KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

70. évfolyam 3. szám Budapest, 2020. március

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

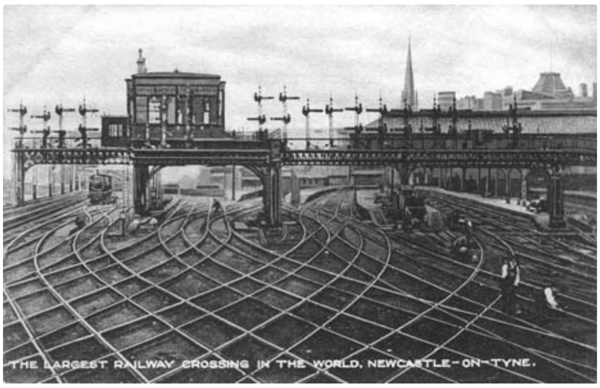
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Térbe kilépő bizonyítások VI.[1]

Állandó távolságú görbepárok

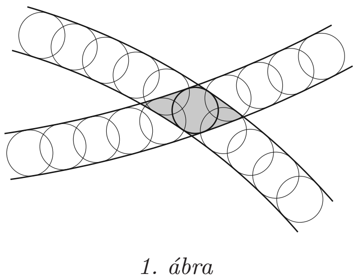
Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

Vasúti sínek és beírt körök



A Newcastle-i központi vasútállomás sínei egy 1910-es képeslapon

A vasúti sínpárokat jól ismerjük: két olyan görbéből állnak, amelyek távolsága egy előre rögzített d állandó, a sínpár *nyomtávja*. Úgy is mondhatjuk, hogy a vasútvonal bármelyik pontján a két sín közé d átmérőjű kört lehet írni.



1. ábra

Ahol két sínpár keresztezi egymást, ott a kereszteződésben egy közelítőleg rombusz alakú terület jön létre, ezért az ilyen helyeket, az osztott pályás autóutak kereszteződéseihez hasonlóan, *gyémánt-kereszteződésnek* (angolul: *diamond-crossing*) is hívják. A kereszteződésben a két sínpár közé írt körseregeknek egy közös elemét fedezhetjük fel: a „rombuszba” beírt kört, amely mind a négy síngörbét érinti (*1. ábra*).

Látni fogjuk, hogy ebből a gondolatból milyen sokféle feladatot lehet gyártani; az előző részben látott olimpiai feladatjavaslatnak is van ilyen hangulatú megoldása. Ehhez most kivételesen nem három dimenzióba, hanem egy nem-euklideszi geometriai modellbe, a Poincaré-féle félsíkmodellbe fogunk átlépni, és ott keresünk állandó távolságú görbepárokat és ilyenek kereszteződéseit.

[1] A cikksorozat a Rényi Intézet és a Sztaki támogatásával készült.

A Poincaré-féle félsíkmodell

A félsíkmodell inverzióval kapható a Poincaré-féle körmodellből; szintén a hiperbolikus sík egy modellje, ha tetszik, egy képe az euklideszi síkon belül. A „pontok" egy félsík belső pontjai. A modellt mindig úgy fogom lerajzolni, hogy a határa egy vízszintes egyenes, és az egyenes fölötti félsík lesz maga a modell.

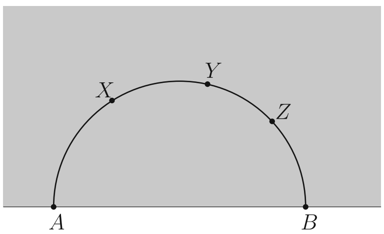
Az „egyenesek" a félsík határára merőleges félkörök és félegyenesek. A félegyeneseket tekinthetjük a félkör határhelyzetének; ha a síkot kiegészítjük egy végtelen távoli ponttal, amely az összes egyenes közös végpontja (vagyis a modellt az inverzív síkon helyezzük el), ez az ideális pont lesz a félegyenesnek látszó „egyenesek" másik vége.

Máris látjuk, hogy a különféle geometriai alakzatok és mennyiségek a modellen belül nem ugyanazok, mint aminek kívülről látszanak. A hiperbolikus „sík" félsíknak látszik, az „egyenesek" pedig félkörnek vagy félegyenesnek. Azért, hogy a félreérthetőséget elkerüljük, a modellbeli dolgokat a későbbiekben is idézőjelbe fogom tenni, és helyenként a „hiperbolikus" jelzőt is használni fogom. A kívülről látható dolgok nem lesznek idézőjelben, és időnként a „látszólagos" jelzővel is hangsúlyozni fogom, hogy csak látszatról van szó.

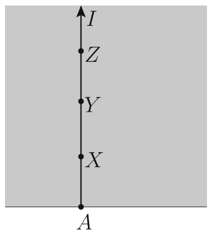
Két „pont" „távolságát" ugyanazzal a képlettel definiáljuk, mint a körmodellben: ha X és Y két pont a határegyenesre merőleges AB félkörön (*2.a ábra*), akkor a „távolságuk"

$$d(X,Y) = k \cdot \bigl|\ln(ABXY)\bigr| = k \cdot \left|\ln \frac{AX \cdot YB}{AY \cdot XB}\right|, \tag{1a}$$

ahol k egy rögzített pozitív szám, a hiperbolikus geometria paramétere.



2.a ábra



2.b ábra

Ha X és Y az A végpontú, a határra merőleges félegyenesen van (*2.b ábra*), akkor a félegyenes másik vége az I ideális pont, és $\frac{YI}{XI} = 1$; tehát a „távolság"

$$d(X,Y) = k \cdot \bigl|\ln(AIXY)\bigr| = k \cdot \left|\ln \frac{AX}{AY}\right|. \tag{1b}$$

A képletekben a logaritmus előjele attól függ, hogy a négy pont sorrendje A, X, Y, B (a logaritmus értéke negatív) vagy pedig A, Y, X, B (pozitív); ahol lehet, megpróbáljuk a pontokat úgy elhelyezni, hogy ne legyen szükség az abszolútértékjelre.

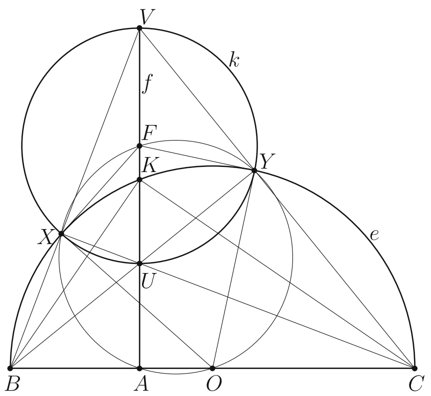
Érdemes ellenőrizni, hogy ez a távolság-képlet szimmetrikus, vagyis $d(X,Y) = d(Y,X)$, és additív is: ha X, Y, Z ebben a sorrendben három pont ugyanazon az „egyenesen”, akkor $d(X,Y) + d(Y,Z) = d(X,Z)$.

Végül definiáljuk a szögeket: két „egyenes” „szöge” a félsíkmodellben is éppen akkora, mint amekkorának látszik.

Körök és sugaraik

A félsíkmodellben a „körök” a félsík belsejében fekvő körvonalak, ezt most ellenőrizni fogjuk.

Vizsgáljunk meg egy tetszőleges k kört a félsíkban, amely szimmetrikus a határra merőleges f félegyenesre; az f kezdőpontját jelöljük A-val, és a k-val vett metszéspontjai legyenek U és V. A kör látszólagos középpontja az UV szakasz F felezőpontja, de a kör „középpontja” nem ez, hanem az UV szakasznak az a K pontja, amelyre $d(U,K) = d(K,V)$; az (1b) definíciót beírva $\frac{AK}{AU} = \frac{AV}{AK}$, vagyis $AK^2 = AU \cdot AV$.



3. ábra

Rajzoljunk a K ponton keresztül egy tetszőleges újabb e „egyenest”, vagyis félkört, amelynek végpontjai B és C, metszéspontjai a k körrel X és Y a *3. ábra* szerint. Azt szeretnénk ellenőrizni, hogy e merőlegesen metszi k-t, és az U, V, X, Y pontok ugyanakkora „távolságban” vannak a K ponttól, azaz $d(K,U) = d(K,V) = d(K,X) = d(K,Y)$. Azt már biztosítottuk, hogy $d(K,U) = d(K,V)$ teljesüljön.

Először megmutatjuk, hogy a BV és a CU egyenes átmegy az X, míg a BU és a CV egyenes átmegy az Y ponton.

A Thalész-tétel miatt a BCK háromszög derékszögű; a magasságtétel szerint $AB \cdot AC = AK^2$. A K pont definíciója szerint $AK^2 = AU \cdot AV$, tehát $AB \cdot AC = AU \cdot AV$, vagy átrendezve $\frac{AB}{AV} = \frac{AU}{AC}$. Ezért az AVB és ACU derékszögű háromszögek hasonlók, és egy A körüli, $90°$-os szögű forgatva nyújtással vihetők át egymásba. A $90°$-os forgatás miatt az átfogóik, a BV és a CU egyenesek merőlegesek. A Thalész-tétel megfordítása miatt a BV és a CU egyenesek metszéspontja a k és e körön is rajta van, vagyis ez a metszéspont éppen az X pont. Ugyanígy láthatjuk, hogy a BU és CV egyenesek metszéspontja Y.

A BCV háromszögben BY, CX és VA a magasságok, U a magasságpont. Jelölje O a BC szakasz felezőpontját, amely egyben az e kör középpontja is. Az A, O, X, Y, F pontok a háromszög Feuerbach-körén vannak; mivel $OAF\sphericalangle = 90°$, az OF szakasz a Feuerbach-körnek átmérője; ezért $OXF\sphericalangle = OYF\sphericalangle = 90°$. Más szóval, a k kör FX és FY sugarai merőlegesek az e kör OX, illetve OY sugaraira; a k és az e kör tényleg merőlegesen metszi egymást.

A $d(K, X)$ ellenőrzéséhez azt használjuk fel, hogy a BCK háromszög hasonló a BKA, a BCX pedig hasonló a BVA háromszöghöz:

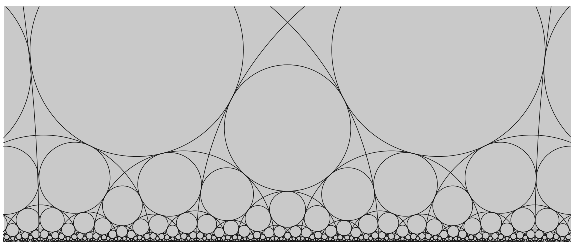
$$\frac{BK\cdot XC}{BX\cdot KC}=\frac{BK}{KC}\cdot\frac{XC}{BX}=\frac{BA}{AK}\cdot\frac{AV}{BA}=\frac{AV}{AK};$$

$$d(K,X)=k\cdot\ln\frac{BK\cdot XC}{BX\cdot KC}=k\cdot\ln\frac{AV}{AK}=d(K,V).$$

A B, C és X, Y pontok szerepének felcserélésével ugyanígy igazolható, hogy $d(K, Y) = d(K, V)$.

Az (1*a*), (1*b*) távolság-definíciók következménye, hogy a körívnek vagy éppen szakasznak látszó „szakaszok" hiperbolikus hossza csupán a modell határától mért távolságok arányától függ; ha a félsíkmodellt felnagyítjuk, vagy lekicsinyítjük, ugyanezt a modellt kapjuk vissza.

A *4. ábrán* újra lerajzoltam az előző részben már látott csempézést, de most a félsíkmodellben: a csempék olyan egybevágó szabályos ötszögek, amelyeknek mindegyik szöge derékszög, és a beírt körük is „ugyanakkora", csak a határhoz közelebbi köröket arányosan kisebbnek kell rajzolnunk.



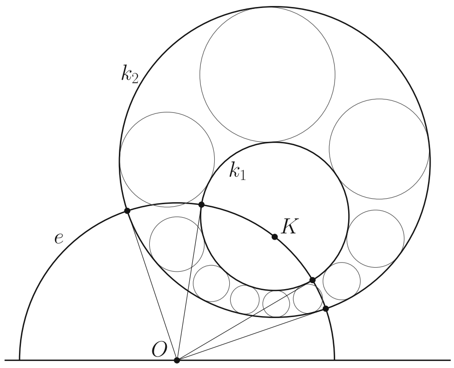
4. ábra

Állandó távolságú görbepárok a félsíkmodellben

Ahogy ígértem, vonatsíneket fogunk keresni a félsíkmodellben.

Koncentrikus körök

Az euklideszi geometriában megszokott párhuzamos egyenespárok itt nem léteznek; a legkézenfekvőbb példa állandó távolságú görbepárra két „koncentrikus" „kör". A „koncentrikust" természetesen úgy értjük, hogy a két „kör" hiperbolikus „középpontja" ugyanaz. Az *5. ábrán* a k_1 és a k_2 kör közös „középpontja" a K pont, és a mindkettőt érintő körök „ugyanakkorák".



5. ábra

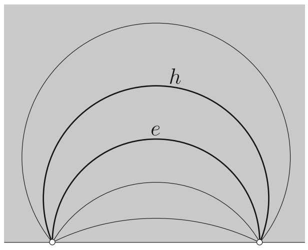
Tekintsünk egy tetszőleges, K-n átmenő e „egyenest”, amely a modellben egy O középpontú félkörnek látszik. Az e „egyenes” mindkét kört merőlegesen metszi, ezért az O pontot a metszéspontokkal összekötő szakaszok érintik a köröket. Ezek a szakaszok az e félkörnek sugarai, tehát egyenlő hosszúak; emiatt az O pont hatványa a két körvonalra ugyanakkora. Ebből láthatjuk, hogy a „koncentrikus” körök hatványvonala a félsíkmodell határegyenese.

Hiperciklusok

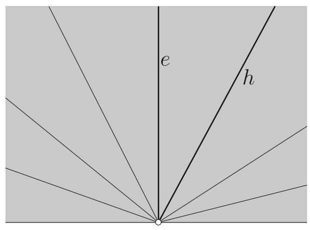
Ha egy e „egyenes” két végét egy (a félkörtől különböző) h körívvel összekötjük, egy nagyon érdekes görbét kapunk a hiperbolikus geometriánkban. Ennek a h görbének minden pontja ugyanakkora „távolságban” van az e-től. Ezért szokták a h görbét „távolsággörbének” is nevezni; mi az elterjedtebb „hiperciklus” nevet fogjuk használni.

Ha ugyanazzal a két végponttal nem egy, hanem két hiperciklust rajzolunk, akkor az e-től mért „távolságokat” egyszerűen összeadhatjuk vagy kivonhatjuk (attól függően, hogy az e-nek ugyanazon vagy pedig ellentétes oldalán vannak), ezért a két hiperciklus „távolsága” is állandó.

A *6.a* és a *6.b ábrán* közös végpontú hiperciklusokat és „egyeneseket” rajzoltam: a *6.b ábrán* az egyik közös végpont az ideális pont. Vegyük észre, hogy a 6.a ábrán a hiperciklusoknak megfelelő körívek hatványvonala ezúttal is a félsíkmodell határa.



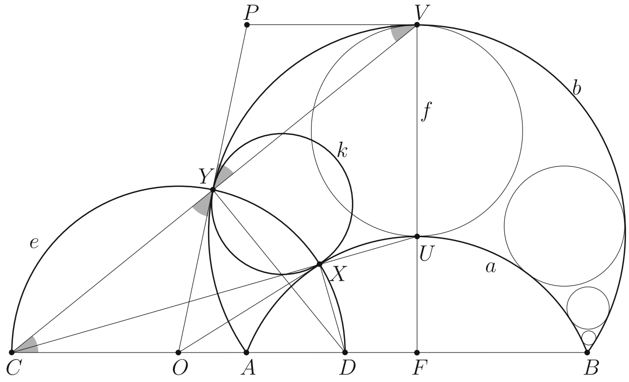
6.a ábra



6.b ábra

A szakirodalom az egyeneseket, vagyis az egyenesektől nulla távolságban haladó görbéket nem nevezi „hiperciklusnak”. Mi viszont csupa olyan állítást fogunk megfogalmazni, amelyek hiperciklusokra és egyenesekre is érvényesek, ezért mindenhol azt kellene írnunk, hogy „hiperciklus vagy egyenes”. (Pl. *„Két, közös végpontú hiperciklus vagy egyenes távolsága állandó”.*) Helyette inkább a „hiperciklus” fogalmába speciális esetként az egyeneseket is bele fogjuk érteni.

Most ellenőrizzük, hogy két, azonos végpontú hiperciklus (vagy „egyenes”) „távolsága” tényleg állandó, és a közéjük írható körök „ugyanakkorák”. Legyen a és b két hiperciklus, amelyek közös végpontjai A és B. Az AB szakasz felezőmerőlegese legyen f, jelölje f metszéspontját a-val, b-vel és az AB egyenessel rendre U, V, illetve F. Az a-ra egy tetszőleges X pontjában állítsunk egy merőleges e „egyenest”, ennek végpontjai legyenek C és D, metszéspontja b-vel Y, és az e félkör középpontja legyen O. Azt fogjuk igazolni, hogy e és b is merőlegesen metszik egymást, létezik egy k kör, amely az X és Y pontokban érinti az a, illetve a b görbét, és $d(X,Y) = d(U,V)$ (*7. ábra*).



7. ábra

Az O pontnak az a körívre vonatkozó hatványából kapjuk, hogy $OY^2 = OX^2 = OA \cdot OB$, így az e félkör OY sugara érinti b-t. Tehát az e „egyenes" a b hiperciklust is merőlegesen metszi. Az a k kör, amely az X és Y pontokban érinti az OX és OY szakaszokat, érinti az a és b görbéket is.

Szükségünk lesz arra, hogy a C, X, U pontok, illetve a C, Y, V pontok is egy egyenesre esnek. Legyen P az OY egyenes és a b körív V-beli érintőjének metszéspontja; mivel V a b felezőpontja, a PV egyenes párhuzamos az AB egyenessel. Az OYC és a PYV háromszög is egyenlő szárú, így $OYC\sphericalangle = YCO\sphericalangle = YVP\sphericalangle = PYV\sphericalangle$; ez mutatja, hogy a CY és az YV szakasz egymás meghosszabbítása. Ugyanígy igazolhatjuk, hogy C, X és U egy egyenesen van.

A CDX és a CUF derékszögű háromszögek, továbbá a CDY és a CVF derékszögű háromszögek is hasonlók, ezért

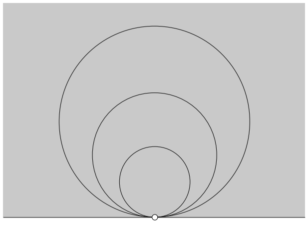
$$\frac{CX \cdot YD}{CY \cdot XD} = \frac{CX}{XD} \cdot \frac{YD}{CY} = \frac{CF}{FU} \cdot \frac{FV}{CF} = \frac{FV}{FU};$$

$$d(X,Y) = k \cdot \ln \frac{CX \cdot YD}{CY \cdot XD} = k \cdot \ln \frac{FV}{FV} = d(U,V).$$

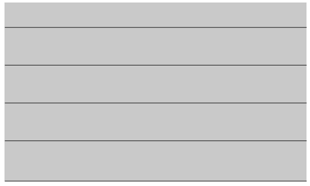
Ez mutatja, hogy bármelyik X pontban „ugyanakkora" kört lehet a két hiperciklus közé írni.

Horociklusok

A horociklusok (más néven paraciklusok) olyan, a félsíkmodellben körvonalnak vagy egyenesnek látszó görbék, amelyeknek egyetlen pontjuk van a modell határán; más szóval, a határegyenest érintő körvonalak (*8.a ábra*), és a határegyenessel párhuzamos egyenesek (*8.b ábra*). A 8.a ábrán megfigyelhetjük, hogy a közös végpontú horociklusoknak megfelelő körvonalak hatványvonala a közös érintő, vagyis ismét csak a félsíkmodell határegyenese.

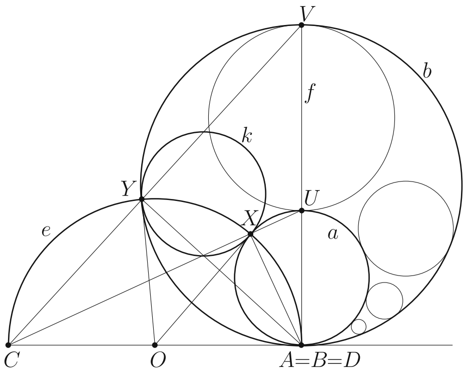


8.a ábra



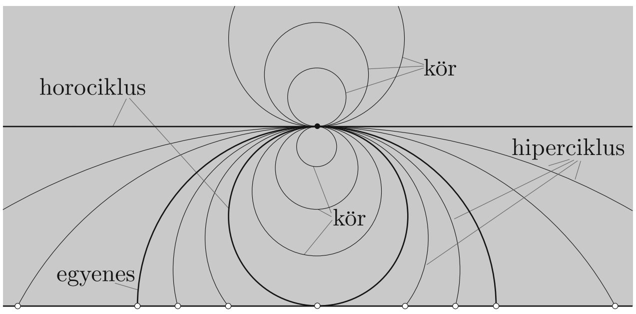
8.b ábra

A közös végpontú horocikluspárokra is igaz, hogy a „távolságuk” állandó, avagy a közéjük írt körök „ugyanakkorák”. Ennek igazolása a hiperciklusokra elmondott gondolatmenet leegyszerűsítésével történhet: a különbség annyi, hogy az A, B, D pontok egybeesnek (*9. ábra*). Ennek részletes végiggondolását az Olvasóra hagyjuk.



