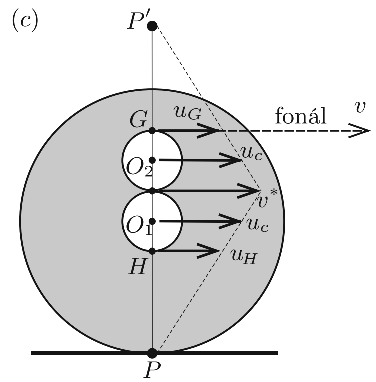
Az (a) esetben, amikor a korongot (a „rudat") az A pontban v sebességgel jobbra (előre) húzzuk, a korong középpontjának u_a sebessége *nagyobb* lesz, mint v, hiszen $OP > AP$, és látható, hogy a korong *előrefelé* mozdul el.



1. ábra

A (b) esetben, amikor a fonál a B pontban húzza a korongot, $BP > OP$ miatt a középpont u_b sebessége *kisebb* v-nél, és a korong most is *előre* fog mozogni.

A (c) eset az előzőeknél kicsit bonyolultabb, mert a felső henger nem a P pont körül fordul el, hanem egy másik, a *2. ábrán* P'-vel jelzett ponton átmenő, az ábra síkjára merőleges egyenes lesz a pillanatnyi forgástengely. (Az áttekinthetőség kedvéért az ábrán a rúdszerkezetet és a görgőket nem tüntettük fel.)



2. ábra

Tekintsük először a nagyobb korong és a hozzá rögzített alsó henger mozgását! Ha a kis henger legfelső pontja valamekkora v^* sebességgel mozog jobbra, az O_1 középpontja u_c, a legalsó H pontja pedig u_H sebességgel mozog ugyancsak jobb felé. Ezek a sebességek a megfelelő pontoknak P-től mért távolságával arányosak (lásd az (a) esetet), ezért v^* annyival nagyobb u_c-nél, amennyivel u_c nagyobb az u_H sebességnél. Másképp fogalmazva: u_c megegyezik v^* és u_H átlagával (számtani közepével).

Nézzük most a felső hengert. Ennek O_2 középpontja ugyanakkora u_c sebességgel mozog, mint a korong középpontja, ezt a merev rúdszerkezet garantálja. Itt is igaz, hogy a korong legalsó pontjának v^* sebessége annyival nagyobb a középpont sebességénél, amennyivel u_c nagyobb a legfelső, G-vel jelölt pont u_G sebességénél. Ez utóbbi a fonál sebességével egyezik meg: $u_G = v$. Látjuk tehát, hogy a (c) esetben is *előrefelé* mozog a szerkezet, és a korong középpontjának sebessége *nagyobb* v-nél.

Az is leolvasható a 2. ábráról, hogy $u_G = u_H = v$, vagyis mindegy, hogy a felső vagy az alsó hengerre csévélt fonállal húzzuk a korongot, a korong középpontjának sebessége ugyanakkora, a fonál sebességével azonos irányú, de annál nagyobb lesz ($u_a = u_c > v$).

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. Ha a korong sugara R, a kis hengereké pedig r, akkor a korong középpontjának sebessége a három esetben:

$$u_a = u_c = \frac{R}{R-r}v, \qquad u_b = \frac{R}{R+r}v.$$

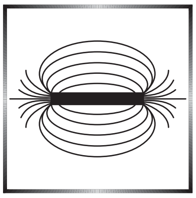
Ezek az összefüggéseket (amelyek levezetése nem tartozott a feladathoz) könnyen leolvashatók az 1. ábrán látható hasonló háromszögekből. Ezekben a képletekben v együtthatói $r < R$ esetén pozitív számok, tehát mindhárom esetben u és v iránya megegyezik.

Elképzelhető az az eset is, amikor $r > R$. (Ez úgy valósulhat meg, hogy a korong egy keskeny, vízszintes lécen gördül, és az r sugarú hengerek a léc két oldalán a léc alá nyúlnak.) A fenti képletekből látszik, hogy ilyenkor u_a és u_c ellentétes előjelű, mint v, tehát a korong középpontja „visszafelé" fog mozogni. A (b) esetben a korong középpontja mindig előrefelé mozog, akármekkora is r és R.