9. ábra

A sokféle, körvonalnak látszó görbét egy közös rajzon mutatja a *10. ábra:*



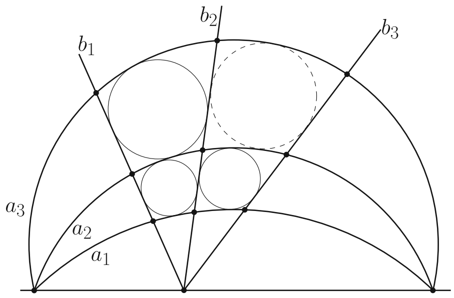
10. ábra

Érintő körös feladatok

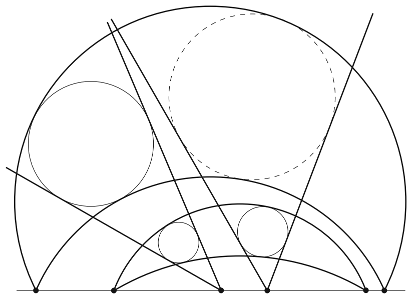
A kimerítő előkészületek után nézzünk példákat arra, hogy sínpárok kereszteződéseiből hogyan lehet feladatokat készíteni.

Ali Khezeli megoldása az olimpiai feladatjavaslatra

Az előző részben látott olimpiai feladat javaslatra (*11.a ábra*) az iráni csapat egyik megfigyelője, *Ali Khezeli* mutatta nekem a következő megoldást.



11.a ábra



11.b ábra

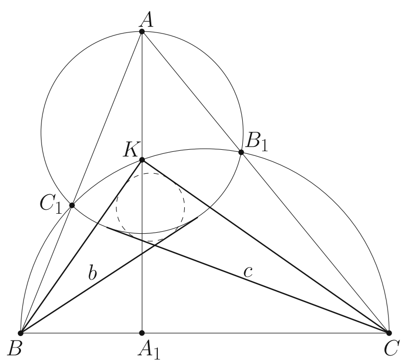
Tekintsük a 11.a ábrát egy félsíkmodellbeli rajznak. Az a_2 és a_3 hiperciklusok „távolsága" ugyanakkora, mint a b_1 és a b_2 hiperciklusok „távolsága": a közös „távolság" a $b_1a_2b_2a_3$ tartományba írt kör „átmérője". Ugyanígy, az a_1 és a_2 hiperciklusok „távolsága" ugyanakkora, mint a b_1 és a b_2 hiperciklusok „távolsága", továbbá az a_1 és a_2 hiperciklusok „távolsága" is ugyanakkora, mint a b_2 és a b_3 hiperciklusok „távolsága". Tehát az a_2 és a_3 hiperciklusok „távolsága" ugyanakkora, mint a b_2 és a b_3 hiperciklusok „távolsága", ezért az $a_2b_2a_3b_3$ tartományba is kör írható.

A megoldás általánosabban is működik, például a *11.b ábrán* látható esetben.

Hiperciklusok egy kör középpontján keresztül

Eddig a különböző görbepárok távolságát a közéjük írt körök átmérőivel mértük meg. Megtehetjük azonban azt is, hogy egy körhöz csak egy érintő hiperciklust rajzolunk, a másik hiperciklus a kör középpontján megy át.

Legyen ABC hegyesszögű háromszög, a magasságai AA_1, BB_1 és CC_1, az AA_1 magasság és a BC_1B_1C félkör metszéspontja K. Húzzunk a B és a C pontból érintőket az AB_1C_1 körhöz a háromszög belsejében, az érintő félegyenesek legyenek b és c (*12. ábra*).

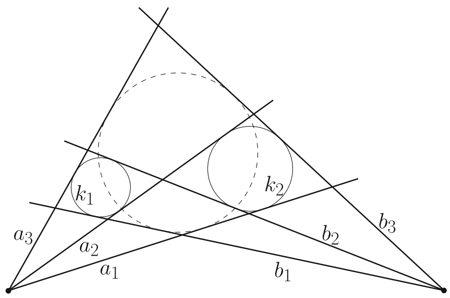


12. ábra

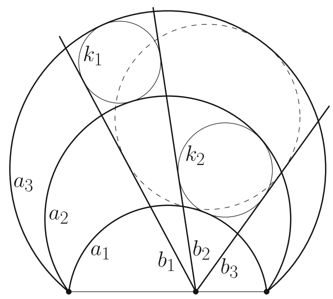
Ezeket a köröket és a K pontot már ismerjük a 3. ábráról: az A_1A és a BC hiperbolikus „egyenes" is merőlegesen metszi az AB_1C_1 kört, ezért K a kör „középpontja". A BK és a b hiperciklus „távolsága", valamint a CK és a c hiperciklus „távolsága" is az AB_1C_1 kör „sugara". Ezért a két hipercikluspár közé közös érintő kört lehet írni.

Távolságok összeadása

Ha ugyanazokkal a végpontokkal nem két, hanem három hiperciklust rajzolunk, a közöttük mért „távolságokat” összeadhatjuk. A *13.a ábrán* az a_1 és a_2 hiperciklusok „távolsága” a közéjük írt k_2 kör „átmérője”, míg az a_2 és a_3 „távolsága” a k_1 „átmérője”; az a_1 és a_3 közötti „távolság” a kettő összege. Ugyanezt az összeget kapjuk a b_1 és b_3 közötti „távolságra” (csak fordított sorrendben), tehát az $a_1b_3a_3b_1$ négyszögbe is kört lehet írni. Ugyanez elmondható a *13.b ábrán* is.



13.a ábra

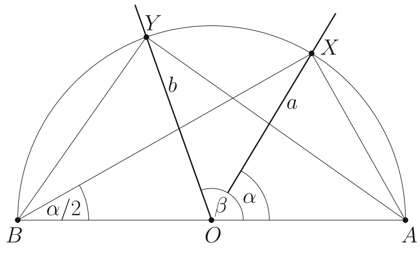


13.b ábra

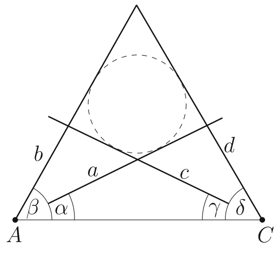
Érintőnégyszögek egy jellemzése

A félegyenesnek látszó hiperciklusok „távolsága” könnyen felírható szögekkel. Legyen a és b két hiperciklus, amelyek egyik végpontja O, a másik végpont az ideális pont, és metsszük el ezeket egy O középpontú félkörrel a *14.a ábra* szerint. Az ábrán feltüntetett szögekkel, feltéve, hogy $\alpha < \beta$, az OXB egyenlő szárú háromszögből azt kapjuk, hogy $ABX\sphericalangle = \frac{1}{2}AOX\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, ezért $\frac{AX}{XB} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, és hasonlóan $\frac{AY}{YB} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Tehát az a és a b hiperciklus közötti „távolság”

$$d(X,Y) = k \cdot \ln\frac{AY \cdot XB}{AX \cdot YB} = k \cdot \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$



14.a ábra

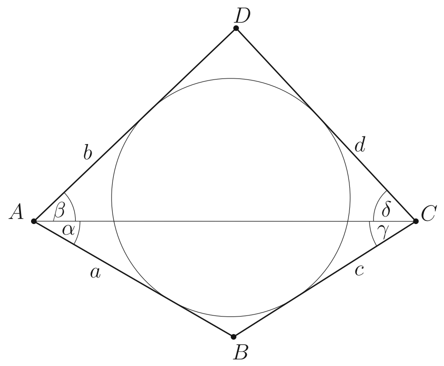


14.b ábra

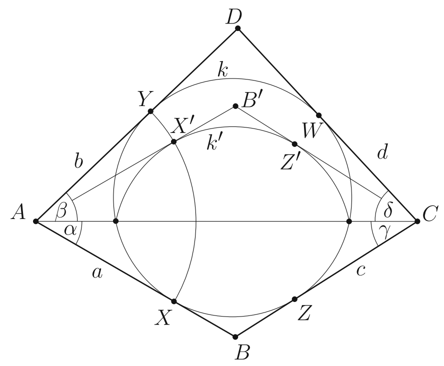
Most tekintsünk két félegyenes-párt, az a, b és c, d hiperciklusokat a *14.b ábra* szerint. A közös érintő kör akkor és csak akkor létezik, ha az a és b „távolsága” megegyezik c és d „távolságával”, vagyis

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

A feltétel akkor is érvényes marad, ha az a és a c félegyenest az AC egyenes másik oldalára rajzoljuk (*15a. ábra*). Az érintőnégyszögeknek ezt a tulajdonságát érdemes külön is kimondani és megtanulni:



15.a ábra



15.b ábra

Lemma. *Legyen az $ABCD$ konvex négyszögben $\alpha=CAB\sphericalangle$, $\beta=DAC\sphericalangle$, $\gamma=BCA\sphericalangle$ és $\delta=ACD\sphericalangle$. Az $ABCD$ négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha*

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

A Lemma bizonyítását kezdjük a „csak akkor” iránnyal; tegyük fel, hogy $ABCD$ érintőnégyszög, a beírt köre k, az érintési pontok X, Y, Z és W a *15.b ábra* szerint. Az általánosság csorbulása nélkül feltehetjük, hogy $\beta\geqslant\alpha$.

Tükrözzük az AC átlóra a B, X, Z pontokat és a k körnek az ABC háromszögbe eső ívét; a tükörképeket jelölje rendre B', X', Z', illetve k'. Az A pontból a k-hoz és k'-höz húzott érintők egyenlők, ezért az $XX'Y$ kör középpontja A. Ha az AC egyenesnek a D-vel azonos oldalát a félsíkmodellnek tekintjük, akkor a k és k' hiperciklusok „távolsága”

$$d(X',Y)=k\cdot\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Ugyanezt az A helyett a C ponttal is elmondhatjuk, és a k és k' hiperciklusok „távolságára” így azt kapjuk, hogy

$$d(Z',W)=k\cdot\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

A kétféle képlet összehasonlításából

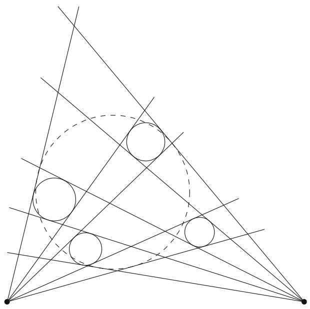
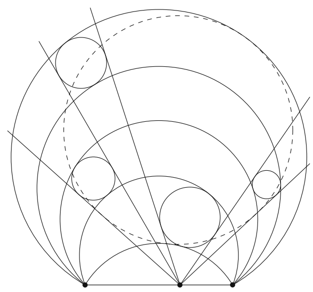
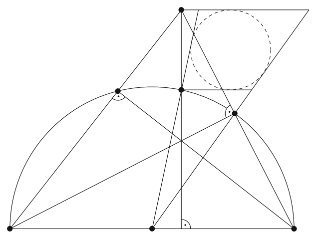
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

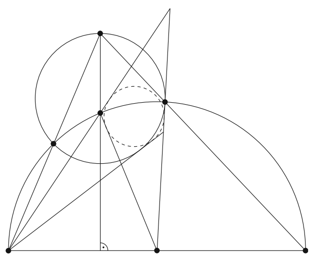
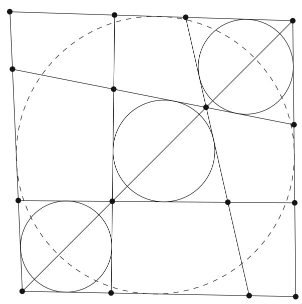
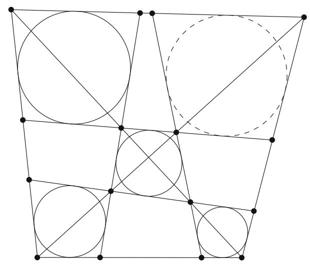
A megfordításhoz most tegyük fel, hogy $ABCD$ nem érintőnégyszög. Vegyük fel az AD félegyenesen azt a D_0 pontot, amelyre $ABCD_0$ érintőnégyszög, és legyen $\delta_0=ACD_0\sphericalangle\neq\delta$. Az előbbiek szerint

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta_0}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\neq\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Feladatok

1. Feladatok szöveg nélkül:

(KöMaL A. 621., 2014/9)

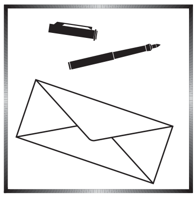
(IZhO 2014/4; Nairi Sedrakyan feladata)

2. Az $ABCD$ konvex érintőnégyszögbe írt kör középpontja I. Az AB és a DC félegyenes az F pontban, az AD és a BC félegyenes a G pontban metszi egymást. Legyen $\mathcal{E}$ az a F, G fókuszú ellipszis, amely átmegy a B és D pontokon, és legyen $\mathcal{H}$ az a F, G fókuszú hiperbolaág, amely átmegy az A és C pontokon. Az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{H}$ metszéspontjait jelölje P és Q. Mutassuk meg, hogy a P, Q és I pontok egy egyenesen vannak. (KöMaL A. 630., 2014. december)

3. Adott az $OA_1A_2A_3$ tetraéder mindegyik OA_i élén egy B_i belső pont, az OA_i él A_i-n túli meghosszabbításán pedig egy C_i pont ($i = 1, 2, 3$). Tegyük fel, hogy az $OA_{i+1}A_{i+2}$ és $B_iA_{i+1}A_{i+2}$ síkok által határolt hat lapú testbe, továbbá az $B_iA_{i+1}A_{i+2}$ és $C_iA_{i+1}A_{i+2}$ síkok által határolt testbe is egy-egy gömböt lehet írni. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $OA_{i+1}A_{i+2}$ és $C_iA_{i+1}A_{i+2}$ síkok által határolt testbe is gömböt lehet írni. (KöMaL A. 547., 2011. november)

Kós Géza

Monoton leképezések fixpontjai I.



A KöMaL egy régi száma pontverseny kívüli problémaként közölte a Knaster–Tarski-féle fixponttételt. Cikkünkben elsőként fölidézzük a problémát, majd bemutatjuk egyik legfontosabb, halmazelmélethez kötődő alkalmazását. Ezáltal egyben bepillantást kívánunk adni a számosságaritmetika lenyűgözően szép, meglepetésekkel teli világába is.

1. Bevezetés

A magyar matematikatanítás méltán híres arról, hogy az aktuális kutatási irányokat igen gyakran a versenyfeladatok szintjén igyekszik megjeleníteni. Jól tükrözik ezt az elvet a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok problémái. Még a múlt is hozhat meglepetést! Különösen, amikor egy olyan, régen kitűzött feladattal találkozunk, melyet az egyetemi katedra mindkét oldalának közönsége ismerősként üdvözölhet. Ragyogó példa erre a **P. 329** jelzésű pontversenyen kívüli probléma, amelyet Szegedy Patrik megoldásával együtt [2] az alábbiakban közlünk.

P. 329. *Egy X halmaz minden A részhalmazához hozzárendelünk egy $F(A)$ részhalmazt úgy, hogy ha $A \subset B$, akkor $F(A) \subseteq F(B)$. Mutassuk meg, hogy van olyan $H_0 \subseteq X$ részhalmaz, amelyre $F(H_0) = H_0$ teljesül.*

Megoldás. Álljon a $\mathcal{H}$ halmazcsalád azokból a $H \subseteq X$ halmazokból, melyekre $F(H) \subseteq H$. Ez a $\mathcal{H}$ család nem üres, mert X eleme, hiszen $F(X) \subseteq X$ biztosan teljesül. Legyen a $\mathcal{H}$-beli halmazok közös része H_0. Mit tudunk az $F(H_0)$ halmazról?

Ha H tetszőleges $\mathcal{H}$-beli halmaz, akkor $H_0 \subseteq H$ miatt fönnáll, hogy $F(H_0) \subseteq$ $\subseteq F(H)$. Ebből pedig $F(H) \subseteq H$ alapján (ez volt a $\mathcal{H}$-beli halmazok definiáló tulajdonsága) $F(H_0) \subseteq H$ következik. Tehát az $F(H_0)$ halmazt minden $\mathcal{H}$-beli halmaz tartalmazza, így metszetük, H_0 is: $F(H_0) \subseteq H_0$. Ugyanakkor $F(H_0) \subseteq H_0$-ból $F\big(F(H_0)\big) \subseteq F(H_0)$ adódik, tehát (definíció szerint) az $F(H_0)$ halmaz $\mathcal{H}$-beli. A H_0

A cikk a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj, az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-18-2 és az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-4 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

minden $\mathcal{H}$-beli halmaznak része, így $H_0 \subseteq F(H_0)$. Ezt az előbbi $F(H_0) \subseteq H_0$ eredményünkkel összevetve $F(H_0) = H_0$, ami azt jelenti, hogy a keresett részhalmazt megtaláltuk. $\square$

Adott X halmaz esetén jelölje $\mathscr{P}(X)$ az X összes részhalmazainak halmazát, másképpen mondva: *hatványhalmazát.* Azt mondjuk, hogy az $F : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ leképezés *monoton,* ha megőrzi a tartalmazást, vagyis $A \subseteq B \subseteq X$ esetén $F(A) \subseteq F(B)$ is teljesül. Az F leképezésnek $H \subseteq X$ *fixpont*ja, ha $F(H) = H$. Ezekkel az elnevezésekkel a **P. 329** probléma tömören így is megfogalmazható:

Tétel. *Adott hatványhalmaz bármely monoton leképezésének létezik fixpontja.*

Ez az állítás először a Lengyel Matematikai Társulat Varsói Részlegének ülésén hangzott el 1927-ben, és azóta Knaster–Tarski-féle fixponttételként szokás hivatkozni [1]. Később, az eredetileg Knaster által előadott eredményt Tarski [3] fejlesztette tovább, számos meglepő és hatékony alkalmazást adva a halmazelmélet, logika, absztrakt algebra és valós függvénytan terén. Manapság úgy tekintünk Knaster és Tarski eredményére, mint a monoton leképezések fixpontelméletének első zsengéjére.

A Knaster–Tarski-féle fixponttételnek már az eredeti változata is jelentős alkalmazásokkal bír. Az egyik legfontosabb a számosságaritmetika terén Schröder–Bernstein-tételként ismert állítás. Fő célunk ezt, és ennek néhány következményét bemutatni, és egyúttal rövid barangolást tenni a számosságok meglepő és izgalmas birodalmába.

2. A számosságaritmetika alapjai

Azt mondjuk, hogy két halmaz *egyenlő számosságú,* vagy másképpen: *ekvivalens,* ha létezik közöttük egy bijekció, azaz kölcsönösen egyértelmű leképezés. Ha A és B ekvivalens halmazok, akkor ezt az $A \sim B$ módon jelöljük. A halmazok ekvivalenciája egyfajta „számolás” számfogalom nélkül. Birtokában nemcsak a halmazok elemszám szerinti egyenlőségét értelmezhetjük, hanem a végtelen halmaz fogalmát is bevezethetjük. Egy halmaz *végtelen,* ha létezik önmagával ekvivalens valódi részhalmaza. Eszerint a pozitív egészek $\mathbb{N}$ halmaza végtelen, hiszen a $\varphi(n) = n + 1$ módon értelmezett leképezés bijektíven hat $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ között. A pozitív egészek halmazával ekvivalens halmazok a *megszámlálhatóan végtelen* halmazok. Igen egyszerűen nyerjük például, hogy az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza megszámlálhatóan végtelen. Ehhez elegendő csupán a

$$\varphi(k) := \begin{cases} 2(k-1), & \text{ha } k \in \mathbb{N}, \\ 1 - 2k, & \text{ha } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

módon értelmezett, $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ bijektív leképezést tekinteni. Tehát a $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ állítás közvetlenül, definíció szerint igazolható.

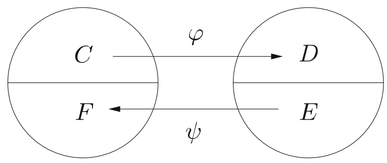
Az ekvivalencia közvetlen ellenőrzése azonban általában nehéz, így egy hatékonyabb módszer kidolgozása szükséges. Ehhez elsőként bevezetjük az injektív leképezés fogalmát. A $\varphi : A \to B$ leképezés *injektív,* ha $\varphi(a) = \varphi(a^*)$ esetén $a = a^*$

következik. Ha létezik ilyen injektív leképezés, akkor az A halmazt *kisebb vagy egyenlő számosságú*nak nevezzük a B halmaznál. Ezt jelölésben az $A \preceq B$ módon fejezzük ki.

Nyilvánvalóan minden bijekció inverzével együtt injektív, tehát ha két halmaz ekvivalens, akkor bármelyik kisebb vagy egyenlő számosságú a másiknál. Jelölésekkel élve, ha $A \sim B$, akkor $A \preceq B$ és $B \preceq A$ teljesül. Ennek az észrevételnek a megfordítása is érvényes, amelyet a Schröder–Bernstein-tétel fogalmaz meg. Az állítás leképezések nyelvén így szól: *Ha egy halmaz injektíven képezhető egy másikba és a másik az egyikbe, akkor létezik köztük bijekció is.* A bizonyítás a Knaster–Tarski-féle fixponttételre támaszkodik. Mielőtt a részletekre térnénk, szükségünk lesz a következőkre. Ha a H részhalmaza egy X alaphalmaznak, és $f : X \to X$ egy függvény, akkor a H halmaz f általi képét a szokásos $f(H) := \{f(x) \mid x \in H\}$ módon értelmezzük. Az értelmezésből következik, hogy $A \subseteq B$ esetén $f(A) \subseteq f(B)$ is fennáll. Másképpen fogalmazva, *az $F_f(H) := f(H)$ előírással adott $F_f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ leképezés monoton.*

Tétel. *Ha $A \preceq B$ és $B \preceq A$, akkor $A \sim B$.*

Bizonyítás. Az $A \preceq B$ és $B \preceq A$ feltételek miatt léteznek $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$ injektív függvények. Célunk annak igazolása, hogy ekkor bijekció is létezik a két halmaz között. Ehhez az A és B halmazokat fogjuk alkalmas módon két-két diszjunkt részre bontani φ és ψ segítségével:



Legyen $C \subseteq A$ tetszőleges, és tekintsük a $D := \varphi(C)$ halmazt. Ekkor nyilván φ bijektíven hat C és D között. Legyen most $E := B \setminus D$, valamint $F := \psi(E)$. Világos, hogy ekkor ψ bijektív E és F között. Ha még ráadásul az is kiderülne, hogy C és F diszjunktak és az uniójuk A, akkor az

$$f(x) := \begin{cases} \varphi(x), & \text{ha } x \in C, \\ \psi^{-1}(x), & \text{ha } x \in F \end{cases}$$

módon adott $f : A \to B$ függvény jóldefiniált és bijektív. Kérdés tehát, hogy létezik-e ilyen választás C-re. Az E, F, D halmazok értelmezését szem előtt tartva tehát azt várjuk el, hogy

$$C \stackrel{?}{=} A \setminus F = A \setminus \psi(E) = A \setminus \psi(B \setminus D) = A \setminus \psi\big(B \setminus \varphi(C)\big)$$

teljesüljön. Értelmezzük a $T : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ leképezést ez utóbbi taggal, azaz legyen $C \subseteq A$ esetén

$$T(C) := A \setminus \psi\big(B \setminus \varphi(C)\big).$$

Egyszerűen meggyőződhetünk arról, hogy T monoton leképezés. Ezért a Knaster–Tarski fixponttétel értelmében valóban létezik olyan C, hogy $T(C) = C$. $\square$

Ezt az állítást elsőként Cantor fogalmazta meg bizonyítás nélkül 1887-ben. Még ugyanebben az évben Dedekind elemi bizonyítást talált, amit nem publikált, sőt Cantort sem értesítette eredményéről. Később 1897-ben, az akkor 19 éves hallgató, Bernstein bemutatta bizonyítását Cantor egyetemi szemináriumán. Bernsteintől függetlenül, ugyancsak 1897-ben Schröder is közölte bizonyítását, amiről később kiderült, hogy hibás.

A Schröder–Bernstein-tétel segítségével egyszerűen kapjuk, hogy a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálhatóan végtelen. Elsőként azt érdemes megmutatni, hogy $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Azonnal látható, hogy az $n \longmapsto (n, n)$ leképezés injektív, azaz $\mathbb{N} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Elegendő tehát csupán egy $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektív leképezést megadnunk. Legyen

$$\varphi(n, m) := 2^n \cdot 3^m.$$

Ha most $\varphi(n, m) = \varphi(k, l)$, akkor definíció szerint $2^n \cdot 3^m = 2^k \cdot 3^l$; az egyértelmű prímfaktorizáció tétele miatt ebből $n = k$ és $m = l$ következik. Tehát $(n, m) = (k, l)$, ami pontosan φ injektivitását mutatja. Ennek mintájára az is igazolható, hogy $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Végezetül, a $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ állítás ebből már következik, hiszen minden racionális szám egyértelműen előáll egy, tovább már nem egyszerűsíthető egész és természetes szám hányadosaként.

Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ igazolása történhet a jól ismert „átlós bejárással", ami közvetlenül bijekciót eredményez a szóban forgó halmazok között. Azonban végképp föl kell adnunk a közvetlen módszert, ha a $]0, 1[$ intervallum számosságát egy hatványhalmaz számosságával akarjuk kifejezni:

Tétel. $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim {]0, 1[}$.

Bizonyítás. Elsőként azt igazoljuk, hogy létezik egy $\varphi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to {]0, 1[}$ injektív leképezés. Legyen $A \subset \mathbb{N}$ tetszőleges, nemüres halmaz. Értelmezzük az (a_n) sorozatot és ennek birtokában az x valós számot az alábbiak szerint:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \notin A, \\ 1, & \text{ha } n \in A; \end{cases} \qquad \text{illetve} \qquad x = 0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Világos, hogy az A halmaz egyértelműen meghatározza az (a_n) sorozatot, e sorozat pedig az x valós számot. Nyilvánvaló az is, hogy $x \in {]0, 1[}$. Legyen $\varphi(A) := x$, s tegyük fel, hogy $\varphi(B) = x$ szintén fennáll. Az (a_n) definíciója miatt ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n \in A$ pontosan akkor teljesül, ha $n \in B$. Így $A = B$, ami pedig a φ injektivitását adja. Ha $A = \emptyset$, akkor legyen $\varphi(A) := 0{,}2$; ezzel a kiterjesztéssel φ továbbra is injektív.

Most azt igazoljuk, hogy létezik egy $\psi : {]0, 1[} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ injektív leképezés. Legyen $x \in {]0, 1[}$, s legyen (x_n) az x tizedesjegyeinek sorozata. Értelmezzük ekkor a $\psi(x)$ halmazt a

$$\psi(x) = \big\{10(n-1) + x_n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\big\}$$

előírással. Nyilván $\psi(x) \subseteq \mathbb{N}$, tehát $\psi : \left]0,1\right[\to \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Legyen $y \in \left]0,1\right[$, jelölje (y_n) az y tizedesjegyeinek sorozatát. Ekkor a $\psi(y)$ halmaz

$$\psi(y) = \big\{10(m-1) + y_m + 1 \mid m \in \mathbb{N}\big\}$$

alakú. Tegyük fel, hogy $\psi(x) = \psi(y)$. Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha elemei ugyanazok, így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén található olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy

$$10(n-1) + x_n + 1 = 10(m-1) + y_m + 1.$$

Ha itt $n < m$ teljesül, akkor $n \leqslant m-1$ is fönnáll. Fölhasználva azt is, hogy $x_n \leqslant 9$ és $y_m \geqslant 0$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}10(n-1) + x_n + 1 &\leqslant 10(m-2) + x_n + 1,\\ &= 10(m-1) + x_n - 9,\\ &\leqslant 10(m-1) < 10(m-1) + y_m + 1,\end{aligned}$$

ami ellentmondás. Az $m < n$ eset ugyanígy kizárható. Tehát $m = n$, amiből pedig $x_n = y_n$ következik. Ez azt mutatja, hogy x és y tizedestört alakja azonos. Mivel a tizedestört alak egyértelmű, ezért $x = y$. Vagyis ψ injektív.

Az eddigieket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \preceq \left]0,1\right[$ és $\left]0,1\right[\preceq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ egyszerre teljesülnek. Így a Schröder–Bernstein-tétel fényében $\left]0,1\right[\sim \mathscr{P}(\mathbb{N})$ is fönnáll. □

Világos, hogy a $\left]0,1\right[$ intervallum, s ennélfogva $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ is végtelen halmaz. Fölmerül a kérdés, hogy ez a közös számosság milyen kapcsolatban áll a megszámlálhatóan végtelennel. Cantor alábbi tétele ennél sokkal általánosabb kérdést válaszol meg: a hatványhalmaz számossága mindig *szigorúan nagyobb* a halmaz számosságánál.

Tétel. $A \prec \mathscr{P}(A)$.

Bizonyítás. Ha $A = \emptyset$, akkor az állítás nyilvánvaló, hiszen ekkor $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset\}$ nem üres. Föltehető, hogy A nem üres. Nyilván $\mathscr{P}(A)$ egyelemű részhalmazai és A elemei kölcsönösen egyértelműen megfelelnek egymásnak, tehát $A \preceq \mathscr{P}(A)$. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik egy $\varphi :\, A \to \mathscr{P}(A)$ bijekció. Legyen ekkor

$$B = \big\{a \in A \mid a \notin \varphi(a)\big\}.$$

Mivel φ bijektív, ezért van olyan $b \in A$, hogy $\varphi(b) = B$. Ha most $b \in B$, akkor ez azt jelenti, hogy $b \notin \varphi(b)$ teljesül. Azonban $\varphi(b) = B$, ami ellentmondás. Ha $b \notin B$, akkor ebből $b \notin \varphi(b)$, azaz $b \in B$ adódik, ami szintén ellentmondás. □

A $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ halmazzal ekvivalens halmazokat *kontinuum számosságú*nak nevezzük. Megmutatható, hogy bármely intervallum, az irracionális számok halmaza, vagy a valós számok halmaza kontinuum számosságú. Így, a számhalmazok körében a kontinuum a legnagyobb előforduló számosság, hiszen a föntiek szerint a kontinuum a megszámlálható végtelennél „nagyobb” végtelen. Azonban Cantor tételéből ennél jóval több következik. Minden számosságnál létezik nagyobb számosság! Jogosan mondhatjuk tehát: ez azért már mégiscsak több a soknál ...

Hivatkozások

[1] B. Knaster and A. Tarski, *Un théoreme sur lesfonctions d'ensembles,* Ann. Soc. Polon. Math., **6** (1927), 133–134.

[2] P. Szegedy, *Solution to problem P. 329,* KöMaL, **61** (1980), no. 2, 75.

[3] A. Tarski, *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications,* Pacific J. Math., **5** (1955), 285–309.

Bessenyei Mihály és **Pénzes Evelin**
Debrecen

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2-14=2\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (6\ pont)$$

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\frac{2x^2y}{2x^2+y}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{12x^2y}{4x^2+3y}=\frac{1}{5}. \qquad (7\ pont)$$

2. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$4^x+4\cdot 2^{-x}=5. \qquad (6\ pont)$$

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=-2+3\cos 2x. \qquad (7\ pont)$$

3. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$1+\frac{3}{\log_4(x^2-6x+13)}=\frac{4}{\log_2(x+1)}+\frac{\log_2{(x+1)}^2}{2}. \qquad (8\ pont)$$

b) Egy szabályos dobókockát hatvanszor feldobva 15 esetben kaptunk hatost. Ezt a kísérletet egymás után többször elvégezve mindig ehhez hasonló eredményre jutunk. Emiatt úgy sejtjük, hogy a dobókocka „cinkelt", azaz a hatos megnövelt valószínűséggel bír. Mekkora ez a valószínűség, ha minden 60-as sorozat esetén 15 lett a kapott érték (azaz várható érték 15)? (*4 pont*)

4. *a*) Egy nem állandó számtani sorozat első, második és negyedik eleméhez rendre 1-et adunk, így egy mértani sorozat második, harmadik és negyedik elemét kapjuk. A mértani sorozat első, második és harmadik elemének az összege 7. Mennyi a számtani sorozat 1010-edik eleme? (*6 pont*)

b) Adott a következő sorozat:

$$a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1 \ (n \geqslant 1).$$

Adjuk meg a sorozat 2020-adik tagját. (*7 pont*)

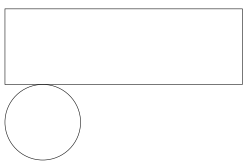
II. rész

5. *a*) Legyen a és b nemnegatív valós szám. Bizonyítsuk be, hogy

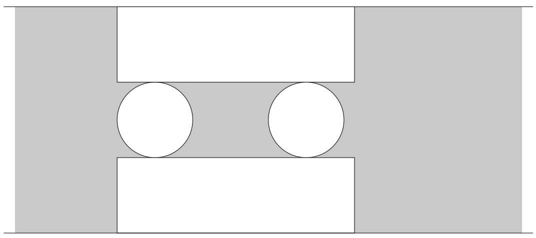
$$0 \leqslant \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} \leqslant 1.$$

Írhatunk-e a nulla helyett nála nagyobb számot? (*9 pont*)

b) Egy felül nyitott fémdobozt lemezből állítunk elő úgy, hogy az *1. ábrán* látható módon kivágunk, majd összehajtogatunk egy ilyen alakot.



1. ábra

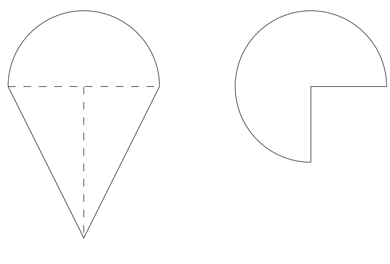


2. ábra

A kivágást egy 30 cm-es széles fémszalagból végezzük úgy, hogy 2 ilyen mintát fordítunk egymással szembe a *2. ábra* szerint. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy a kikerülő fémdoboz a lehető legnagyobb térfogatú legyen? (*7 pont*)

6. *a*) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely egyidejűleg érintik az $y = x^2$ és $y = -x^2 + 4x - 2$ parabolákat. (*9 pont*)

b) A magyar GúgLi Kft. egy emblémát tervez a székházuk elé, amely egy félbevágott gömb és egy kúp összetételéből áll. Az emblémának függőlegesen a negyede ki van vágva úgy, hogy a két vágósík az embléma függőleges tengelye mentén metszi egymást. Az embléma keresztmetszete és a függőleges metszete az *ábrán* látható.



A kúp magassága éppen a félbevágott gömb sugarának a kétszerese. Betonból szeretnék elkészíttetni majd lefesteni a 1,5 m magasságúra tervezett emblémát.

– Mennyi beton szükséges az elkészítéséhez, ha az elkészítés folyamán 15% veszteséggel számolhatunk?

– Mekkora lesz az elkészült embléma tömege?

– Hány m^2-re elegendő festéket kell beszerezniük, ha az időjárás ellen háromszor szeretnék lefesteni és a festés során keletkező veszteség 5%? (*7 pont*)

7. *a*) 18 tudós e-mail segítségével tartja a kapcsolatot a világban. Bármely két tudós egymással angol, német vagy orosz nyelven levelezik, mindig ugyanazt a nyelvet használják egymás között. Tudjuk, hogy nincs három olyan tudós, aki egymás között angol, vagy orosz nyelvet használ. Bizonyítsuk be, hogy létezik közöttük három, akik egymással németül leveleznek. (*9 pont*)

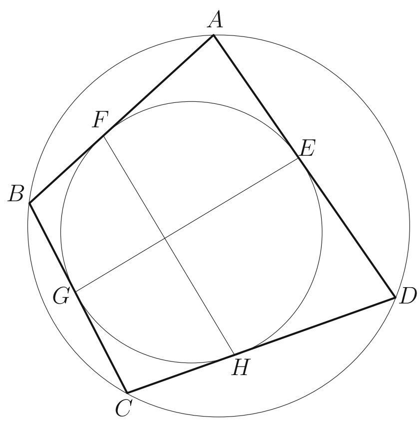
b) Aladár négyjegyű számokat ír fel egy papírlapra, melyek csak az 1; 2; 3 és 4 számjegyeket tartalmazhatják (lehet ismétlődés, nem kell minden számjegyet felhasználni minden négyjegyű számban). Figyel arra, hogy 1-es után csak 4-es, páros számjegy után csak páratlan jegy következhet. Hányféle számot tud leírni így? (*7 pont*)

8. *a*) Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egészek halmazán:

$$2 \cdot (x; y) + 17 \cdot [x; y] = 257,$$

ahol a „kerek” zárójel a két szám legnagyobb közös osztóját, a „szögletes” zárójel pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli. (*9 pont*)

b) Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 2 és 14, szárai 10 egység hosszúak. Meghúzzuk a belső szögeinek szögfelezőjét, amelyek egy négyszöget zárnak be. Amennyiben ennek a négyszögnek létezik a beírt és körülírt köre, mekkora ezen körök sugara? (*7 pont*)



9. *a*) Bizonyítsuk be, hogy

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) =$$

$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3},$$

ahol $n \in \mathbb{N}^+$. (*8 pont*)

b) Adott egy olyan húrnégyszög, ami egyben érintőnégyszög is.

Az *ábrán* jelöltük az érintési pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az EG és FH szakaszok merőlegesek egymásra. (*8 pont*)

Szoldatics József
Budapest

Végeredmények a 2020/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:*

$$\left.\begin{aligned} 9^x \cdot 3^y &= 81, \\ 6x + 6y + 5xy &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11\ pont)$$

Megoldás. $x = -1$, $y = 6$.

2. *A miskolci pályaudvar utasellátó büféjének ajtaján a következő tájékoztató szöveg olvasható:*

Nyitva tartás 03.30–23.30.
Műszakátadás miatt 07.30–08.30 és 19.30–20.30 között zárva!

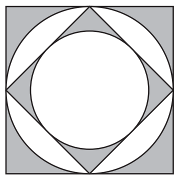
a) Mekkora eséllyel találjuk nyitva a büfét, ha reggel 7 *és este* 9 *között véletlenszerűen érkezünk a bejáratához?*

b) Egy vargabélest vásároltunk 200 Ft*-ért. A pénzt pontosan kiszámolva adtuk át a pénztárosnak. Hányféleképpen tehettük ezt meg, ha* 20 Ft*-osnál kisebb címletet nem adtunk, és a sorrend nem számít?*

c) Az utánunk következő vásárló három péksüteményt szeretne venni, a kínálat: diós búrkifli, ízes levél, túrós táska, meggyes rétes és kakaós csiga. Mekkora eséllyel találjuk el, hogy mit fog vásárolni, ha azt feltételezzük, hogy mindegyik választásának ugyanannyi az esélye? (*12 pont*)

Megoldás. *a*) $\frac{6}{7}$; *b*) hétféleképpen; *c*) $\frac{1}{35}$.

3. *Az* ábrán *egy egység oldalú négyzet, annak beírt köre, oldalfelező pontjai által meghatározott négyzet és annak is a beírt köre látható.*



a) Hány százalékát színeztük ekkor szürkére a nagy négyzetnek?

b) Ismételjük meg ezt az eljárást végtelen sokszor. Hány százalékát színeztük így szürkére a nagy négyzetnek? (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Kb. 32,2%-a; *b*) kb. 42,9%-a.

4. *Egy* 30 *fős osztályból hányféle különböző módon állíthatunk össze*

a) egy ötfős csoportot; (*2 pont*)

b) egy legfeljebb öt-, de legalább kétfős csoportot; (*4 pont*)

c) egy ötfős csoportot, ha az osztály diákbizottság elnökének mindenképp benne kell lennie; (*4 pont*)

d) egy ötfős csoportot, akik közül egy embert csoportvezetőnek jelölünk ki? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) 142 506; *b*) 174 406; *c*) 23 751; *d*) 712 530.

II. rész

5. *Adott a* $[0; 9]$ *intervallumon értelmezett* $f(x) = 2\sqrt{x}$ *függvény.*

a) *Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az origó, egy másik csúcsa az* x *tengelyre, a harmadik csúcsa pedig az* $f(x)$ *függvény görbéjére illeszkedik. Mekkora e háromszög területe?*

b) *Egy téglalap egyik oldala az* x *tengelyre, egy másik oldala az* $x = 9$ *egyenesre, egy csúcsa pedig az* $f(x)$ *függvény görbéjére illeszkedik. Határozzuk meg a legnagyobb ilyen téglalap területét.*

c) *Az* $f(x)$ *függvénygörbe és az* x *tengely közötti területet az* $x = a$ *egyenes felezi. Határozzuk meg az* a *paraméter értékét.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) $\approx 3{,}08$; *b*) $12\sqrt{3}$; *c*) $\approx 5{,}67$.

6. *Egy háromszög csúcsainak koordinátái:* $A(-7; -2)$, $B(11; -2)$, $C(-1; 10)$.

a) *Adjuk meg a háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra található* K *pont koordinátáit.*

b) *Adjuk meg a háromszög* M *magasságpontjának koordinátáit.*

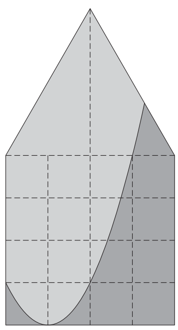
c) *Igazoljuk számítással, hogy az* ABC *háromszögben az* S *súlypont harmadolja az* MK *szakaszt.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) $K(2; 1)$; *b*) $M(-1; 4)$.

7. *a*) *Két pozitív egész szám köbének különbsége* 169. *Melyek ezek a számok?*

b) *Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív természetes szám ötödik hatványából kivonjuk magát a számot, a különbség minden esetben osztható lesz a három legkisebb pozitív prímszámmal.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) 8 és 7.