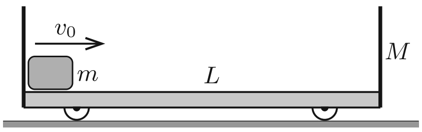
Érdekes még az $r = R$ eset. Ilyenkor $u_b = v/2$, és a mozgás létrejöhet. Az (a) és a (c) eset azonban nem valósulhat meg, mert a csúszásmentes korongnak a talajjal érintkező pontja nem mozoghat $v \neq 0$ sebességgel.

(G. P.)

27 dolgozat érkezett. Helyes Sárvári Borka Luca megoldása. Hiányos (1–2 pont) 16, hibás 10 dolgozat.



Fizika feladat megoldása



P. 5123. *Vízszintes felületen lévő, oldalfalakkal határolt, $M = 1$ kg tömegű, $L = 0{,}3$ m hosszúságú kiskocsi bal oldalán egy $m = 0{,}25$ kg tömegű, kis méretű test található. A kocsi a talajon súrlódásmentesen mozog, kerekeinek mérete és tömege elhanyagolható.*

Egy adott pillanatban az m tömegű testet $v_0 = 1$ m/s sebességgel jobbra elindítjuk. A test és a kocsi közötti súrlódási tényező $\mu = 0{,}1$. A test és a kocsi ütközését tekintsük rugalmasnak.

a) Mekkora sebességgel mozog a kocsi, miután az m tömegű test a kocsihoz viszonyítva nem mozog?

b) Milyen távol van ekkor a test a kocsi bal oldali falától?

c) Mekkora a testek sebessége az első rugalmas ütközés utáni pillanatban?

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. a) A kocsi – a kis test mozgása miatt fellépő súrlódási erő miatt – gyorsulni fog, a hozzá rögzített vonatkoztatási rendszer tehát *nem* inerciarendszer. Célszerű a mozgást a talaj vonatkoztatási rendszerében leírni. Itt (mivel vízszintes irányú külső erők nem hatnak) alkalmazható a lendületmegmaradás törvénye.

Ha a kis test már nem mozog a kocsihoz képest, akkor a közös v_1 sebességükre fennáll:

$$mv_0 = (M+m)v_1, \quad \text{vagyis} \quad v_1 = v_0\frac{m}{M+m} = 0{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) A munkatétel is alkalmazható:

$$W = \frac{1}{2}(m+M)v_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

ahol W (a súrlódási erő munkája) az $F=\mu mg$ súrlódási erőből és a kis testnek a *kiskocsin megtett* s útjából számolható:

$$W = -Fs = -\mu mgs.$$

Ezek szerint

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_1^2}{\mu mg} = 0{,}41\ \mathrm{m}.$$

Mivel $L<s<2L$, a kis test *egyszer* ütközik a kiskocsi jobb oldali falával, így a kocsi bal oldali falától $x=2L-s=0{,}19$ m távolságra lesz akkor, amikor már nem mozog a kiskocsihoz képest.

c) Az első ütközés után legyen a kis test sebessége v_m, a kiskocsi sebessége pedig v_M. (A sebességeket jobb felé, v_0-lal megegyező irányban tekintjük pozitívnak. Nyilván teljesülnie kell a $v_M > v_m$ feltételnek, hiszen a kis test ekkor *távolodik* a kocsi jobb oldali falától.) A lendületmegmaradás törvénye szerint

$$mv_0 = mv_m + Mv_M, \qquad \text{tehát} \quad v_m = v_0 - \frac{M}{m}v_M.$$

Mivel a kis test egyszer csúszik végig a kocsi platóján, vagyis a relatív elmozdulás éppen L, a munkatétel most így alkalmazható:

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu gL,$$

vagyis

$$mv_0^2 - 2\mu mgL = mv_m^2 + Mv_M^2.$$

Felhasználva v_m fentebb megadott kifejezését:

$$mv_0^2 - 2\mu mgL = m\left(\frac{mv_0 - Mv_M}{m}\right)^2 + Mv_M^2,$$

vagyis átrendezés után a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$0 = v_M^2(M^2+Mm) - v_M\cdot 2Mmv_0 + 2\mu m^2 gL = 0.$$