8. *Egy ház tűzfala egy négyzetből és egy szabályos háromszögből áll. A falat két színnel szeretnék vakolni. A két rész között a határvonal egy parabola lesz, amit a mellékelt* ábra *mutat. A házikó parabola feletti részét világosabbra, a többit sötétebbre vakolják. A felület hány százaléka lesz sötétebb árnyalatú?* (*16 pont*)

Megoldás. Kb. 33,2%-a.

9. *Van hatféle számkártyánk, mindegyikből* 1-1 *darab:* 1, 2, 3, 4, 5, 6. *A kártyákat véletlenszerűen sorba rendezve hatjegyű számokat képezünk.*

a) Igazoljuk, hogy $\frac{4}{15}$ *annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható lesz* 12*-vel.*

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az így kapott szám a 6*-os számjeggyel kezdődik, feltéve, hogy* 12*-vel osztható.*

c) Egy papírlapra felírjuk a számkártyákból képezhető összes lehetséges hatjegyű számot.

Határozzuk meg a papírlapra felírt számok mediánját. (*16 pont*)

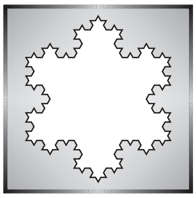
Megoldás. *b)* $\frac{1}{8}$; *c)* 388 888,5.

❄

Részletesebb megoldás a **Matematika érettségi emelt szinten** című könyvben található, amely megrendelhető a KöMaL honlapján. A könyv 24 gyakorló feladatsort tartalmaz a megoldásokkal együtt.

Összeállította:
Számadó László
Budapest

C gyakorlatok megoldása



C. 1528. *Milyen pozitív egész számot jelölhet* n*, ha tudjuk, hogy az* n^3 *szám utolsó három számjegyét letörölve az* n *számot kapjuk vissza?*

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Vizsgáljuk meg, mit kapunk $n=100$, illetve $n=9$ esetén.

Ha $n=100$, akkor $n^3=1\,000\,000$, vagyis az utolsó 3 számjegyet letörölve 1000-et kapunk. Ebből az következik, hogy n egy-, vagy kétszámjegyű, mert ha három-, vagy többjegyű lenne, akkor n^3 négy vagy több számjeggyel többet tartalmazna, mint az n szám.

Ha $n=9$, akkor $n^3=729$, ebből pedig nem lehet három számjegyet letörölni úgy, hogy maradjon egy n szám.

Tehát n kétszámjegyű kell, hogy legyen. Ekkor n^3 számjegyeinek száma öt, hiszen így lesz az utolsó három számjegy letörlésével kapott szám kétszámjegyű. Jelölje az n tízes helyiértékén álló számjegyet a, az egyes helyiértékén állót pedig b. Ekkor arra kell törekednünk, hogy n^3 tízezres helyiértékén a, ezres helyiértékén pedig b álljon.

Mivel $1000n = \overline{ab000}$ és $1100n = \overline{ab000} + \overline{ab00}$, ez csak úgy érhető el, ha $1000 \leqslant \leqslant n^2 < 1100$, hiszen más esetben vagy nem a lesz a tízezres helyiértéken, vagy nem b lesz az ezres helyiértéken. Csak két pozitív egész számnak esik a négyzete 1000 és 1100 közé. Ez a két szám a 32 és a 33: $32^2 = 1024$ és $33^2 = 1089$.

$32^3 = 32768$, az utolsó három számjegyet letörölve 32-t kapunk. Tehát $n = 32$ megoldás.

$33^2 = 35937$, az utolsó három számjegyet letörölve 35-öt kapunk, így ez nem megoldás.

Tehát az n csak a 32-t jelölheti.

Majerusz Ádám (Miskolci Herman Ottó Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A legtöbben a honlapon olvasható megoldás gondolatmenetét követték: A kitörölt háromjegyű számot $\overline{abc}$-vel jelölve $1000n = n^3 - \overline{abc}$, amiből $n(n^2 - 1000) = = \overline{abc} > 0$, vagyis $n > \sqrt{1000}$, és innen már levezethető a megoldás.

239 dolgozat érkezett. 5 pontos 80, 4 pontos 49, 3 pontos 22, 2 pontos 25, kevesebb további 63 tanuló dolgozata.

C. 1557. *A kétjegyű pozitív egész számok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy a két számnak van közös számjegye?*

I. megoldás. Összesen $\binom{90}{2} = \frac{90\cdot 89}{2} = 9 \cdot 5 \cdot 89 = 4005$-féleképpen választhatunk ki 2 számot a 90 darab kétjegyű szám közül.

A jó lehetőségeket számoljuk össze aszerint, hogy a közös számjegy mi.

Ha a közös számjegy 0, akkor a lehetséges számok, amik közül választottunk, a $10, 20, \ldots, 90$. Ez $\binom{9}{2} = 36$ eset.

Ha a közös számjegy 1, akkor a lehetséges számok, amik közül választhatunk, a $10, 11, 12, \ldots, 19; 21, 31, \ldots, 91$. Vagyis $10 + 8 = 18$ számból választunk 2-t, amit $\binom{18}{2} = \frac{18\cdot 17}{2} = 9 \cdot 17 = 153$-féleképp tehetünk meg.

Ha a közös számjegy 2, akkor a lehetséges számok $20, 21, 22, \ldots, 29; 12, 32, \ldots, 92$. Ez szintén 18 szám, tehát itt is $\binom{18}{2} = 153$-féleképp választhatunk.

Ugyanennyi eset van, ha a közös számjegy $3, 4, \ldots, 9$.

Duplán számoltuk azokat az eseteket, mikor a két kiválasztott szám egymás fordítottja: $\overline{ab}$ és $\overline{ba}$, ahol a két számjegy különböző. Ilyen eset $\binom{9}{2} = 36$ van, hiszen a kilenc számjegyből kettőt választunk ki.

Tehát a jó lehetőségek száma:

$$36 + 9 \cdot 153 - 36 = 9 \cdot 153.$$

A kérdezett valószínűség:

$$p = \frac{9 \cdot 153}{9 \cdot 5 \cdot 89} = \frac{153}{445} \approx 0{,}3438.$$

Feczkó Nóra (Budapest, Budai Ciszterci Szent Imre Gimn., 10. évf.) megoldása alapján

II. megoldás. Készítsünk egy gráfot, amelynek a csúcsai a kétjegyű pozitív egész számok, és két csúcs között akkor fusson él, ha a hozzájuk tartozó két számnak van közös számjegye. Ekkor a keresett valószínűség

$$P = \frac{\text{élek száma}}{\binom{90}{2}}.$$

Most számoljuk meg, hány éle van a gráfunknak. Ehhez 3 típusba osztjuk a csúcsokat:

1. típus: xx alakú csúcsok (azonos számjegyekből álló kétjegyű számok). Ilyen alakú számból 9 db van, és mindegyikből 17 él indul ki: az xy alakú csúcsokba, ahol $y \neq x$ tetszőleges számjegy (9 db) és az yx alakú csúcsokba, ahol $0 \neq y \neq x$ tetszőleges számjegy (8 db).

2. típus: xy típusú csúcsok, ahol x, y különböző és $y \neq 0$ (és természetesen $x \neq 0$, hiszen kétjegyű számról van szó). Ilyen csúcsból $9 \cdot 8 = 72$ db van, mindegyikből 33 él indul ki: az xz típusú csúcsokba, ahol $z \neq y$ tetszőleges számjegy (9 db), a zx típusúakba, ahol $0 \neq z \neq x$ tetszőleges számjegy (8 db), az yz típusú csúcsokba, ahol $z \neq x$ tetszőleges számjegy (9 db) és a zy típusúakba, ahol $z \notin \{0, x, y\}$ tetszőleges számjegy (7 db).

3. típus: $x0$ alakú csúcsok (ahol $x \neq 0$, hiszen kétjegyű számokat vizsgálunk). 9 db ilyen szám van, mindegyik 25 másik csúccsal van összekötve: az $y0$ alakú csúcsokkal, ahol $0 \neq y \neq x$ tetszőleges számjegy (8 db), az xy alakúakkal, ahol $0 \neq y$ tetszőleges számjegy (9 db) és az yx alakú számokkal, ahol $0 \neq y \neq x$ tetszőleges számjegy (8 db).

Azaz az élek száma:

$$\frac{9 \cdot 17 + 72 \cdot 33 + 9 \cdot 25}{2} = 1377.$$

Így a keresett valószínűség

$$P = \frac{1377}{4005} = \frac{153}{445}.$$

Azaz $\frac{153}{445}$($\approx 0{,}3438$) annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kiválasztott két számnak van közös számjegye.

III. megoldás. Számoljunk komplementer-módszerrel. Összesen $\frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$-féleképpen választhatunk ki két kétjegyű számot. Ezek közül válasszuk ki azokat a párokat, amikben nincs közös számjegy. Négy esetet különböztetünk meg.

I. eset. Mind a 4 jegy különböző, és nincs közöttük 0. Ilyen esetből $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2}$ van, mert minden jegynek különböznie kell a többitől, és a két számot felcserélve is beleszámoltuk.

II. eset. Mind a 4 jegy különböző, és van közöttük 0. Ilyenből $9 \cdot 8 \cdot 7$ pár van, mert a 0 csak az egyesek helyén állhat, így kilenc darab szám, a kerek tízesek, lehet a pár egyik tagja, a másik tag két számjegye pedig a maradék számjegyek közül szabadon választható.

III. eset. A két szám közül az egyik 11-gyel osztható. Ilyenből $9 \cdot 8 \cdot 8$ van, mert 9 darab 11-gyel osztható kétjegyű szám van, a másik szám két jegye pedig a maradék jegyek közül választható (csak az első számjegy nem lehet 0).

IV. eset. Mindkét szám 11-gyel osztható. 9 darab 11-gyel osztható szám van, ezek közül $\binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2}$-féleképpen választhatunk ki kettő különbözőt.

Az esetek között nincs átfedés, így a keresett valószínűség:

$$\frac{4005 - \left(\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2} + 9\cdot 8\cdot 7 + 9\cdot 8\cdot 8 + \frac{9\cdot 8}{2}\right)}{4005} =$$

$$= \frac{4005 - (1512 + 504 + 576 + 36)}{4005} = \frac{4005 - 2628}{4005} = \frac{1377}{4005}.$$

Hajós Balázs (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn., 9. évf.) megoldása alapján

IV. megoldás. 90 darab kétjegyű pozitív egész szám van. Ezek közül kettőt $\binom{90}{2} = \frac{90\cdot 89}{2} = 4005$-féleképpen lehet kiválasztani.

A „kidobom a rosszat" elv alapján keressük azokat a párokat, melyeknek nincs közös számjegyük. Ehhez veszünk egy számot, és megnézzük, hány megfelelő párt találunk hozzá.

Három eset van.

1. eset. A kétjegyű szám $\overline{a0}$ alakú. Ekkor a számnak $8 \cdot 8 = 64$ olyan párja van, amellyel nincs közös számjegye. Ilyen alakú szám 9 db van, tehát ebben az esetben $9 \cdot 64 = 576$ számpárt találtunk.

2. eset. A kétjegyű szám $\overline{aa}$ alakú. Ekkor a számnak $8 \cdot 9 = 72$ olyan párja van, amellyel nincs közös számjegye, mivel a 0 nem állhat a tízes helyiértéken. Ilyen alakú szám is 9 db van. Tehát ebben az esetben $9 \cdot 72 = 648$ párt találtunk.

3. eset. A kétjegyű szám $\overline{ab}$ alakú. Ekkor a számnak $7 \cdot 8 = 56$ olyan párja van, amellyel nincs közös számjegye. Ilyen alakú szám $90 - 9 - 9 = 72$ db van. Tehát ebben az esetben $72 \cdot 56 = 4032$ párt találtunk.

Összesen $\frac{576+648+4032}{2} = 2628$ db pár van, mivel az összeszámolásnál mindegyik párt kétszer számoltuk. $4005 - 2628 = 1377$ olyan pár van, amelyben a kétjegyű számoknak van közös számjegye. Tehát a kérdezett valószínűség $\frac{1377}{4005} \approx$ $\approx 34{,}38\%$.

Németh Máté Előd (Révai Miklós Gimnázium, Győr, 10. évf.)

Megjegyzések. 1. Sokan nem vették figyelembe, hogy a két számot nyilvánvalóan egyszerre választjuk ki, tehát nem lehetnek egyformák.

2. Sokan pedig úgy tekintették, mintha egy számpárt kétféleképpen is választhatnánk, azaz az összes lehetőségek számát sem, illetve a jó lehetőségek számát sem osztották 2-vel. Ekkor ugyan a végeredmény végül helyes, ám a gondolatmenetben van hiba.

3. Sok-sok apró hiba volt, ezért a sok hiányos dolgozat.

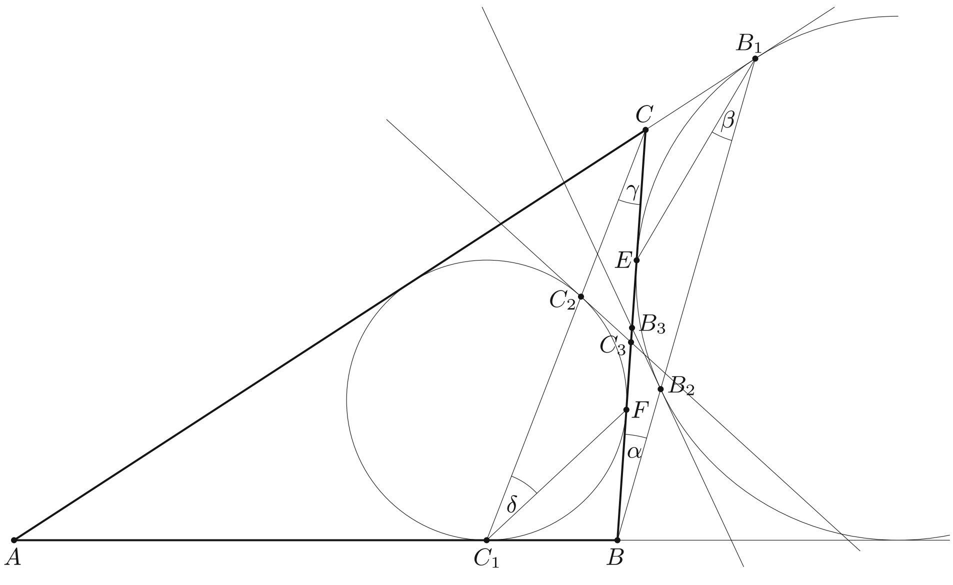
252 dolgozat érkezett. 5 pontos 59, 4 pontos 53, 3 pontos 37, 2 pontos 27, 1 pontos 30, 0 pontos 42 dolgozat. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 5013. *Az ABC háromszög A-val szemközti hozzáírt köre az AC egyenest a B_1 pontban érinti, a BB_1 szakasz a hozzáírt kört B_2-ben metszi, és a hozzáírt körhöz B_2-ben húzott érintő a BC oldalt B_3-ban metszi. Hasonlóan, a háromszög beírt köre az AB oldalt a C_1 pontban érinti, a CC_1 szakasz a beírt kört C_2-ben metszi, és a beírt körhöz C_2-ben húzott érintő a BC oldalt a C_3 pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $B_2B_3=C_2C_3$.*

(*6 pont*)

Megoldás. Az A-val szemközti hozzáírt kör és a beírt kör érintsék a BC oldalt rendre az E és F pontokban. Legyen $B_1BC\sphericalangle=\alpha$, $EB_1B_2\sphericalangle=\beta$. A $B_3EB_2\sphericalangle$ a hozzáírt körön a B_2E ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög, így $B_3EB_2\sphericalangle= EB_1B_2\sphericalangle=\beta$, és hasonlóan $EB_2B_3\sphericalangle=\beta$. Így $BB_3B_2\sphericalangle=2\beta$, ezért $BB_2B_3\sphericalangle= 180^\circ-\alpha-2\beta$. Innen $EB_2B_1\sphericalangle=180^\circ-BB_2B_3\sphericalangle-EB_2B_3\sphericalangle$ miatt $EB_2B_1\sphericalangle= \alpha+\beta$ adódik. Ez a hozzáírt körön a rövidebb EB_1 ívhez tartozó kerületi szög, ami egyenlő az ehhez az ívhez tartozó érintőszárú kerületi szögekkel, tehát $CEB_1\sphericalangle=CB_1E\sphericalangle=\alpha+\beta$, és így $B_1CE\sphericalangle=180^\circ-2\alpha-2\beta$. Könnyű látni azt is, hogy $BB_1C\sphericalangle=EB_1B_2\sphericalangle+EB_1C\sphericalangle=\beta+(\alpha+\beta)=\alpha+2\beta$.



Írjuk fel ezután a szinusztételt a BB_2B_3 és a BCB_1 háromszögekre:

$$\frac{BB_3}{B_3E}=\frac{BB_3}{B_3B_2}=\frac{\sin(180^\circ-\alpha-2\beta)}{\sin\alpha}=\frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\sin\alpha},$$

$$\frac{BC}{CB_1}=\frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\sin\alpha};$$

ezekből $\frac{BB_3}{B_3E}=\frac{BC}{CB_1}$, így $\frac{BE}{B_3E}=\frac{BB_3+B_3E}{B_3E}=\frac{BB_3}{B_3E}+1=\frac{BC}{CB_1}+1$, ezért (a szokásos jelölésekkel)

$$B_2B_3=B_3E=\frac{BE}{\frac{BC}{CB_1}+1}=\frac{s-c}{\frac{a}{s-b}+1}.$$

Hasonlóan, legyen $C_2CC_3\sphericalangle=\gamma$, $CC_1F\sphericalangle=\delta$. Ekkor a rövidebbik C_2F ívhez tartozó érintőszárú kerületi szögekként $C_3C_2F\sphericalangle=C_3FC_2\sphericalangle=\delta$, ezért $C_2C_3C\sphericalangle=2\delta$, így $CC_2C_3\sphericalangle=180^\circ-(\gamma+2\delta)$,

$$C_1C_2F\sphericalangle=180^\circ-CC_2F\sphericalangle=180^\circ-(CC_2C_3\sphericalangle+\delta)=$$
$$=180^\circ-\big(180^\circ-(\gamma+2\delta)+\delta\big)=\gamma+\delta.$$

Innen $C_2FC_1\sphericalangle=180^\circ-(\gamma+2\delta)$, $BC_1F\sphericalangle=BFC_1\sphericalangle=\gamma+\delta$, tehát $BC_1C\sphericalangle=BC_1F\sphericalangle+\delta=\gamma+2\delta$.

Írjuk fel a szinusztételt, ezúttal a CC_2C_3 és a CC_1B háromszögekre:

$$\frac{CC_3}{C_2C_3}=\frac{\sin(\gamma+2\delta)}{\sin\gamma},\qquad \frac{BC}{BC_1}=\frac{\sin(\gamma+2\delta)}{\sin\gamma},$$

ezért $\frac{CC_3}{C_3F}=\frac{CC_3}{C_2C_3}=\frac{BC}{BC_1}$, $\frac{CF}{C_3F}=\frac{CC_3+C_3F}{C_3F}=\frac{CC_3}{C_3F}+1=\frac{BC}{BC_1}+1$, így

$$C_2C_3=C_3F=\frac{CF}{\frac{BC}{BC_1}+1}.$$

Tehát

$$C_2C_3=\frac{CF}{\frac{BC}{BC_1}+1}=\frac{s-c}{\frac{a}{s-b}+1}=B_2B_3.$$

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 11. évf.)

12 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 9 versenyző: Asztalos Ádám, Beke Csongor, Csaplár Viktor, Kovács Tamás, Nagy Nándor, Rareş Polenciuc, Tiderenczl Dániel, Várkonyi Zsombor, Weisz Máté. 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 5016. *Adott egy $ABCD$ konvex négyszög. Úgy jelöljük ki az AD oldal E_1, a BC oldal F_1, az AC átló E_2 és a BD átló F_2 pontját, hogy*

$$AE_1:E_1D=BF_1:F_1C=AE_2:E_2C=BF_2:F_2D=AB:CD.$$

Tudjuk, hogy semelyik két pont nem esik egybe. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az E_1F_1 és E_2F_2 egyenesek merőlegesek egymásra.

(*4 pont*)

I. megoldás. Legyen $AB=a$ és $CD=c$. A CE_2F_1 és a CAB háromszögek hasonlóak, mivel $ACB\sphericalangle = E_2CF_1\sphericalangle$, valamint

$$\frac{CE_2}{CA}=\frac{CE_2}{CE_2+E_2A}=\frac{1}{\frac{CE_2+E_2A}{CE_2}}=\frac{1}{1+\frac{E_2A}{CE_2}}=\frac{1}{1+\frac{a}{c}}=\frac{1}{\frac{c+a}{c}}=\frac{c}{c+a}$$

és

$$\frac{CF_1}{CB}=\frac{CF_1}{CF_1+F_1B}=\frac{1}{\frac{CF_1+F_1B}{CF_1}}=\frac{1}{1+\frac{F_1B}{CF_1}}=\frac{1}{1+\frac{a}{c}}=\frac{1}{\frac{c+a}{c}}=\frac{c}{c+a}.$$

Így $\frac{E_2F_1}{AB}=\frac{CE_2}{CA}=\frac{c}{c+a}$, tehát $E_2F_1=\frac{c}{c+a}\cdot a=\frac{ac}{c+a}$.