Ennek megoldása:

$$v_M = \frac{mv_0}{M+m}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{2\mu gL(M+m)}{Mv_0^2}}\right) \approx 0{,}2\cdot(1\pm 0{,}5)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A két gyök közül az egyik az ütközés előtti, a másik pedig az ütközés utáni állapotnak felel meg, hiszen mindkét esetben érvényes mind a lendületmegmaradás törvénye, mind pedig a munkatétel fentebb felírt alakja. Az ütközés után a kiskocsi sebessége nagyobb lesz, mint amekkora az ütközés előtt volt, tehát nekünk a másodfokú egyenlet *nagyobb* gyökét kell választanunk.

$$v_M = \frac{mv_0}{M+m}\left(1+\sqrt{1-\frac{2\mu g L(M+m)}{Mv_0^2}}\right) \approx 0{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

a kis méretű test sebessége pedig

$$v_m = v_0 - \frac{M}{m}v_M \approx -0{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Molnár Mátyás (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

37 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 14 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 389. Erősítsünk vékony fonalat egy tojáshoz, és helyezzük bele egy hengeres edénybe. Öntsünk a tojásra annyi vizet, hogy ellepje a tojást, majd a fonálnál fogva óvatosan emeljük ki a tojást a vízből.

Mérjük meg, hogyan függ a fonalat feszítő erő a tojás elmozdulásától! Határozzuk meg a kiemelés során végzett munkát! Függ-e ez a munka az edény keresztmetszetétől?

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 681. Régészeti ásatások során jó állapotban a felszínre került egy színaranyból készült, egyenletes, kis falvastagságú, egyenes henger alakú, felül nyitott, 2 literes edény. A henger belső átmérője és a belső magassága ugyanakkora.

Ha az üres edényt óvatosan egy tál vízbe helyezzük úgy, hogy a szimmetriatengelye mindvégig függőleges legyen, a test akkor kerül egyensúlyi helyzetbe, amikor a külső vízszint az edény belső magasságának $\frac{5}{8}$ részénél helyezkedik el. Határozzuk meg az edény falvastagságát!

(*3 pont*)

G. 682. Egy régi vízmelegítő bojleren a mellékelt adatokat tartalmazó címke található:

Elektromos vízmelegítő
Műszaki adatok:
220 V / 1200 W
80 liter
Felfűtési idő: 5 óra

a) Mekkora a bojler hatásfoka, ha a „felfűtési idő” alatt a bojler a 15 °C-os vizet 75 °C-ra fűti fel?

b) Ma már ugyanezt a bojlert 230 V feszültségen használják. Mennyire csökkent a bojler felfűtési ideje?

(*3 pont*)

G. 683. Van két egyforma (piros) ellenállásunk és másik két egyforma (kék) ellenállásunk. Melyik kapcsolásban nagyobb az eredő ellenállás, ha

a) a két pirosat és a két kéket is sorba, majd ezeket párhuzamosan kapcsoljuk;

b) egy-egy piros és kék ellenállást sorba, ezeket pedig párhuzamosan kapcsoljuk?

(*4 pont*)

G. 684. Egy repülőgép – légi térképészeti célból – állandó sebességgel és viszonylag kis magasságban hosszú ideig repül az Egyenlítő fölött. A földi irányítók azt észlelik, hogy a gép 48 óránként halad át a kiindulási pontja fölött. Mennyi idő telik el a napnyugta és a napkelte között repülőgépen, ha a gép

a) kelet felé repül,

b) nyugat felé repül?

(A repülőgépet időnként a levegőben töltik fel üzemanyaggal.)

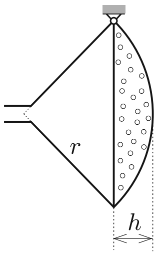
(*4 pont*) *Zétényi Gergő* (Óbudai Harrer Pál Ált. Isk.) kérdése alapján

P. 5154. Egy filmjelenetben egy fiú biciklizik. Ahogy a fiú lassan teker, a kerekek a kerékpár haladási irányának megfelelő irányban látszanak forogni. Miközben a fiú lassan növeli a sebességét, egyszer csak a kerekek az ellenkező irányban látszanak forogni. A sebesség további növelésekor a kerekek látszólagos forgása fokozatosan lassul (de még mindig a „rossz” irányba forognak), míg egy bizonyos v haladási sebesség esetén úgy tűnik, mintha a kerekek forgása megállna. Mekkora v értéke, ha a kerekek kerülete 2,5 m, mindegyik keréknek 36 küllője van, és a film másodpercenként 24 filmkockából áll?

(*4 pont*)

P. 5155. Egy $(n+4)\ell$ hosszúságú, vékony huzalból olyan tengelyesen szimmetrikus E betűt hajlítottunk, amelynek vízszintes szárai ℓ hosszúságúak, függőleges szára pedig $n\ell$ hosszúságú. Hol van az alakzat tömegközéppontja?

(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest



P. 5156. Vékony lemezből készült öntözőkanna gömbcikk alakú rózsáját peremkörének egyik pontjánál az *ábrán* látható módon csuklósan rögzítettük. Mekkora a h/r arány, ha egyensúlyi állapotban a test tengelye vízszintes? (A vékony lemez homogén, állandó vastagságú. A rózsa vízbevezető csövecskéjének méretét és a kifolyónyílások összes területét tekintsük elhanyagolhatóan kicsinek.)

(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

P. 5157. Céllövéskor a gyorsabb vagy a lassabb lövedék térül el jobban a Föld forgása következtében fellépő tehetetlenségi (Coriolis-) erő hatására?

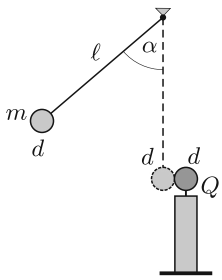
(*4 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

P. 5158. Táblázati adatok felhasználásával határozzuk meg, hogy egy kuktafazékban lévő, 120 °C-os telített vízgőz a sűrűség szempontjából mekkora hibával tekinthető ideális gáznak!

(*3 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5159. Két azonos ellenállás felhasználásával háromfokozatú villanyrezsót készítettünk. Hálózatról működtetve a legerősebb fokozatban 1500 W teljesítményt vesz fel. Mekkora ellenállásokból készítettük? Mennyi idő alatt melegít fel a leggyengébb fokozatban fél liter vizet 20 °C-ról 80 °C-ra, ha a hatásfoka 75%?

(*3 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros



P. 5160. Rögzített szigetelőállvány tetejére erősített kicsiny, $d=2$ cm átmérőjű fémgömb töltése $Q=8\cdot10^{-9}$ C. Vékony, $\ell=1$ m hosszú, az *ábra* szerint felfüggesztett szigetelőszál végére erősített ugyanakkora semleges fémgömb tömege $m=1$ g. A fonalat $\alpha=60°$-ig kitérítjük, majd elengedjük. A két gömb centrálisan, abszolút rugalmasan ütközik. Az ütközés során az elektromos mező energiája nem változik, energiadisszipáció nincsen.

A kiindulási helyzeténél mennyivel kerül magasabbra a fonálinga kis gömbje, ha a légellenállás is elhanyagolható?

(Lásd még a kapacitásokról szóló cikket lapunk 425. oldalán.)

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5161. Homogén, $\boldsymbol{B}$ indukcióvektorú, erős mágneses térbe R sugarú, igen hosszú, töltetlen fémhengert helyezünk. A henger tengelyét az indukcióvektorral párhuzamosan rögzítjük, majd akörül ω szögsebességgel forgatni kezdjük. Mekkora felületi töltéssűrűség alakul ki a henger palástján?

(*5 pont*) Közli: *Németh Róbert,* Budapest

P. 5162. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb oldallapjai síktükrök. A hasáb a vízszintes alaplapjának súlypontján átmenő, függőleges tengely körül T periódusidővel egyenletes forgómozgást végez. Az egyik oldallapjára vízszintes irányú, a forgástengely felé haladó lézersugár érkezik. A $t=0$ pillanatban a lézersugár merőleges az egyik tükörre. Adjuk meg és ábrázoljuk a visszavert sugárnak a beeső sugárral bezárt szögét az idő függvényében a $0 \leqslant t \leqslant T$ időtartamban!