A fentiekhez hasonlóan $\frac{CE_2}{CA}=\frac{CF_1}{CB}=\frac{DE_1}{DA}=\frac{DF_2}{DB}$. Ezt és a megfelelő szögek egyenlőségét felhasználva:

$$CE_2F_1\Delta\sim CAB\Delta, \tag{1}$$

$$E_1AE_2\Delta\sim DAC\Delta, \tag{2}$$

$$F_2BF_1\Delta\sim DBC\Delta, \tag{3}$$

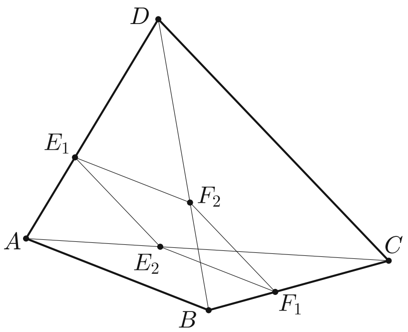
$$DE_1F_2\Delta\sim DAB\Delta. \tag{4}$$

(1) és (4) esetében a hasonlósági arány $\frac{c}{c+a}$, így $E_1F_2=E_2F_1=a\cdot\frac{c}{c+a}=\frac{ac}{c+a}$.

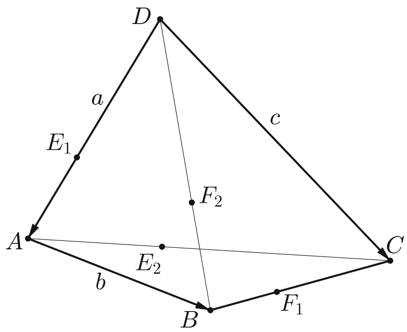
(2) és (3) esetében a hasonlósági arány $\frac{a}{c+a}$, így $E_1E_2=F_1F_2=c\cdot\frac{a}{c+a}=\frac{ac}{c+a}$.

Tehát $E_1E_2F_1F_2$ rombusz, ezért az átlói merőlegesek egymásra (*1. ábra*).

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 8. évf.)



1. ábra



2. ábra

II. megoldás. Célunk belátni, hogy az $\overrightarrow{E_1F_1}$ és $\overrightarrow{E_2F_2}$ vektorok merőlegesek egymásra, ami pontosan akkor teljesül, ha a skaláris szorzatuk 0.

Jelölje a $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ vektorokat rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, illetve $\mathbf{b}$, hosszukat a megfelelő kisbetű; legyen továbbá $\frac{b}{b+c}=\beta$ (*2. ábra*).

Ekkor

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})-\mathbf{c},\quad \overrightarrow{BD}=-\mathbf{a}-\mathbf{b},\quad \overrightarrow{AC}=-\mathbf{a}+\mathbf{c},$$

ezért

$$\overrightarrow{AE_2}=\beta\overrightarrow{AC}=-\beta\mathbf{a}+\beta\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{AF_2}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF_2}=\mathbf{b}+\beta\overrightarrow{BD}=\mathbf{b}+\beta(-\mathbf{b}-\mathbf{a})=-\beta\mathbf{a}+(1-\beta)\mathbf{b},$$

így $\overrightarrow{E_2F_2}=\overrightarrow{AF_2}-\overrightarrow{AE_2}=\big(-\beta\mathbf{a}+(1-\beta)\mathbf{b}\big)-(-\beta\mathbf{a}+\beta\mathbf{c})=(1-\beta)\mathbf{b}-\beta\mathbf{c}$. Hasonlóan

$$\overrightarrow{BF_1}=\beta\overrightarrow{BC}=\beta(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB})=\beta\mathbf{c}-\beta(\mathbf{a}+\mathbf{b})=-\beta\mathbf{a}-\beta\mathbf{b}+\beta\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{BE_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE_1}=-\mathbf{b}-\beta\mathbf{a},$$

ezért $\overrightarrow{E_1F_1}=\overrightarrow{BF_1}-\overrightarrow{BE_1}=(1-\beta)\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$. Felírva $\overrightarrow{E_1F_1}$ és $\overrightarrow{E_2F_2}$ skaláris szorzatát:

$$\overrightarrow{E_1F_1}\cdot\overrightarrow{E_2F_2}=\big((1-\beta)\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}\big)\big((1-\beta)\mathbf{b}-\beta\mathbf{c}\big)=(1-\beta)^2b^2-\beta^2c^2=$$

$$=\left(\frac{b+c-b}{b+c}\right)^2b^2-\left(\frac{b}{b+c}\right)^2c^2=\frac{c^2b^2}{(b+c)^2}-\frac{b^2c^2}{(b+c)^2}=0.$$

Tehát a két vektor skaláris szorzata 0, vagyis merőlegesek egymásra.

48 dolgozat érkezett. 4 pontos 43, 3 pontos 2, 2 pontos 3 dolgozat.

B. 5027. *Gombóc Artúr az Édes utca 1. szám alatt lakik, a csokibolt pedig az utca másik végén, az n-edik szám alatt található. Artúr minden nap a következő fitneszedzést tartja: elindul a 2-es számú ház elől. Ha a k-adik számú ház előtt áll (ahol $1<k<n$), akkor feldobja lejárt szavatosságú, de szabályos csokiérméjét. Fej esetén átmegy a $(k-1)$-es számú, míg írás esetén a $(k+1)$-es számú ház elé. Ha a csokibolt elé ér, akkor betér, és legurít egy csokigolyót, majd az $(n-1)$-es számú ház elé megy. Ha hazaér, vége az edzésnek. Naponta átlagosan hány csokigolyót gurít le Artúr?*

(*5 pont*)

Megoldás. Naponta átlagosan 1 csokigolyót gurít le. Hívjuk n-edzésnek az n hosszú utcában végzett edzést, és legyen $f(n)$ az átlagosan megevett csokigolyók száma. Teljes indukcióval látjuk be, hogy $f(n)=1$. Az állítás $n=2$-re nyilván igaz. Feltéve, hogy $n=k\geqslant 2$-re igaz, vizsgáljuk az $n=k+1$ esetet. A $(k+1)$-es edzés kezdetén $\frac12$ eséllyel csinál egy k-as edzést és visszaér a 2-es házba, és $\frac12$ eséllyel visszamegy az 1-es házba 0 csokigolyóval. Ha csinált egy k-as edzést, utána megint $\frac12$ eséllyel egy k-as edzést végez, és $\frac12$ eséllyel visszamegy az 1-es házba stb. Felhasználva, hogy

$$\frac{1}{2^l}+\frac{1}{2^{l+1}}+\ldots=\frac{\left(\frac12\right)^l}{1-\frac12}=\left(\frac12\right)^{l-1},$$

felírható a következő:

$$f(k+1)=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{4}f(k)+\frac{1}{8}\cdot 2f(k)+\frac{1}{16}\cdot 3f(k)+\ldots=$$

$$=f(k)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)+f(k)\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)+\ldots=$$

$$=f(k)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=f(k).$$

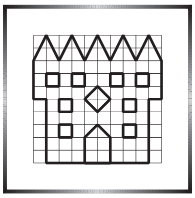
Ezzel az állítást beláttuk $n=k+1$ esetére is.

Tehát Artúr átlagosan minden nap 1 csokigolyót gurít le.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.)

32 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 10 versenyző: Baski Bence, Beke Csongor, Győrffi Ádám György, Hegedűs Dániel, Nagy Nándor, Osztényi József, Soós Máté, Szabó Kornél, Török Mátyás, Weisz Máté. 4 pontos 12, 3 pontos 7, 2 pontos 1, 1 pontos 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (654–658.)



K. 654. Egy összejövetelen 20 ember vett részt. Menet közben az derült ki, hogy mindenki pontosan 13 embert ismer a résztvevők közül (az ismeretség kölcsönös). Hány közös ismerőse van a jelenlevők között a társaság két tetszőlegesen kiválasztott tagjának, ha a közös ismerőseik száma a lehető legkevesebb?

K. 655. Az $\overline{ABCD}$, $\overline{BCBA}$, $\overline{BDAB}$ és $\overline{DDAD}$ négyjegyű számok különböző négyjegyű prímek (a különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek). Melyek ezek a számok? Annak ellenőrzésére, hogy egy konkrét négyjegyű szám prímszám-e, használható a `http://matek.com/szamok/primszamok` weboldal.

K. 656. Adott egy 21 cm-szer 29 cm méretű, téglalap alakú papírlap. Hogyan lehet vele kimérni

a) pontosan 3 cm-es távolságot

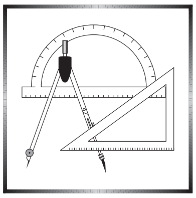
b) pontosan 1 cm-es távolságot

minden egyéb segédeszköz felhasználása nélkül? (A papírlap hajtogatása megengedett.)

K. 657. Adjuk meg 1–10 000-ig a 99 összes olyan többszörösét, amely számjegyeinek összege nem osztható 18-cal.

K. 658. Két egyforma téglalap alapterületű szobát 25 cm $\times$ 40 cm-es padlólapokkal burkolnak be teljesen a padlólapok vágása nélkül. Az egyik szobában a hosszabbik falszakasszal párhuzamosan rakják a padlólap 40 cm-es oldalát, a másik szobában pedig a rövidebbik fallal párhuzamosan. Az egyik szobában a hosszabbik fal mellé 9-cel kevesebb lap került, mint a másik szobában, a rövidebbik fal mellé pedig 6-tal több, mint a másikban. Hány méter hosszúak a két szoba alapjának oldalai?

Beküldési határidő: 2020. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1595–1601.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1595. Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló (x, y) számpárt, amire
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{1893}.$$

Javasolhatta volna: *Cafenát-Pahneákh* (Théba, Egyiptom)

C. 1596. Egy háromszög oldalai 5 cm, 5 cm és 6 cm hosszúak. A háromszögbe írható körnek az oldalakkal párhuzamos érintői és az oldalak egy hatszöget zárnak közre. Mekkora ennek a területe?

Feladatok mindenkinek

C. 1597. Hány különböző olyan derékszögű háromszög létezik, melynek oldalai egész mérőszámúak és az egyik oldal hossza 2^n (n pozitív egész, a választ n függvényében adjuk meg)?

C. 1598. Az $ABCD$ konvex négyszög AB és CD oldalainak felezőpontjait összekötő MN szakasz hossza az AD és BC oldalak hosszának számtani közepe. Mutassuk meg, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz.

C. 1599. Oldjuk meg a természetes számpárok halmazán a következő egyenletet:
$$2y^2-2x^2-3xy+3x+y=13.$$

Javasolta: *Imre Tamás* (Marosvásárhely)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1600. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$4^x + 9^x + 36^x + \sqrt{\frac{1}{2} - 2x^2} = 1$$

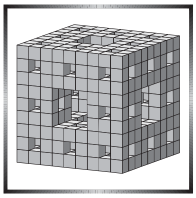
egyenletet.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1601. Egy szabályos négyoldalú gúla oldallapjának magassága kétszerese az alaplap élének. Az alaplap síkjától számítva a magasság hány százalékánál kell az alaplap síkjával párhuzamosan kettévágni a gúlát ahhoz, hogy a keletkezett csonkagúla palástjának és fedőlapjának területe összesen pont fele legyen az eredeti gúla palástja területének?

Beküldési határidő: 2020. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5086–5093.)



B. 5086. Oldjuk meg az $\left(x^3 - y^2\right)^2 = \left(x^2 - y^3\right)^2$ egyenletet az egész számpárok halmazán.

(*4 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5087. Az $ABCD$ négyzet egy belső P pontjának távolsága az A, B, D csúcsoktól rendre 1, $\sqrt{2}$, illetve 2. Számítsuk ki az APB szög nagyságát.

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5088. Adott G számhalmazhoz a $k > 1$ pozitív egész *érdekes,* ha a G halmazban van k különböző olyan elem, amelyek átlaga szintén a G halmazba esik.

Legyen a $H = \{1; 3; 4; 9; 10; \ldots\}$ halmaz azon számok halmaza, amelyek előállnak néhány különböző 3-hatvány összegeként.

a) Mely $k > 1$ számok érdekesek a H halmazhoz?

b) Legyen $c \notin H$ tetszőleges pozitív egész. Igazoljuk, hogy a $H' = H \cup \{c\}$ halmazhoz minden $k > 1$ szám érdekes.

(*5 pont*)

B. 5089. Egy tetraéder két kitérő éle egymásra merőleges, hosszuk 12 és 13, egyeneseik távolsága 14 egység. Határozzuk meg a tetraéder térfogatát.

(*3 pont*)

B. 5090. Egy szabályos érme egyik felén +1, másik felén −1 szerepel. Egymás után n-szer feldobjuk az érmét, és egy sorba lejegyezzük az n db eredményt. Ezután bármely két szomszédos szám alá leírjuk a szorzatukat, így egy újabb számsorhoz jutunk, ami már csak $(n-1)$ db számból áll. Ezt a műveletet többször is végrehajtjuk, egészen addig, amíg egy egyetlen számból álló sorhoz nem jutunk. Mennyi az így kapott számháromszögben lévő $\frac{n(n+1)}{2}$ darab szám összegének a várható értéke?

(*3 pont*)

B. 5091. Az $A_1A_2\dots A_{12}$ szabályos 12-szögben legyen P az A_1A_8 és A_6A_{11} átlók metszéspontja, továbbá R az A_7A_8 és A_9A_{11} egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy a PR egyenes harmadolja az A_1A_4 átlót.

(*5 pont*) *Bíró Bálint* (Eger) ötletéből

B. 5092. Kiszámoltuk a $\{0,1,\dots,n-1\}$ halmaz összes részhalmazában az elemek összegét. Mi lehet n értéke, ha a kapott 2^n darab összegnek pontosan az n-edrésze osztható n-nel?

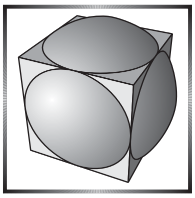
(*6 pont*)

B. 5093. Két egybevágó szabályos ötszög közös része egy tízszög, amelynek oldalai rendre $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Igazoljuk, hogy

$$a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_7 + a_7a_9 + a_9a_1 = a_2a_4 + a_4a_6 + a_6a_8 + a_8a_{10} + a_{10}a_2.$$

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2020. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (772–774.)

A. 772. Van N ember, és mindegyik gondol egy véletlen egész számra 1 és 19 között (az 1-et és a 19-et is beleértve, nem feltétlenül egyforma eloszlással). A gondolt véletlen számok egymástól függetlenek, és minden emberre igaz, hogy mind a 19 számra legfeljebb 99% valószínűséggel gondol. Ezután összeadják a gondolt N darab számot, és veszik a kapott összeg 19-es maradékát. Bizonyítandó, hogy az így kapott eredmény eloszlása exponenciális sebességgel tart az egyenletes eloszláshoz, azaz létezik olyan $0 < c < 1$ valós szám, melyre teljesül, hogy az N darab véletlen szám összege mindegyik 19-es maradékot $1/19 - c^N$ és $1/19 + c^N$ közötti valószínűséggel veszi fel.

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Budapest)

A. 773. Legyen $n \geqslant 3$ egy pozitív egész szám, σ pedig a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmaz identitástól különböző olyan permutációja, melyre $\sigma(0) = 0$. A C_σ *titkosítás* minden m pozitív egészt elkódol olyan módon, hogy az m szám n-es számrendszerben felírt alakjában minden egyes a számjegyet $\sigma(a)$-ra cserél. Legyen d egy n-nel nem osztható pozitív egész. Azt mondjuk, hogy a C_σ titkosítás *kompatibilis* d-vel, ha C_σ d minden többszörösét d többszörösévé kódolja el. A d számot *titokzatosnak* nevezzük, ha van hozzá olyan C_σ titkosítás, mely kompatibilis d-vel.

Legyen k egy pozitív egész szám, és legyen $p = 2^k + 1$.

a) Keressük meg a 2 legnagyobb hatványát, amely titokzatos a $2p$-s számrendszerben, és bizonyítsuk be, hogy csak egy titkosítás kompatibilis vele.

b) Keressük meg a p legnagyobb hatványát, amely titokzatos a $2p$-s számrendszerben, és bizonyítsuk be, hogy csak egy titkosítás kompatibilis vele.

c) Tegyük fel, továbbá hogy a fenti p szám prímszám. Keressük meg a legnagyobb titokzatos számot a $2p$-s számrendszerben, és bizonyítsuk be, hogy csak egy titkosítás kompatibilis vele.

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Bulgária)

A. 774. Az ABC háromszög körülírt körének középpontja O, és D egy tetszőleges pont a körülírt körön. Legyen X, Y és Z a D pont merőleges vetülete rendre az OA, OB és OC egyenesen. Bizonyítandó, hogy az XYZ háromszög beírt körének középpontja rajta van az ABC háromszög D ponthoz tartozó Simson-egyenesén.

Javasolta: *Fonyó Lajos* (Keszthely)

Beküldési határidő: 2020. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok

I. 505. Egy tájfutó versenyen nem lehet mindenki egyszerre a terepen, ezért különböző időben indítják a versenyzőket. A célba befutó sportoló csak az addig beérkezett versenyzők eredményeit tudhatja meg.

Egy lezajlott verseny után ismerjük az N számú $(3 < N \leqslant 200)$ versenyző `START` indulási és `CEL` beérkezési idejét $(0 < \texttt{START}, \texttt{CEL} \leqslant 10\,000)$. Készítsünk programot, amely meghatározza, hogy hány versenyző gondolhatta magáról a beérkezés pillanatában, hogy a legjobb háromban végezhet, tehát van esélye a dobogón állni.

A *standard bemenet* első sora a versenyzők N számát és az ezt követő N sor soronként két számot tartalmaz: a versenyzők indulási és érkezési idejét másodpercben, a beérkezés ideje szerint növekvő sorrendben.

A *standard kimenetre* írjuk ki azon versenyzők számát, akik beérkezéskor dobogós helyre számíthattak.

Bemenet (a / jel sortörést helyettesíti)	**Kimenet**
`6 / 6 1798 / 8 1805 / 13 1809` `14 1815 / 9 1824 / 35 1830`	`4`

Beküldendő egy `i505.zip` tömörített állományban a program forráskódja és egy rövid leírás, ami megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 506. Az idei Nemes Tihamér Nemzetközi Informatikai Tanulmányi Verseny 2. fordulójában a 9–10. évfolyamosoknak a következő, Fasor nevű programozási feladatot kellett megoldaniuk:

„A Százholdas Pagonyban van egy N fából álló fasor, a szomszédos fák távolsága 1 pagométer. Bagoly akkor boldog, ha olyan fa tetején ül, ahonnan nem lát magasabb fát. Mivel Bagoly öregszik, ezért csak a legfeljebb K pagométer távolságra lévő fákat látja. Egy sajátjánál magasabb fát tehát akkor láthat, ha a fasorban a sorszámuk különbsége nem nagyobb, mint K."

Adjuk meg *táblázatkezelő* segítségével az első olyan fát, amelynek tetején Bagoly boldogan ücsöröghet. A munkafüzet `B1`-es cellájába lévő N érték alapján készítsünk egy véletlen számsorozatot egymás melletti cellákba, amely a fasor fáinak magasságát adja meg pagométerre kerekített értékben. A munkafüzet `B2`-es cellájában lévő K érték segítségével jelöljük feltételes formázással az első megfelelő fa magasságát mutató cellát. Ha nincs ilyen fa, akkor ne jelöljünk meg egy cellát sem.

A megoldáshoz segédszámításokat lehet végezni a munkafüzetben, de csak a táblázatkezelő beépített függvényei használhatók, vagyis a megoldás makrót vagy programot ne tartalmazzon.

Beküldendő egy `i506.zip` tömörített mappában a táblázatkezelő munkafüzet, valamint egy rövid leírás, ami megadja az alkalmazott táblázatkezelő nevét és verzióját.

I. 507 (É). A honlapok látogatottságáról a webszerverek legtöbbször naplót vezetnek. Az általunk vizsgált weboldal naplójából részletek találhatók a webstat.txt szöveges állományban. A napló időrend szerint rendezett, egy-egy sorában egy látogatás adatai szerepelnek:

- a használt böngésző neve, vagy egy kötőjel, ha a böngésző típusa nem volt megállapítható;
- a böngészés dátuma (minden dátum 2020. februári);
- a weboldalt felkereső kliensszámítógép IP-címe;
- amennyiben a látogató az oldal címét beírva kereste föl a weboldalt, akkor a „honlap" szó, egyébként annak a weboldalnak vagy alkalmazásnak a címe, ahonnan hivatkozással a honlapra került a látogató.

A szöveges állományban a fenti adatokat szóköz választja el a mintának megfelelően:

```
Chrome 2020.02.11 130.43.220.233 www.google.com
Firefox 2020.02.11 134.255.106.38 www.google.com
Safari 2020.02.11 134.255.91.250 honlap
Safari 2020.02.11 146.255.156.230 www.google.hu
```

Készítsünk programot, amellyel megoldjuk a következő feladatokat. Minden feladatrész elkészítésekor írjuk ki a feladat sorszámát (pl. 1. feladat:), valamint a beolvasás és a kiírás formátumát a minták alapján oldjuk meg. Az ékezetmentes kiírás is elfogadott.

1. Olvassuk be és tároljuk el a webstat.txt állományt, majd adjuk meg, hogy hány adatsor szerepel a naplóban. Például: A beolvasott sorok száma: 300.
2. Adjuk meg táblázatos elrendezéssel, hogy az egyes napokon hány látogató adatai szerepelnek a naplóban. Például: 2020.02.11   59 látogató.
3. Soroljuk fel azokat a böngészőket, amelyek szerepelnek a naplóban. A listában minden név egyszer szerepeljen és a neveket vesszővel válasszuk el. Például: A böngészők: Chrome, Firefox, Safari, Edge, Opera.
4. Adjunk statisztikát arról, hogy a honlapot *Chrome* böngészővel felkeresők hogyan érték el a weboldalt. Számítsuk ki, hogy hány százalékuk adta meg a honlap címét, illetve hány százalékuk jött máshonnan a honlapra. Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve írjuk ki, például:

```
www.google.com:       50.5%
honlap:               44.7%
android-app:           2.1%
kereso.startlap.hu:    0.5%
www.google.hu:         1.1%
hu.m.wikipedia.org:    1.1%
```

5. Vizsgáljuk meg az adatokat, és adjuk meg azokat az IP címeket, amelyekről egy adott napon többször is fölkeresték a weboldalt. A listában minden IP-cím csak egyszer szerepeljen. Az eredményt az alábbi formában adjuk meg: Amely címekről többször is jártak az oldalon egy adott napon: 176.63.29.84, 176.63.7.203, 188.156.108.17 ...
6. Kérjünk be egy IP-címet, és adjuk meg, hogy mely napokon keresték föl a weboldalt a bekért címnek legalább az első két bájtjával azonos címekről. Készítsünk egy szöveges állományt, amelybe soronként megadjuk a talált napokat és IP-címeket a napló szerinti sorrendben. Az állomány neve a bekért IP-címből épüljön fel úgy, hogy a címben szereplő pontok helyére az aláhúzásjel kerüljön, és a kiterjesztése txt legyen.

Beküldendő egy `i507.zip` tömörített állományban a program forráskódja és egy rövid leírás, ami megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 43. Jelölje $f(n)$ az n-edik Fibonacci-számot, ahol $f(0)=1$, $f(1)=1$, valamint $f(n+2)=f(n)+f(n+1)$. Készítsünk programot, amely adott N-re meghatározza az $f\big(f(N)\big)$ értékének utolsó két számjegyét.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N nemnegatív egész számot.

Kimenet: az egyetlen sorban $f\big(f(N)\big)$ utolsó két számjegye.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`6`	`77`

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10^{15}$. Időkorlát: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 10$.

Beküldendő egy `is43.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 142. Egy élelmiszerfeldolgozással foglalkozó cég raktárában az almák egy futószalagon érkeznek sorban. Mindegyik almáról tudjuk, hogy mennyire finom. Az almákat szeretnék zsákokba rendezni úgy, hogy az első néhány az első zsákba kerül, a következő néhány a második zsákba, a következő néhány a harmadikba, és így tovább. Egy zsákba legfeljebb K darab alma fér. Egy zsák alma annyira finom, mint a benne lévő legfinomabb alma. Írjunk programot, ami úgy osztja be az almákat a zsákokba, hogy a legfinomabb és legkevésbé finom zsák almák finomsága közötti különbség a lehető legkisebb legyen.

Bemenet: az első sor tartalmazza az almák N számát és a zsákok K méretét. A második sor N darab számot tartalmaz: az i-edik szám azt jelenti, hogy az i-edik alma finomsága F_i.

Kimenet: egyetlen szám, amely megadja a legkisebb finomságbeli különbséget a legfinomabb és legkevésbé finom zsák alma között optimális beosztás esetén.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`5 2` `31 88 41 72 9`	`47`

Korlátok: $1 \leqslant N,K \leqslant 100\,000$, $1 \leqslant F_i \leqslant 10^9$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelése: a pontok 30%-a kapható, ha $N \leqslant 1000$.

Beküldendő egy `s142.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2020. április 10.

❄

A mérési pontverseny lelkivilága*

Bevezető

Manapság egy középiskolás nem találkozik túl gyakran a fizikai mérés fogalmával. Általában csak az elméletet tanuljuk, ritkán végzünk el egy-egy kísérletet, hogy lássuk tényleg az történik-e, amit várunk. Azonban feltehetjük a kérdést: hogyan tudunk egy-egy elméletet „tudományos módszerekkel" ellenőrizni, vagy éppen ha egy-egy kísérletet nem tudunk elmélettel magyarázni, hogyan tudjuk a tapasztaltakat „korrekten" vizsgálni és elemezni. Azt az eljárást nevezzük mérésnek, amikor egy kísérletet végzünk, és annak bizonyos paramétereit rögzítve vizsgáljuk meg, illetve analizáljuk a módszert.

A mérés szoros kapcsolatban áll az elmélettel, együtt adják a fizika gondolkodásmódjának alapját. Egy mérés segítségével modellt alkothatunk a mért rendszerről, amiből fizikai elmélet lehet. Az elméletet további mérésekkel tudjuk megerősíteni: az elmélet elfogadott lesz, ha a kísérlet pontos ismeretében bárki számára megismételhetően ellenőrizhetővé válik. A mérés és az elmélet egymásra támaszkodik, mibenlétükkel azonban ez a cikk tovább nem foglalkozik, ez ugyanis inkább tudományfilozófiai kérdés.

A mérési pontverseny célja, hogy minél több diákot ösztönözzön arra, hogy a feladatokon keresztül elsajátítsák a fizikai mérések tudományos eszközeit és technikáit a középiskolás tudásanyag és a rendelkezésükre álló eszközök segítségével, illetve az egy éven keresztül kimagasló munkát végző megoldókat jutalomban részesítse. Ezen cikk célja ennek megfelelően az, hogy konkrét javaslatok és technikai fogások ismertetésén keresztül tanácsot adjon azoknak, akik nem tudják, hogyan fogjanak hozzá a munkához, illetve minden Olvasót arra sarkalljon, hogy próbálja ki magát a pontversenyben.

Fontos megjegyezni, hogy egy munka nem attól lesz tudományos vagy korrekt, hogy egyetemi vagy egyenesen kutatásbeli eszközöket és ismeretanyagot használ fel, hanem attól, hogy a mérést végző mennyire használja a bárki számára elsajátítható *természettudományos gondolkodásmódot* és *szemléletet.* Ennek megszerzéséhez és csiszolásához nyilvánvalóan szükséges valamennyi gyakorlás is, amire egy ilyen pontverseny – ahol a megoldó visszajelzést kap munkájának helyességéről – szinte tökéletes alkalom lehet.

A cikk a *mérés végrehajtásának* alapgondolataival és a *mérési jegyzőkönyv* írásának technikájával foglalkozik. Elsőként azon pontokkal foglalkozunk, melyek a feladat helyes megoldásához elengedhetetlenek; legtöbbször ezek betartására és helyes kivitelezésére járnak a megszerezhető pontok. Ezek után a megkezdett gondolatmenet folytatásaként a mérés kiértékeléséről és hibaszámításról lesz szó, majd

*A Szerző a BME fizika BSc szakos hallgatója, a KöMaL elmúlt tanévi mérési versenyének (holtversenyben) nyertese.

olyan tanácsok következnek, amelyek a minél magasabb szintű feladatmegoldást ösztönzik, és csak indokolt esetben érnek egy-egy pontot a megoldónak, azonban rendkívül hasznos lehet gondolkodásmódja, szemlélete és technikai készségei fejlesztésében.

Amit mindenképp tegyünk meg

Mindenekelőtt számítsunk arra, hogy a kísérlet elvégzése és a jegyzőkönyv megírása általában nem egy belátható idejű munka, ezért hagyjunk magunknak elég időt. Van úgy, hogy minden néhány órán belül megvan, azonban számolni kell a „váratlannal”, illetve olyan technikai nehézségekkel, amelyeket még a tervezőasztalnál sem látunk előre. Így a legeslegfontosabb tanács, hogy mindig hagyjunk magunknak elég időt!

A tervezőasztalnál

A munka kezdeti szakasza, ahol ki kell találnunk magának a feladatnak a megoldását. Ebbe beletartozik a kísérleti eszközök összeírása, a kísérleti összeállítás kigondolása, megtervezése, illetve a mérés elméletének átgondolása. Utóbbihoz kapcsolódóan fontos, hogy tisztázzuk magunkban, milyen mennyiségeket fogunk mérni, és ezek milyen kapcsolatban állnak azzal, amit a mérés alapján meg akarunk határozni. Ez a mérés kiértékelésénél különösen fontos lesz, emellett elkerüljük, hogy netán még egyszer meg kelljen ismételni a kísérletet, mert nem is azt mértük le, amit kellett volna. Továbbá érdemes a tervezőasztalnál átgondolni, hogy hány sorozatnyi mérést végezzünk; erre bővebben a hibaszámítás részben térünk vissza.

Ha például az a feladatunk, hogy egy folyékony anyag törésmutatóját mérjük meg, akkor azt tehetjük közvetlenül szögméréssel, vagy hosszúságméréssel egy, a vizsgálandó folyadékkal megtöltött plánparalel lemez segítségével. Ebben az esetben a tervezőasztalnál gondoljuk át, hogy mihez van eszközünk, egyes esetekben pontosan milyen adatokat kell rögzíteni, és hogy mit tudunk pontosabban mérni.

A kísérlet végzéséről

Mindenekelőtt törekedjünk az egyszerűségre, és arra, hogy minél kevesebb dolog mehessen tönkre a kísérlet végzése alatt, illetve hogy minél kevesebb mérési adatot kelljen felvennünk egy mérési sorozaton belül. Természetesen ez senkit ne fogjon vissza a barkácsolástól és a kreatív, ötletes feladatmegoldástól! Ezeket általában a javítók is méltányolják, de a túl bonyolult és sok mérendő adatot igénylő eljárásokkal leginkább csak a saját dolgunkat nehezítjük meg, ráadásul ezzel párhuzamosan a pontosságot rontjuk. (Habár vannak a tudományos és mérnöki világban olyan esetek, amikor a megfelelő pontosságot csak nagyon komoly eszközökkel és berendezésekkel tudják biztosítani, de ennek a pontversenynek nem ez a célja.)

Fontos, hogy a mérésünket reprodukálhatóan dokumentáljuk. A tudományos megközelítésnek megfelelően arra kell gondolnunk, hogy az általunk végzett mérést bárki képes legyen megismételni az ellenőrizhetőség végett. Ebben sokat segít, ha az eszközeinkről és a kísérlet végzésének kulcspillanatairól képeket készítünk, hogy a jegyzőkönyvünket olvasóknak könnyebben át tudjuk adni a mérés megismétléséhez szükséges információkat.

Kiértékelés és hibaszámítás

A mérés elején alakítsunk ki egy egységes jelölésrendszert, és ezt következetesen használjuk valamennyi esetben. A mérés elméletének jegyzőkönyvben való rögzítése *nem kötelező* elem, de a számítások menetének nyomon követhetően szerepelnie kell benne. (Ez alapján egyébként sokszor ellenőrizni is tudjuk magunkat.) Érdemes a mért és a belőlük közvetlenül számított adatokat elkülöníteni a végeredménytől, illetve a nem hozzájuk tartozó esetleges segéd- és részszámításoktól. Erre kitűnően alkalmas a táblázatok használata.

A mérés megkerülhetetlen része a hibabecslés vagy hibaszámítás. A hibáknak alapvetően három fajtáját különböztetjük meg: lehetnek *szisztematikusak, véletlenek* vagy *statisztikusak.*

A szisztematikus hiba meghatározott módon ható okok eredménye, abszolút nagysága és előjele – azonos körülmények közt – nem változik. Ebbe a kategóriába tartozik a mérőműszerünk pontosságából fakadó pontatlanság, de akár a hőmérsékletre érzékeny méréseknél a szoba hőmérsékletének bizonytalansága. Például ha egy mérőszalag milliméteres beosztású, akkor mondhatjuk azt, hogy a hosszmérésünk abszolút hibája legfeljebb 1 mm, ezért ezzel számolhatunk tovább. (Ezzel a hibát ugyan felülbecsüljük, de ez középiskolás szinten tökéletesen megfelel.)

Ezen a ponton fontos megjegyezni, mit értünk *abszolút* és *relatív* hiba alatt. Egy mennyiség abszolút hibája a mért vagy számított értéktől vett lehetséges legnagyobb eltérés (abszolút érték); ennek megfelelően az abszolút hibának mértékegysége van. A relatív hiba pedig az abszolút hiba és a mért vagy számított érték hányadosa, melyet általában százalékos alakban szoktunk megadni.

Egy mérés véletlen hibája több különböző hatás együttes következménye, melyet összetettségük miatt általában nem lehet közvetlenül meghatározni. Ezek sokszor nehezen számszerűsíthetőek, többnyire csak becsülni lehet őket. Ilyen például a kísérlet „kotyogó”, csúszkáló, súrlódó részeiből fakadó pontatlanság. A véletlen és szisztematikus hibák közötti átfedésbe tartozik a reakcióidőből származó hiba: egy ember reakcióideje a mérés során általában egy érték körül mozog, de kisebb-nagyobb mértékben ingadozik; ez soktényezős, mondhatni véletlenszerű dolog. Azonban az erre érzékeny méréseknél (pl. ingák esetén) a saját reakcióidőnket abszolút hibaként valahogy meg kell becsülnünk.

A statisztikus hibák egy jelenség nagyszámú megfigyelése esetén lépnek fel, amikor a mért érték a kísérlet többszöri elvégzése esetén egy meghatározott érték körül kisebb-nagyobb mértékben ingadozik. Ezt nevezzük *statisztikus ingadozásnak.* A legegyszerűbb ezen hiba becslésére, ha a mennyiség abszolút hibáját a szórásával azonosítjuk.

Ökölszabály, hogy amennyiben egy mennyiség hibáját feltehetően több, különböző és *független* hibaforrás befolyásolta, akkor azt kell választani, amelyik a legnagyobb eltérést produkálhatja. Emellett felsőbb matematikai módszerekkel megindokolható módon állíthatjuk, hogy amennyiben egy számítandó mennyiség más mennyiségek valahanyadik (n-edik) hatványának szorzata, akkor úgy kell a kérdéses mennyiség relatív hibáját kiszámítani, hogy a többi mennyiség relatív hibáját a hozzájuk tartozó n abszolút értékével megszorozzuk, és ezeket összeadjuk. A relatív hibák ilyen módon képzett összege több mennyiség esetén túlbecsüli a hibát. Megmutatható, hogy jobb közelítést kapunk, ha a Gauss-féle hibaterjedést használjuk, azaz ha az n-nel megszorzott relatív hibák négyzetösszegből vont négyzetgyököt tekintjük az egész kifejezés relatív hibájának. A különböző görbeillesztések hibájának kiszámítására itt nem közlünk módszert, mert azok a középiskola tananyagán túlmutatnak, de érdemes ezeket is észszerű módon megbecsülni, vagy különböző forrásokban utánuk nézni.

Ezek tisztázása után visszatérhetünk arra a kérdésre, hogy mennyi mérési adatra is van szükségünk. Értelemszerűen ez a hibaforrás milyenségétől erősen függ: ha a statisztikus hibatípus jellemző, akkor több mérési adattal kell dolgoznunk, míg szisztematikus hibaforrások esetén egy-egy mérés vagy sorozat elég lehet. Például nem mindegy, hogy egy darab ellenállással dolgozunk, vagy van tíz darab azonos ellenállás, amiből áramkört építünk: egy darab esetén mindössze egyszer kell lemérnünk multiméterrel, és annak a pontosságával dolgozhatunk, míg a másik esetben mindegyiket le kell mérnünk, és össze kell hasonlítanunk a két különböző hibatípus nagyságát. Természetesen ha nagyon sok (pl. 100) ellenállásunk lenne, akkor véletlenszerűen választhatunk egy reprezentatív mintát, és nem kell mindet egyesével lemérnünk.

Összefoglalva a fentieket: egy teljes értékű jegyzőkönyvnek tartalmaznia kell az összes mérési adatot, a használt összefüggéseket és formulákat (némi indoklással), a hibaforrások számbavételét, valamint a mért és a számított értékek becsült hibáját. Hogy ez milyen formában, milyen technikai kivitelezéssel történik, az leginkább a feladattól és a megoldótól függ.

Amit érdemes lehet megtenni

Az első általános tanács, hogy ne féljünk a jegyzőkönyvbe mindent leírni, amit fontosnak tartunk. Ha túl hosszúnak, vagy nehezen érthetőnek ítéljük a szövegünket, akkor a kész jegyzőkönyvet utólag már könnyebben át tudjuk fogalmazni, tudunk tömöríteni. Persze, ahogy több és több tapasztalatot gyűjtünk össze, egyre kevesebb utómunkára lesz szükségünk. Ehhez kapcsolódóan, ha lehet, akkor a jegyzőkönyv elkészítése után egy-két nappal, hideg fejjel olvassuk át a jegyzőkönyvet „kritikus” szemmel.

A megértést segítő, formai és esztétikai elemek

Talán a legfontosabb, hogy találjunk ki egy saját logikai rendszert, ami alapján pontokba szedjük és tagoljuk a munkánkat. Érdemes külön pontba foglalni pl. a mért adatokat, a számítást, vagy akár a kísérleti eszközök listáját és az általunk használt jelölésrendszert.

Használjunk táblázatokat, és a hosszabb részeknél írhatunk egy-két mondatos összefoglalókat. A kísérleti eszközök, illetve a mérés menetének leírásánál képekkel és ábrákkal segíthetjük a megértést, és ezekre hivatkozva tömöríthetjük jegyzőkönyvünket. Természetesen csak arra hivatkozhatunk, ami egyértelműen leolvasható és jól látható. A reprodukálható mérés leírása nem helyettesíthető egy-két homályos vagy távoli képpel.

A formai és esztétikai elemek talán túlzásnak tűnhetnek, mert nincs konkrét információtartalmuk. Azonban egy formázott, tagolt, mondhatni esztétikus dolgozatot sokkal könnyebb olvasni. Ez nemcsak a javítónak hasznos, hanem nekünk is, ha hosszabb idő után újra használni szeretnénk a jegyzőkönyvet. Egy átláthatatlan munkát másoknak nehéz megérteni, elolvasni, így könnyen fontos eredmények és összefüggések keveredhetnek el. Nem véletlen, hogy a műszaki és tudományos munkáknak szigorú formai követelményei vannak.

Az elmélet és a mért eredmények magyarázata

Amennyiben releváns, nem árt a mérés elméletét átgondolni még a tervezőasztalnál: utánanézhetünk valamilyen szakmai irodalomban vagy hiteles internetes forráson a kísérletnek, kereshetünk és kérhetünk praktikus tippeket, de az is fontos lehet, ha észszerű fizikai megfontolások alapján elvárásokat fogalmazunk meg a mérés várható eredményeiről. Például: egy oldat törésmutatója a koncentrációjától monoton függ, vagy hogy egy rugalmas szál megnyúlása az erő növelésével szintén nő. (Nem határozzuk meg, hogy pontosan milyen összefüggést akarunk kapni, hanem csak gyengébb kritériumokat adunk meg).

Ehhez szorosan kapcsolódik, hogy a mérés eredményeit diszkutáljuk, értelmezzük, illetve ha van eltérés az elmélet, az elvártak és a tapasztaltak között, próbáljunk rá magyarázatot keresni. Ha esetleg a mérés nem követi szigorúan az elméletet, az nem feltétlen jelent rossz eredményt. Ez származhat abból is, hogy az elmélet valamely kritériuma nem volt biztosítva, vagy a külső hatások a vártnál nagyobbak voltak. Ellenben ha a „ józan ésszel" támasztott elvárásokat sem tartják a mért értékek, akkor érdemes elgondolkozni a kísérlet megismétlésén. Ha sehogy sem tudjuk összeegyeztetni az adatokat egymással, és nem találunk kielégítő magyarázatot, akkor a mérésünk konklúziója lehet az, hogy ezzel a módszerrel nem sikerült az elmélettel összeegyeztethető eredményt kapnunk Ez is egy lehetséges válasz, amennyiben a munka „tudományosságával" és „korrektségével" nincsenek problémák, ez is a mérési feladat teljes értékű és helyes megoldása (sőt, itt kezdődhetnek a nagyon izgalmas dolgok).

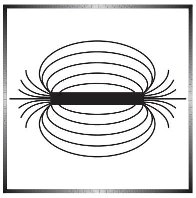
Záró gondolatok

Zárásként talán a legfontosabb gondolat, hogy ne féljünk a méréstől, illetve ne féljünk kísérletezni, barkácsolni, mérni. A másik legfontosabb, hogy ne féljünk a munkától, amit a jegyzőkönyvírás és a háttérmunka jelent: az első alkalmakkor ez nagyon-nagyon sok időt el tud venni, de ez a gyakorlattal egyre inkább gördülékenyebbé és rutinszerűvé válik. Lehet, hogy így leírva és összeszedve ez elsőre „végeláthatatlanul sok" teendő, de általában az egyes szakaszok és részletek a rutinnal és magabiztossággal folyamatosan mélyülnek és rögzülnek – pontosan ugyanúgy, mint bármely más esetben.