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5163. A kobalt 60-as tömegszámú izotópja elektront bocsát ki magából. Milyen atommaggá alakul át?

(*3 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

❄

Beküldési határidő: 2019. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 69. No. 7. October 2019)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 414): **K. 629.** Seven ducklings are walking towards the lake in a single file: Loppy, Happy, Tappy, Kippy, Boppy, Poppy, and Sippy. They normally walk in the same order every day, but this time they lined up in reverse order. Regarding the present order, the following information is available: The ducklings preceding Loppy could line up in six different ways in a single file. The number of ducklings preceding Boppy is the half of those following him. The number of ducklings between Poppy and Tappy is one fewer than twice the number of those between Sippy and Happy. Happy and Tappy both walk behind Kippy. What is the normal order of the ducklings walking to the lake? **K. 630.** A party is breaking up, and everyone is going home. To say goodbye, every female participant shakes hands with every other female participant, and every male participant shakes hands with every other male participant. During this process, a friend of the host turns up, who shakes hands with everyone he knows, males and females alike. Given that 5 of the participating men also brought their wives along, and 83 handshakes took place altogether, what may be the number of persons known by the friend of the host? **K. 631.** Explain in detail why the following statement is true: if the product of ten positive integers ends in three zeros, then there are six numbers among them such that their product has the same property. **K. 632.** A father had a basket of plums. He gave the plums to his sons in the following way: the first son received 2 pieces plus one nth of the remaining plums, then the second son received 4 pieces plus one nth of the remaining plums, then the third one received 6 pieces plus one nth of the remaining plums, and so on. The rest of the plums the father kept for himself. At the end of this process, it turned out that everyone got the same number of plums. Given that the father had at least 2 sons, what may be the value of n? **K. 633.** Doris thought of an integer, from 3 to 25, inclusive. She told Anna whether the number is a perfect square, whether it is a prime, and whether it is a multiple of 5. From this information, Anna was able to tell which number it was. What may the number be?

New exercises for practice – competition C (see page 415): **Exercises up to grade 10: C. 1560.** Six classes of a school are planning to take trips to the towns of Pécs, Szeged, Debrecen or Miskolc. (Each class is to visit a single town.) Each town must be visited by at least one class. In how many different ways may they select the trip destinations? **C. 1561.** What may be the angles of a triangle, if the triangle formed by the points of tangency of the incircle on the sides is similar to the original triangle? **Exercises for everyone: C. 1562.** Prove that if n^2+1 is divisible by 5 for some integer n, then one of the numbers $(n-1)^2+1$ and $(n+1)^2+1$ is also divisible by 5. **C. 1563.** Let us consider one half of an equilateral triangle (that is, the triangle having angles 30°, 60° and 90°). We create two more triangles by rotating the original one by 30°, and the original one by 60° about its right angle in both cases. Determine the area of the intersection of these 3 triangles. **C. 1564.** A 6×6 square grid is divided into n rectangles of different areas by cutting along grid lines. Give an example of such a dissection for every possible $n>1$. **Exercises upwards of grade 11: C. 1565.** The sides of a trapezium are 2, 3, 5, and 6 units long, in some order. What is the largest possible area of such a trapezium? **C. 1566.** Assume that the probability of a newborn baby being a boy is always p. In families with two children, is it more common to have one boy and one girl than to have two children of the same sex?