Időnként felteszik a kérdést, hogy miért érdemes csinálni a mérési pontversenyt. Viszonylag sok aprólékos feladat, a kísérletet meg kell tervezni és építeni, ami sok idő, jegyzőkönyvet ugyan ki szeret írni, sőt, esetleg kisebb anyagi ráfordítással jár, és még csak azt sem tudjuk mindig biztosan, hogy jó-e, amit csináltunk. Ennek ellenére annyi bizonyos, hogy aki a mérési feladatokat rendszeresen, becsületesen végzi, az olyan rendszerezett tudást, hozzáállást, gondolkodásmódot, szemléletet, magabiztosságot, kitartást, egy tudományos munka megírásának a képességét és módszerességet szerez, melyekhez másképp nagyon nehezen juthatna hozzá.

Ahhoz, hogy a mérést magát megszeressük, és hogy élvezni tudjuk a feladatmegoldást, gyakran csak akkor jutunk el, ha már többet is elvégeztünk – jókat, rosszabbakat, szenvedősebbeket, könnyebbeket, unalmasakat, látványosakat –, ugyanis ekkor tudjuk értékelni, hogy mit is jelent, amikor egy tudományos tartalommal bíró munkát végzünk, amit aztán egy magas színvonalú írással, összefoglalóval „büszkén" meg tudunk osztani másokkal.

Kondákor Márk
Nagyatád

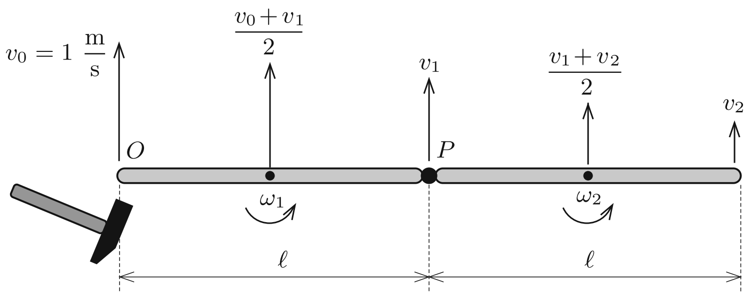


Fizika feladatok megoldása

P. 5153. *Két egyforma, homogén rúd egy-egy végpontja csuklósan kapcsolódik egymáshoz. A rudak vízszintes, súrlódásmentes asztallapon egy egyenes mentén nyugszanak. Az egyik rúd szabad végére a rúdra merőleges irányban hirtelen ráütünk, mire az a pont* 1 m/s *sebességgel kezd el mozogni. Milyen irányban és mekkora sebességgel indul el a másik rúd szabad végpontja?*

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. A hirtelen erőlökést követő pillanatban még nincsenek oldalirányú sebességek, hiszen a rudak hossza adott, és az egész rendszer oldalirányú lendülete nulla. Használjuk az *ábrán* látható jelöléseket, és az ott bejelölt irányokat tekintsük pozitívnak.



A rendszernek az O pontra vonatkoztatott perdülete az ütés utáni pillanatban *nulla*, hiszen a kezdeti perdület nulla volt, és az erőlökés iránya (hatásvonala) átmegy az O ponton, tehát az erre a pontra vonatkoztatott forgatónyomaték nulla.

A teljes perdület a tömegközéppont körüli forgásból adódó *sajátperdület* és a tömegközéppont mozgásából adódó *pályaperdület* összege. Mivel az ℓ hosszúságú, m tömegű homogén rúd tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{12}m\ell^2$, a rendszer teljes perdülete:

$$0 = m\frac{v_0+v_1}{2}\,\frac{\ell}{2} + \frac{1}{12}m\ell^2\,\frac{v_1-v_0}{\ell} + m\frac{v_1+v_2}{2}\,\frac{3\ell}{2} + \frac{1}{12}m\ell^2\,\frac{v_2-v_1}{\ell},$$

vagyis

$$0 = v_0 + 6v_1 + 5v_2. \tag{1}$$

A Δt ideig tartó, F nagyságú erő $F\Delta t$ erőlökésnek felel meg. (Egy hirtelen ütésnél F nagyon nagy, Δt pedig nagyon kicsi.) Newton törvénye értelmében a rendszer impulzusának (lendületének) megváltozása az erőlökés nagyságával egyezik meg:

$$F\Delta t = m\frac{v_0+v_1}{2} + m\frac{v_1+v_2}{2}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenlet kettőnél több ismeretlent tartalmaz (v_1-et, v_2-t és $F\Delta t$-t), belőlük a keresett v_2-t még nem tudjuk meghatározni. A hiányzó harmadik összefüggést a *munkatétel* adhatja. A rúd megütött végére F nagyságú erő hat, és az elmozdulása (a nulláról v_0-ra növelt sebesség átlagos értékével számolva) $(v_0/2)\Delta t$. A végzett munka tehát

$$W = \frac{v_0}{2}F\Delta t,$$

vagyis (2) felhasználásával:

$$W = \frac{mv_0}{4}(v_0 + 2v_1 + v_2). \tag{3}$$

Ez a munka megegyezik a meglökött rendszer teljes mozgási energiájával. Egy-egy rúddarab mozgási energiája két tag (a tömegközéppontba képzelt tömegpont mozgási energiájának és a tömegközéppont körüli forgás energiájának) összegeként kapható meg. A teljes mozgási energia az egyes rúddarabok mozgási energiájának összege:

$$E_{\text{mozgási}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0+v_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\left(\frac{v_1-v_0}{\ell}\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\left(\frac{v_2-v_1}{\ell}\right)^2.$$

A munkatétel szerint $W = E_{\text{mozgási}}$, ahonnan (3) felhasználása és algebrai átalakítások után ez adódik:

$$4v_1^2 + 2v_1v_2 + 2v_2^2 = 4v_1v_0 + 3v_0v_2 + v_0^2. \tag{4}$$

Fejezzük ki (1)-ből v_1-et:

$$v_1 = -\frac{v_0 + 5v_2}{6},$$

majd helyettesítsük be ezt a kifejezést a (4) egyenletbe. Algebrai átalakítások után a

$$14v_2^2 + 5v_2v_0 - v_0^2 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai:

I. eset: $\quad v_2 = -\frac{1}{2}v_0, \quad$ és ekkor $\quad v_1 = \frac{1}{4}v_0,$

illetve

II. eset: $\quad v_2 = \frac{1}{7}v_0, \quad$ és ekkor $\quad v_1 = -\frac{2}{7}v_0.$

Mindkét „megoldás" kielégíti a lendületváltozás és az O pontra vonatkozó perdületváltozás, valamint a munkatétel egyenleteit. Nyilvánvaló, hogy csak az egyik lehet helyes, hiszen az O pontbeli ütés után a rendszer nem viselkedhet kétféleképpen.

Vajon melyik a helyes megolás? Belátjuk, hogy ténylegesen a II. esetnek megfelelő mozgás valósul meg, az első eset csak egy (a matematikai lépések során előbukkant) „hamis gyök".

Nevezzük az erőlökéssel megegyező (az ábrán felfelé mutató, pozitívnak tekintett) irányt „előrefelének", az ezzel ellentétes irányt pedig „hátrafelének". A szögsebesség, a perdület és a forgatónyomaték akkor pozitív, ha az óramutató járásával ellentétes irányúnak látszanak a rajzon. A kiszámított v_1 és v_2 értékekből leolvashatjuk, hogy – mindkét megoldásban – a jobb oldali rúdnak az O pontra vonatkozó perdülete *negatív.* A bal oldali rúd a P pontban érintkezik a jobb oldali rúddal, és itt hátrafelé mutató (tehát negatív forgatónyomatékú) erőlökést kell kifejtenie a jobb oldali részre; csak ekkor lesz a jobb oldali rúd perdülete (az O pontra vonatkoztatva) az erőlökés után *negatív.*

A sebességek ismeretében kiszámíthatjuk, hogy a jobb oldali rúd szögsebessége az első esetnek megfelelő v_1 és v_2 mellett

$$\omega_2 = \frac{v_2 - v_1}{\ell} = -\frac{3v_0}{4\ell} < 0,$$

a második esetben pedig

$$\omega_2 = \frac{v_2 - v_1}{\ell} = \frac{3v_0}{7\ell} > 0.$$

Fentebb beláttuk, hogy a P pontban a jobb oldali rúdra hátrafelé mutató erőlökés hat, ez a rúd tömegközéppontjára vonatkozóan pozitív forgatónyomatékot eredményez, tehát a rúd szögsebessége is pozitív lesz a másik rúd másik végét érő hirtelen ütés után. Ez csak a második esetben teljesül, így most már határozottan kijelenthetjük, hogy a szabad végpont ténylegesen

$$v_2 = \frac{1}{7}v_0 = \frac{1}{7}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

sebességgel indul el „előrefelé”.

Bokor Endre (Budapest, Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A két rúdból álló rendszer összes lendületének és a teljes mozgási energiájának kiszámításakor a Δt ideig ható erőt állandó nagyságúnak tekintettük. Be lehet látni, hogy az eredmény akkor sem változik meg, ha az erő az időnek tetszőleges módon változó $F(t)$ függvénye.

(*G. P.*)

5 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre megoldása. Hiányos (2–3 pont) 2, hibás 2 dolgozat.

P. 5154. *Egy filmjelenetben egy fiú biciklizik. Ahogy a fiú lassan teker, a kerekek a kerékpár haladási irányának megfelelő irányban látszanak forogni. Miközben a fiú lassan növeli a sebességét, egyszer csak a kerekek az ellenkező irányban látszanak forogni. A sebesség további növelésekor a kerekek látszólagos forgása fokozatosan lassul (de még mindig a „rossz” irányba forognak), míg egy bizonyos v haladási sebesség esetén úgy tűnik, mintha a kerekek forgása megállna. Mekkora v értéke, ha a kerekek kerülete* 2,5 m, *mindegyik keréknek* 36 *küllője van, és a film másodpercenként* 24 *filmkockából áll?*

(*4 pont*)

Megoldás. A kerék forgását a szemünk a megfigyelhető küllők mozgása alapján képes érzékelni, vagyis annak megfelelően tudatosul bennünk a forgás iránya, hogy merre látjuk elfordulni a küllőket. A filmben a küllőket nem minden időpillanatban, hanem csak az egymást követő képkockákon látjuk. Ha a kerék két képkockája közötti $\frac{1}{24}$ s (kb. 0,0417 s) alatt éppen annyit fordul el, hogy a küllők a korábbi képkockához képest az előttük lévő helyére érjenek, akkor nem látunk különbséget a képkockák között, és úgy fog tűnni, mintha a kerék nem is forogna. A kerék sebességét kiszámolhatjuk abból, hogy mennyi utat kell megtennie egységnyi idő alatt ($v = s/t$).

A 36 küllő 36 részre osztja a kerék kerületét, ami azt jelenti, hogy amíg az egyik küllő elfoglalja az előtte lévő helyét, a 2,5 m hosszú kerület $\frac{1}{36}$ részét, azaz 0,0694 m-t kell megtennie a keréknek. Ezt az utat elosztva a megtételéhez szükséges idővel megkapjuk a kerékpár sebességét:

$$v = \frac{0{,}0694\ \mathrm{m}}{0{,}0416\ \mathrm{s}} = 1{,}67\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Sághy Áron Tádé (Miskolc, Herman Ottó Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A megoldás során feltételeztük, hogy a biciklikerék küllői sugár irányúak. Ez a valóságban nem pontosan teljesül, a küllők kicsit „ferdén”, egymást keresztezve helyezkednek el. Ha ez nem így lenne, akkor a küllők nem (vagy csak a tengely és az abroncs egymáshoz viszonyított eltekeredése után) lennének képesek a meghajtott kerék tengelyére ható forgatónyomatékot az abroncsnak „átadni”.

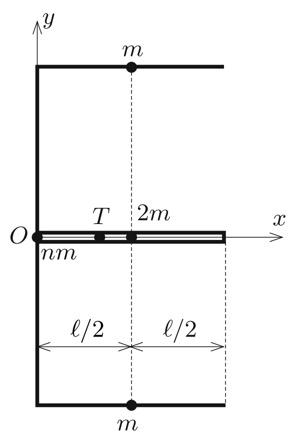
2. A film képkockái $\frac{1}{24}$ másodpercenként követik egymást, a filmet mégsem felvillanások sorozatának, hanem folytonosnak érzékeljük. Ezt az teszi lehetővé, hogy az agyunk ún. tudattalan része kitölti a hiányzó időközöket. Ha két kép között a kerék kevesebbet fordul el, mint a szomszédos küllők közötti szög fele, akkor a valódi („jó irányú”) mozgást érzékeljük. Ha az elfordulás ennél nagyobb, akkor az agyunk tudattalan működése úgy egészíti ki a hiányzó részeket, mintha a következő küllő fordult volna el a „rossz irányba” (vagyis visszafelé). Ennek feltehetően az az oka, hogy ilyen „értelmezésben” kisebb a szögelfordulás, és az agyunk ezt tartja valószínűbbnek.

(G. P.)

78 dolgozat érkezett. Helyes 65 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 9, hibás 1 dolgozat.

P. 5155. *Egy $(n+4)\ell$ hosszúságú, vékony huzalból olyan tengelyesen szimmetrikus* E *betűt hajlítottunk, amelynek vízszintes szárai ℓ hosszúságúak, függőleges szára pedig $n\ell$ hosszúságú. Hol van az alakzat tömegközéppontja?*

(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest



Megoldás. Legyen a huzal ℓ hosszúságú darabjának tömege m. Az E betű felső (vízszintes) szárának tömege m, a középső száré $2m$, az alsó száré m, a függőleges szárának tömege pedig nm. A vízszintes szárak tömegközéppontjai a vizszintes szárak felezőpontjában, a függőleges szár tömegközéppontja a függőleges szár felezőpontjában helyezkedik el. Helyezzük a koordináta-rendszer origóját a függőleges szár tömegközéppontjába.

A pontrendszer T tömegközéppontjába mutató vektort általános esetben az

$$\boldsymbol{r}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}$$

összefüggés adja meg.

Esetünkben

$$T_x=\frac{nm\cdot 0+m\cdot\frac{\ell}{2}+2m\cdot\frac{\ell}{2}+m\cdot\frac{\ell}{2}}{(n+4)m}=\frac{2\ell}{n+4},$$

$$T_y = \frac{nm\cdot 0 + m\cdot \ell + 2m\cdot 0 + m\cdot(-\ell)}{(n+4)m} = 0.$$

A tömegközéppont tehát az

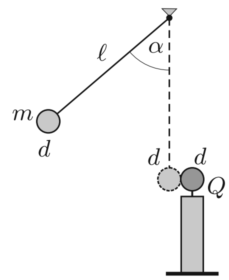
$$\boldsymbol{r} = \left(\frac{2\ell}{n+4}, 0\right)$$

helyvektorú pontban, vagyis a középső szár mentén, annak bal szélétől $\frac{2}{n+4}\ell$ távolságban található.

Dékány Csaba (Győr, Révai M. Gimn., 10. évf.)

77 dolgozat érkezett. Helyes 47 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 12, hibás 10, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5160. *Rögzített szigetelőállvány tetejére erősített kicsiny,* $d = 2$ cm *átmérőjű fémgömb töltése* $Q = 8\cdot 10^{-9}$ C. *Vékony,* $\ell = 1$ m *hosszú, az* ábra *szerint felfüggesztett szigetelőszál végére erősített ugyanakkora semleges fémgömb tömege* $m = 1$ g. *A fonalat* $\alpha = 60^\circ$*-ig kitérítjük, majd elengedjük. A két gömb centrálisan, abszolút rugalmasan ütközik. Az ütközés során az elektromos mező energiája nem változik, energiadisszipáció nincsen.*



A kiindulási helyzeténél mennyivel kerül magasabbra a fonálinga kis gömbje, ha a légellenállás is elhanyagolható?

(Lásd még a kapacitásokról szóló cikket lapunk 2019. évi szeptemberi számának 425. oldalán.)

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. Amikor az $R = d/2$ sugarú, Q_1 és Q_2 töltésű fémgömbök a méretüknél sokkal nagyobb távolságra vannak egymástól, akkor a rendszer elektrosztatikus energiája jó közelítéssel

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{1}{2}\,\frac{Q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

módon adható meg. (A közelítés annak felel meg, hogy elhanyagoljuk a fémgömbök egymásra kifejtett hatását, az elektromos megosztást.)

Kezdetben a szigetelőszálhoz erősített gömb töltése $Q_1 = 0$, a szigetelőállványhoz rögzített fémgömb töltése pedig $Q_2 = 8\cdot 10^{-9}$ C. Az ütközés után mindkét gömb töltése $Q_{1;2} = 4\cdot 10^{-9}$ C, hiszen az ütközés rövid ideje alatt a töltések kiegyenlítődnek, és a szimmetria miatt fele-fele arányban kerülnek a két fémgömbre. Mivel az ütközés során az elektromos mező energiája nem változik (és mechanikai energiaveszteség sincsen), a kezdeti és a végső elektrosztatikus energia különbsége meg fog egyezni a helyzeti energia megváltozásával:

$$\Delta E_{\rm h} = mg\Delta h = W_1 - W_2 = \frac{Q^2 - 2\cdot\left(\frac{Q}{2}\right)^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}.$$

Ebből már kiszámíthatjuk, hogy a kiindulási helyzeténél mennyivel kerül magasabbra a fonálon lengő gömb, amikor újra megáll:

$$\Delta h = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 Rmg} = \frac{(8\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C})^2}{16\pi\cdot\left(8{,}854\cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right)\cdot(10^{-2}\ \mathrm{m})\cdot(10^{-3}\ \mathrm{kg})\cdot\left(9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)} \approx$$

$$\approx 0{,}0015\ \mathrm{m} = 1{,}5\ \mathrm{mm}.$$

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A két fémgömb közötti elektrosztatikus kölcsönhatás csak akkor hanyagolható el, amikor a gömbök elegendően távol vannak egymástól. Amikor közelednek egymáshoz, majd összeérnek, az erőteljes elektromos megosztás miatt csak bonyolultan kiszámolható erő lép fel közöttük. Ezen erő munkája miatt a fémgömb sebessége (mozgási energiája) bonyolult módon változik, és módosítja az ütközés sebességét. Szerencsére ezt a számítást nem kell elvégeznünk, ha nem az ütközés sebességét, hanem csak a kiindulási és az ismételt megálláshoz tartozó magasságot akarjuk összehasonlítani. Azt az állítást, hogy az ütközéskor bekövetkező hirtelen töltésátrendeződés nem vezet energiaveszteséghez, a hivatkozott cikk alapján lehet belátni, de a feladatban feltett kérdés enélkül is megválaszolható.

17 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 13 dolgozat.

P. 5161. *Homogén,* $\boldsymbol{B}$ *indukcióvektorú, erős mágneses térbe* R *sugarú, igen hosszú, töltetlen fémhengert helyezünk. A henger tengelyét az indukcióvektorral párhuzamosan rögzítjük, majd akörül* ω *szögsebességgel forgatni kezdjük. Mekkora felületi töltéssűrűség alakul ki a henger palástján?*

(*5 pont*) Közli: *Németh Róbert,* Budapest

Megoldás. Először adjuk meg a jelenség kvalitatív leírását, a hengerpalást feltöltődésének magyarázatát!

A fémben a $q=-e<0$ töltésű elektronok szabadon el tudnak mozdulni a fém kristályrácsához képest. Az elektronok nagyon hamar a fém pozitív töltésű kristályrácsával együtt fognak mozogni, de a rájuk ható mágneses erő hatására sugárirányban (kifelé vagy befelé) elmozdulhatnak, és ténylegesen el is mozdulnak. Ha a forgás iránya (mondjuk) olyan, hogy a $\boldsymbol{B}$ vektor a balkéz-szabálynak megfelelő irányba mutat, akkor a mágneses Lorentz-erő sugárirányban *kifelé* húzza az elektronokat. Emiatt a henger felületén negatív töltések halmozódnak fel, miközben a henger belső része pozitívvá válik. A töltésszétválás miatt kialakul egy olyan $\boldsymbol{E}(r)$ elektromos tér, amelyik sugárirányban kifelé mutat, tehát a henger tengelye felé húzza az elektronokat.

A sugárirányú töltésvándorlás mindaddig tart, amíg az eletromos erő nagysága el nem éri a mágneses erő nagyságát, sőt, egy kicsit túl is lépi azt, hiszem az eredő elektromágneses erőnek a körmozgást végző elektronok centripetális gyorsulást is biztosítania kell. Célunk a felületi töltéssűrűség (vagyis a hengerpalást egységnyi felületű darabjára „kiülő” töltés) nagyságának meghatározása.