New exercises – competition B (see page 416): **B. 5046.** Let $n\geqslant 3$, and consider the graph in which the vertices are the grid points (i,j), where $1\leqslant i,j\leqslant n$, and the distinct points (i,j) and (k,l) are connected by an edge if and only if $i^2+j^2+k^2+l^2$ is divisible by 3. For what values of n is it possible to walk the edges of the graph by traversing each edge exactly once? (*4 points*) (Proposed by *M. Pálfy,* Budapest) **B. 5047.** In a right-angled triangle ABC, point D lies in the interior of leg AC, and point E lies on the extension of hypotenuse AB beyond B. The second intersection of circles ADE and BCE (different from E) is F. Show that $\angle CFD=90^\circ$. (*4 points*) **B. 5048.** The base of a pyramid is a convex polygon, and the areas of the lateral faces are equal. Select an arbitrary point on the base, and consider the sum of the distances of this point from the lateral faces. Prove that the sum is independent of the choice of the point on the base. (*3 points*) (*Croatian problem*) **B. 5049.** Prove that there are infinitely many pairs of positive integers (a,b) for which $2019<\frac{2^a}{3^b}<2020$. (*5 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5050.** Solve the equation $\cos(3x)+\cos^2 x=0$. (*3 points*) **B. 5051.** The sides of quadrilateral $ABCD$ are $AB=8$, $BC=5$, $CD=17$ and $DA=10$. The intersection of diagonals AC and BD is E, and $BE:ED=1:2$. What is the area of the quadrilateral? (*5 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5052.** Two players, First and Second take turns in writing a number 0 or 1 in the fields of a 19×19 table, initially all blank. When all fields are filled in, they calculate the sum of each row, and the sum of each column. Let the largest row sum be A, and let the largest column sum be B. If $A>B$ then First wins the game. Second wins if $A<B$, and it is a draw if $A=B$.

Does either of the players have a winning strategy? (*6 points*) **B. 5053.** Let G denote the inscribed sphere of a tetrahedron $ABCD$, and let G_A be the escribed sphere touching the face BCD. Let T be the tetrahedron formed by the points of tangency of G on the planes of the faces, and let T_A be the tetrahedron formed by the points of tangency of G_A on the planes of the faces. Show that $\frac{V^3(T)}{V^3(T_A)} = \frac{V^2(G)}{V^2(G_A)}$ holds for the volumes of the tetrahedra and the spheres. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 418): **A. 758.** In quadrilateral $ABCD$, $AB = BC = \frac{1}{\sqrt{2}}DA$, and $\angle ABC$ is a right angle. The midpoint of side BC is E, the orthogonal projection of C on AD is F, and the orthogonal projection of B on CD is G. The second intersection point of circle BCF (with center H) and line BG is K, and the second intersection point of circle BHC and line HK is L. The intersection of lines BL and CF is M. The center of the Feurbach circle of triangle BFM is N. Prove that $\angle BNE$ is a right angle. (Proposed by *Zsombor Fehér,* Cambridge) **A. 759.** We choose a random permutation of numbers $1, 2, \ldots, n$ with uniform distribution. Prove that the expected value of the length of the longest increasing subsequence in the permutation is at least $\sqrt{n}$. (Proposed by *László Surányi,* Budapest) **A. 760.** An illusionist and his assistant are about to perform the following magic trick. Let k be a positive integer. A spectator is given $n = k! + k - 1$ balls numbered $1, 2, \ldots, n$. Unseen by the illusionist, the spectator arranges the balls into a sequence as he sees fit. The assistant studies the sequence, chooses some block of k consecutive balls, and covers them under her scarf. Then the illusionist looks at the newly obscured sequence and guesses the precise order of the k balls he does not see. Devise a strategy for the illusionist and the assistant to follow so that the trick always works. (The strategy needs to be constructed explicitly. For instance, it should be possible to implement the strategy, as described by the solver, in the form of a computer program that takes k and the obscured sequence as input and then runs in time polynomial in n. A mere proof that an appropriate strategy exists does not qualify as a complete solution.) (Proposed by *Nikolai Beluhov,* Bulgaria, and *Palmer Mebane,* USA)

Problems in Physics

(see page 442)

M. 389. Attach a piece of thread to an egg and place the egg into a cylinder-shaped container. Pour water into the container such that it covers the egg, and then carefully pull out the egg from the water with the help of the thread. Measure how the tension in the thread depends on the displacement of the egg. Determine the work done, while the egg was pulled out. Does this work depend on the cross section of the container?

G. 681. An artefact made of pure gold was found and dug out in good condition during an excavation at an archaeological site. The 2 litre cylinder-shaped artefact has thin uniform walls, and has no top base. The inner diameter and the inner height of the cylinder are equal. When the empty cylinder is carefully placed into water such that its symmetry axis is vertical all the time, then it reaches an equilibrium position when the level of the water outside is at $\frac{5}{8}$-th of the inner height of the cylinder. Determine the width of the wall of the artefact. **G. 682.** The data in the *figure* can be read on the label of an old boiler. *a*) What is the efficiency of the boiler if during the warm-up time (5 hours) the boiler heats up water from a temperature of 15 °C to 75 °C? *b*) Today this boiler is used at a voltage of 230 V. To what time did the warm-up time of the boiler decreased? **G. 683.** We have two alike (red) resistors and also two alike (blue) resistors.

In which connection will the equivalent resistance of the resistors be greater, if *a*) the two red resistors and the two blue resistors are connected in series, and then these are connected in parallel; *b*) the series connections of a red and a blue resistor are connected in parallel? **G. 684.** A plane – from cartographic purposes – flies at a constant speed for quite a long time above the equator, at some small height. The operators at the ground observe that the plane passes its starting position at every 48-th hour. How much time elapses between the sunset and the sunrise on the plane if the plane flies *a*) towards the east, *b*) towards the west? (From time to time the plane is filled with fuel in the air.)

P. 5154. A boy is riding his bicycle in a cinema scene. When the boy rides his bicycle slowly, the wheels seem to rotate in a direction which is in accordance with the motion of the bicycle. When the boy speeds up, suddenly the wheels seem to turn in the opposite direction. When the speed of the bicycle is further increased, the apparent rotation of the wheels slows down gradually (but they still rotate in the "wrong" direction), and at some particular speed of v the wheels seem to stop rotating. What is the value of v if the perimeter of the wheels is 2.5 m, each wheel has 36 spikes, and the film has 24 frames in a second? **P. 5155.** A symmetrical letter E was bent from a thin piece of wire of length $(n+4)\ell$ such that each of its horizontal parts has a length of ℓ and its vertical part has a length of $n\ell$. Where is the centre of mass of the figure? **P. 5156.** The spherical sector shaped rose of a watering can, made of thin metal, is hung at one point on its circular rim by means of a hinge (see the *figure*). What is the ratio h/r, if in the equilibrium position of the rose its symmetry axis is horizontal? (The metal sheet has constant width and uniform density. The size of the tube through which the water enters the rose, as well as the total area of the small holes can be considered negligibly small.) **P. 5157.** Which bullet, used in target shooting, is deflected more by the fictitious force due to the rotation of the Earth (called Coriolis force) a faster or a slower one? **P. 5158.** Using the data of tables determine the error by which a sample of saturated water vapour in a pressure-cooker at a temperature of 120 °C can be considered ideal with respect to density. **P. 5159.** An electric stove, which has three power levels, was made from two alike resistors. When it is used from the mains at the highest heat level it delivers a power of 1500 W. What is the resistance of the resistors? How long does it take to heat half a litre of water from 20 °C to 80 °C if it is used in its lowest heat level and its efficiency is 75%? **P. 5160.** The charge on a metal sphere of diameter $d=2$ cm, mounted on a fixed insulating stand, is $Q=8\cdot10^{-9}$ C. Another, but a neutral metal sphere of mass $m=1$ g and of the same size as the previously described one, is attached to a thin insulating piece of thread of length $\ell=1$ m as shown in the *figure*. The thread is displaced by an angle of $\alpha=60^\circ$, and then it is released. The two spheres collide head on, totally elastically. The energy of the electric field does not change in the course of the collision, there is no energy dissipation. How much higher above its initial position will the sphere on the thread go if air drag is also negligible? **P. 5161.** A very long uncharged metal cylinder of base radius R is placed into strong uniform magnetic field of magnetic induction $\boldsymbol{B}$. The axle through the symmetry axis of the cylinder is fixed parallel to the magnetic induction, and then the cylinder is started to rotate about by angular velocity ω. What is the resulted surface charge density on the lateral surface of the cylinder? **P. 5162.** The faces of an equilateral-triangle-based right prism are plane mirrors. The prism executes uniform rotational motion of period T about a vertical axis which goes through the centroid of the horizontal base of the prism. A horizontal beam of laser light aimed at the axis of rotation is incident on one of the faces. At the instant $t=0$ the beam is perpendicular to one of the mirrors. Determine and graph the angle between the incident and the reflected laser beam as a function of the elapsed time over the interval $0\leqslant t\leqslant T$. **P. 5163.** The nuclide of a cobalt isotope of atomic mass number 60 emits an electron when it decays. What is the resulting nucleus?