A mágneses erő nagysága a henger palástjának közvetlen közelében (de még a fém belsejében): $F = |e|\omega RB$, az elektromos erő nagysága pedig $|e|E(R)$. Az m tömegű elektronok mozgásegyenlete:

$$|e|E(R) - |e|\omega RB = mR\omega^2,$$

ahonnan az elektromos térerősség a hengerpalást közvetlen közelében:

$$E(R) = \omega RB + \frac{m}{|e|}R\omega^2.$$

(A jobb oldal második tagja minden reális esetben *sok nagyságrenddel* kisebb az első tagnál, emiatt a továbbiakban az m-mel arányos kifejezést elhanyagoljuk.)

A fémhenger egésze elektromosan semleges, tehát a hengerpaláston kívül az elektromos térerősség *nulla*. A henger palástjának egy kicsiny, A felületű darabkájába a henger belsejéből $\Psi = AE(R)$ elektromos fluxus (ilyen számú elektromos erővonal) lép be, a külső oldalon pedig semennyi fluxus nem lép ki. A felület tehát az elektromos tér „nyelője", vagyis negatív töltéseket tartalmaz. A Gauss-törvény szerint ez a töltés:

$$Q = -\varepsilon_0\,\Psi = -\varepsilon_0 AE(R) = -\varepsilon_0\omega RB\,A,$$

vagyis a keresett felületi töltéssűrűség:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = -\varepsilon_0\omega RB.$$

Mindez akkor igaz, ha a forgásirány a mágneses indukcióhoz viszonyítva „balmenetes", vagyis a balkéz-szabálynak tesz eleget. Ellentétes forgásirány esetén a negatív töltések a henger tengelye felé mozdulnak el, és emiatt a felületi töltéssűrűség $+\varepsilon_0\omega RB$ lesz.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata felhasználásával

12 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Fonyi Máté Sándor és Kozák Áron megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 4, hibás 3 dolgozat.

P. 5164. *Ugyanannyi idő alatt egy fonálinga* 5*, egy másik* 10 *kis amplitúdójú lengést végez. Milyen hosszúak az ingák, ha az egyik inga* 120 cm*-rel hosszabb a másiknál?*

(*3 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. Mivel a lengések amplitúdója kicsi, az ingák periódusideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Legyen a rövidebb fonál hossza ℓ_1, a hosszabb ingáé pedig $\ell_2 = \ell_1 + 120$ cm. A hosszabb inga lengésideje lesz a nagyobb, a periódusidők aránya

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{T_0}{10}}{\frac{T_0}{5}} = \frac{1}{2}.$$

(T_0 az 5, illetve 10 lengés időtartama.) Ezek szerint

$$\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1+120\text{ cm}}{g}}}=\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_1+120\text{ cm}}}=\frac{1}{2},$$

ahonnan

$$\frac{\ell_1}{\ell_1+120\text{ cm}}=\frac{1}{4},$$

vagyis

$$4\ell_1=\ell_1+120\text{ cm}\qquad\Longrightarrow\qquad\ell_1=40\text{ cm}$$

következik. Az ingák hossza tehát $\ell_1=40$ cm és $\ell_2=160$ cm.

Takács Dóra (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

40 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 8, hibás 2 dolgozat.

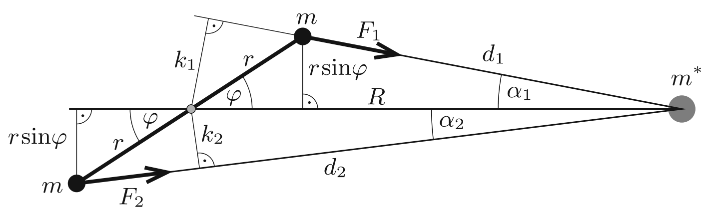
P. 5166. *Egy Eötvös-inga* $2r=40$ cm*-es rúdjának végeire egy-egy* $m=30$ g *tömegű, kicsiny testet erősítünk. A rendkívül könnyű rúd egy hajszálvékony fémszálon függ, vízszintes helyzetben. Középétől mérve* $R=3$ m *távolságban, vele azonos magasságban egy* $m^*=100$ kg *tömegű ólomgolyót helyeztek el.*

a) Mekkora forgatónyomatékot gyakorol az ólomgolyó az ingára, amikor a golyót és az ingarúd közepét összekötő egyenes φ *szöget zár be a rúd irányával?*

b) Ábrázoljuk a forgatónyomatékot φ *függvényében! Mekkora szögnél lesz maximális a forgatónyomaték?*

(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

Megoldás. *a*) Jelölje az ólomgolyóhoz közelebbi testre vonatkozó mennyiségeket 1-es, a távolabbi test jellemzőit pedig 2-es index, a feladat szövegében szereplő φ pedig legyen az *1. ábrán* látható szög ($0\leqslant\varphi\leqslant 90°$).



1. ábra

Az m^* tömegű golyó középpontjának az egyes tömegektől mért távolsága a koszinusztételből számolható ki:

$$d_1=\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\varphi},$$

$$d_2=\sqrt{R^2+r^2+2rR\cos\varphi}.$$

A forgatónyomatékot a gravitációs erő hozza létre, amelynek iránya m^* felé mutat, nagysága:

$$F_{1,2} = \gamma \frac{mm*}{d_{1,2}^2}.$$

Az ólomgolyótól nézve a testek (a rúd középpontjának irányától mérve) akkora α_1 és α_2 szög alatt látszanak, melyekre – a szinusztétel alapján – teljesül:

$$\sin\alpha_{1,2} = \frac{r}{d_{1,2}}\sin\varphi,$$

és a megfelelő erőkarok:

$$k_{1,2} = R\sin\alpha_{1,2} = \frac{Rr}{d_{1,2}}\sin\varphi.$$

A forgatónyomatékok ellentétes irányúak, de nem egyforma nagyságúak, emiatt nem „oltják ki" egymást. Az eredő forgatónyomaték nagysága:

$$M(\varphi) = F_1k_1 - F_2k_2 = \gamma\frac{mm^*}{d_1^2}\cdot\frac{rR}{d_1}\sin\varphi - \gamma\frac{mm*}{d_2^2}\cdot\frac{rR}{d_2}\sin\varphi =$$

$$= \gamma\, mm^* rR\cdot\sin\varphi\left(\frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3}\right).$$

Tehát a forgatónyomaték φ szögtől való függése:

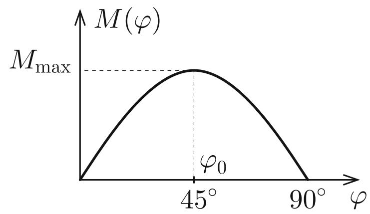
$$M(\varphi) = \gamma\, mm^* rR\cdot\sin\varphi\Big((R^2+r^2-2rR\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}} - (R^2+r^2+2rR\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}\Big),$$

ami a megadott tömegek és távolságok behelyettesítése után

$$M(\varphi) = 1{,}20\cdot 10^{-10}\ \sin\varphi\Big((9{,}04-1{,}2\cdot\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}} - (9{,}04+1{,}2\cdot\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}\Big)\ \mathrm{Nm}.$$

b) A kapott függvényt ábrázolhatjuk pl. a *GeoGebra* segítségével (*2. ábra*), és leolvashatjuk, hogy a legnagyobb forgatónyomaték $\varphi = 44{,}7° \approx 45°$-nál lép fel, és a nagysága $M_{\max} = 8{,}9\cdot 10^{-13}$ Nm.

A forgatónyomaték iránya olyan, hogy a rudat a $\varphi = 0$ helyzetbe igyekszik beforgatni.



2. ábra

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

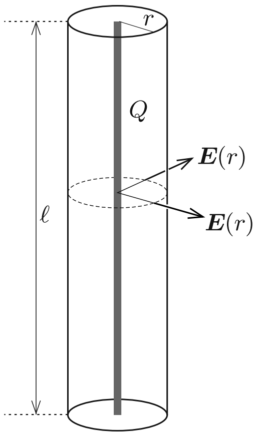
17 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 6, hiányos (2–3 pont) 3 dolgozat.

P. 5170. *Dörzsöléssel feltöltött, egyforma szívószálak vízszintes síkban, egymással párhuzamosan úgy helyezkednek el, hogy a végeiket összekötő egyenesek merőlegesek a szívószálakra. Feltételezhetjük, hogy a töltések eloszlása a szálakon egyenletes, és mindegyik szívószálnak ugyanakkora a töltése. A két szélső szál rögzített, egymástól való távolságuk jóval kisebb, mint egy szívószál hossza. Közöttük még néhány olyan szívószál helyezkedik el, amelyek szabadon elmozdulhatnak. Hogyan helyezkednek el ezek a szabadon mozgó szálak, ha számuk*

a) kettő;

b) három?

(*5 pont*) Közli: *Márki-Zay János,* Hódmezővásárhely



1. ábra

Megoldás. Egy ℓ hosszúságú, Q nagyságú töltéssel egyenletesen feltöltött szívószál elektromos tere a Gauss-törvény alapján határozható meg (*1. ábra*). A szálat szimmetrikusan körülvevő, $2\pi r\ell$ felszínű hengerpaláston $\Phi = E(r)\cdot 2\pi r\ell$ elektromos fluxus „halad át”, és ez a hengerben lévő Q töltéssel arányos:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

vagyis

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\ell\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} = K\cdot\frac{1}{r}.$$

Mivel a szívószálak hosszúsága is, és a töltésük is ugyanakkora, a K tényező is ugyanakkora az összes szálra.

a) Jelöljük a szívószálak távolságát a *2. ábrán* látható módon. (Kihasználtuk, hogy a szálak töltése is, és a hossza is ugyanakkora, emiatt az egyensúlyi állapot tükörszimmetrikus.)

A belső szálak egyensúlyának feltétele:

$$\sum QE = \frac{KQ}{a} - \frac{KQ}{b} - \frac{KQ}{a+b} = 0,$$

ahonnan

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b},$$

vagyis

$$a^2 + ab - b^2 = 0,$$

és ebből a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$$

másodfokú egyenlet következik. Ennek pozitív megoldása:

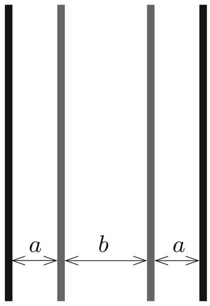
$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618.$$

Megjegyzés. Érdekes, hogy ez az arány a híres aranymetszés arányszáma.

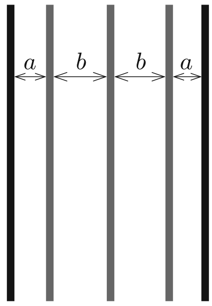
Az elmozdítható szívószálak tehát

$$\frac{a}{2a+b}:\frac{b}{2a+b}:\frac{a}{2a+b}\approx 0{,}28:0{,}45:0{,}28$$

arányban osztják fel a rögzített szálak közötti távolságot.



2. ábra



3. ábra

b) A fentiekhez hasonló módon járhatunk el a 3 mozgatható szívószál esetében is (*3. ábra*).

Az erőegyensúly feltétele:

$$\sum QE=\frac{KQ}{a}-\frac{KQ}{b}-\frac{KQ}{2b}-\frac{KQ}{a+2b}=0,$$

amiből a

$$4\left(\frac{b}{a}\right)^2-6\left(\frac{b}{a}\right)-3=0$$

másodfokú egyenlet kapjuk. Ennek pozitív gyöke:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{21}+3}{4}\approx 1{,}896.$$

A távolságok aránya ebben az esetben

$$\frac{a}{2a+2b}:\frac{b}{2a+2b}:\frac{b}{2a+2b}:\frac{a}{2a+2b}\approx 0{,}17:0{,}33:0{,}33:0{,}17.$$

Viczián Anna (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

14 dolgozat érkezett. Helyes Békési Ábel, Takács Árpád és Viczián Anna megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 5, hibás 1 dolgozat.

P. 5172. *Fényes evőkanalat tartunk* 25 cm*-re a szemünktől úgy, hogy a kanál szára függőleges. A kanál homorú felét nézve a fejünk fordított állású képét látjuk, míg a domború felét nézve a kép egyenes állású. Melyik képen látjuk a fejünk magasságát (függőleges méretét) nagyobbnak, és ez a kép hányszor nagyobb látószögben látszik a másiknál? A kanál függőleges metszetének görbületi sugara* 5 cm.

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. A kanál homorú oldala (függőleges irányban) $f_1 = 2{,}5$ cm fókusztávolságú homorú tükörnek tekinthető, amely a $t = 25$ cm távol lévő fejünkről az

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k_1} = \frac{1}{f_1}$$

törvény szerint

$$k_1 = \frac{tf_1}{t - f_1} = \frac{25}{9}\ \mathrm{cm} \approx 2{,}8\ \mathrm{cm}$$

távolságban alkot valódi képet. Ez a kép a kanál előtt, a szemünktől

$$d_1 = t - k_1 = 22{,}2\ \mathrm{cm}$$

távolságban jön létre.

A kanál domború oldalát nézve egy $f_2 = -2{,}5$ cm fókusztávolságú domború tükör által alkotott látszólagos képet észlelünk. Ez a kép a kanál mögött

$$|k_2| = \left|\frac{tf_2}{t - f_2}\right| = \frac{25}{11}\ \mathrm{cm} \approx 2{,}3\ \mathrm{cm}$$

távolságban, tehát a szemünktől $d_2 = t + |k_2| = 27{,}3$ cm-re jön létre.

Mivel a kanáltól mért képtávolság a homorú oldalnál nagyobb, mint a domborúnál, és a tárgytávolság mindkét esetben ugyanakkora, a homorú oldal esetében nagyobb a „lineáris nagyítás”:

$$N_1 = \frac{k_1}{t} > \frac{k_2}{t} = N_2.$$

A nagyítások aránya:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{11}{9} \approx 1{,}22.$$

A szemünk által érzékelt szögnagyítások aránya még ennél is nagyobb, hiszen a homorú oldal által alkotott (nagyobb méretű) kép közelebb van a szemünkhöz, mint a domború oldal által létrehozott kisebb és távolabbi kép.

Az arcunknak egy kicsiny, mondjuk 1 cm-es darabját a kanál homorú részében $N_1 \cdot 1\ \mathrm{cm} = 0{,}111$ cm nagynak látjuk, és mivel a kép 22,8 cm távol van a szemünktől, a látószögre

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{0{,}111}{22{,}2} = 0{,}005, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha_1 = 0{,}286^\circ$$

adódik.

A domború oldalt nézve a kép nagysága $N_2 \cdot 1$ cm = 0,091 cm, és mivel a kép 27,3 cm távol van a szemünktől, a látószög

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{0{,}091}{27{,}3} = 0{,}191^\circ.$$

A látószögek aránya:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1{,}5.$$

Ha a fejünknek nem 1 cm-es, hanem nagyobb részét nézzük, vagyis a „tárgy” méretét megnöveljük, a képek mérete is – bizonyos határig – arányosan nagyobb lesz, de a látószögek és azok aránya nem változik. A fejünk egésze azonban 25 cm-ről nézve már túl nagy ahhoz, hogy az alkalmazott „paraxiális” közelítést elég pontosnak tekinthessük, így a látószögekre kapott 3 : 2 arány már elég pontatlanul teljesül.

Ludányi Levente (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 11. évf.) és
Tanner Norman (Bonyhádi Petőfi S. Ev. Gimn. és Koll., 11. évf.)
dolgozata alapján

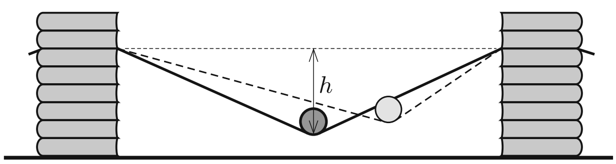
10 dolgozat érkezett. Helyes Ludányi Levente és Tanner Norman megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (2 pont) 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

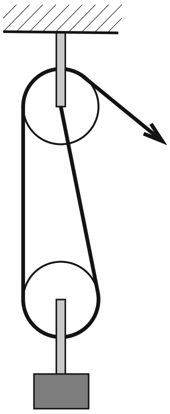
M. 394. Készítsünk vékony papírból kb. 80 cm hosszú papírcsíkot, végeit azonos magasságban rögzítsük eltolható állványokon, majd helyezzünk a közepére egy kis méretű, körhenger alakú konzervdobozt, amely valamilyen mértékben lehúzza a papírcsík közepét. Ezután térítsük ki a konzervdobozt mindig ugyanakkora (kb. 20 cm) mértékben, és kezdősebesség nélkül engedjük szabadon gördülni. Mérjük meg a létrejövő (csillapodó) periodikus mozgás periódusidejét a h belógás függvényében

a) teli doboz esetén;

b) teljesen üres doboz esetén.



(*6 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



G. 701. Mekkora az *ábrán* látható két csiga fordulatszámának aránya, ha a sugaruk megegyezik? (A csigák közötti köteldarabok függőlegesnek tekinthetők.)

(*3 pont*)

G. 702. Egy függőleges síkú vastáblához 80 g tömegű mágneskorong tapad. A lapos korongot 2 N erővel tudjuk függőlegesen lefelé csúsztatni. Mekkora erő szükséges a korong felfelé csúsztatásához? Mekkora és milyen irányú erővel tudjuk a korongot vízszintesen mozgatni a táblán? (Az általunk kifejtett erő mindhárom esetben párhuzamos a tábla síkjával.)

(*4 pont*)

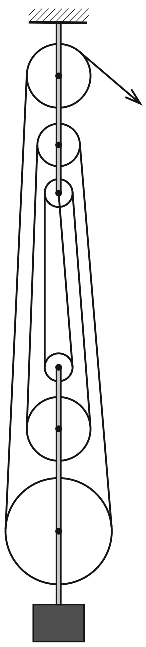
G. 703. Hogyan határozhatjuk meg egy tartós elem belső ellenállását egy (ideálisnak tekinthető) digitális feszültségmérő és egy ismert ohmos ellenállás (valamint röpzsinórok) segítségével?

(*3 pont*)

G. 704. Ha a Torricelli-kísérletet a tengerszinten végezzük el, akkor az üvegcsőben 76 cm magasra emelkedik a higany. Egy igen magas hegyen azonban csak 40 cm-es higanyoszlop-magasságot mérünk. Milyen magas lehet a hegy?

(*3 pont*)

P. 5208. Egy 0,6 kg tömegű kosárlabda 1,05 m-ről elengedve 0,57 m-re pattan vissza.



a) Mennyi a mechanikai energiaveszteség a padlóval való ütközés miatt?

b) Mekkora a visszapattanás és a földet érés sebességének aránya? (Ezt az arányszámot ütközési számnak nevezik.)

c) Az energiaveszteség kompenzálására a játékosok a labdát pattogtatni szokták, azaz rövid ideig lefelé nyomják. Tegyük fel, hogy a játékos a labdát 1,05 m-ről indítva 0,08 m hosszon nyomja lefelé. Mekkora átlagos erőt fejt ki a játékos a labdára, ha az most újra 1,05 m-re pattan vissza?

(*4 pont*) *Tornyai Sándor fizikaverseny,* Hódmezővásárhely

P. 5209. Az *ábrán* látható csigasorban a legfelső állócsiga 15 cm, a legalsó mozgócsiga pedig 25 cm sugarú. A mozgócsigák mindegyike 15-öt fordul percenként, és az állócsigák fordulatszáma is megegyezik egymással. (A csigák közötti köteldarabok függőlegesnek tekinthetők.)

a) Mekkora a többi csiga sugara?

b) Mekkora az állócsigák fordulatszáma?

(*4 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

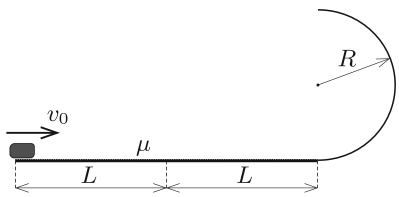
P. 5210. Az Apollo 11 legénysége (Neil Armstrong, Edwin Aldrin és Michael Collins) 1969. július 16-án emelkedett a magasba a Kennedy Űrközpontból, és hajtotta végre az első emberes Holdra szállást.

a) A kilövéshez Saturn V óriásrakétát használtak, amelynek tolóereje 34 000 kN. Az óriásrakéta és az űrhajó tömege néhány másodperccel a kilövés után 2,8 millió kg volt. Mekkora gyorsulással emelkedett az űrhajó ekkor?

b) Az űrhajó július 16-án 16:22-kor hagyta el a Föld körüli pályáját, és kb. 380 000 km megtétele után július 19-én 17:21-kor állt Hold körüli pályára. Körülbelül hány km/h-s átlagsebességgel haladt a Föld és a Hold között?

(*4 pont*) *Tarján Imre emlékverseny* (Szolnok) feladata nyomán

P. 5211. Mekkora kezdősebességgel kell meglökni a $2L$ hosszúságú, vízszintes pálya elején álló kis testet, hogy a vízszintes pálya végén lévő R sugarú, függőleges félkör alakú pályán végigcsúszva a vízszintes szakasz felezőpontjába csapódjon be?



A vízszintes pályán a súrlódási együttható μ, a félkör alakú pálya súrlódásmentes.

Adatok: $L = 2$ m; $R = 0{,}5$ m; $\mu = 0{,}4$.

(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

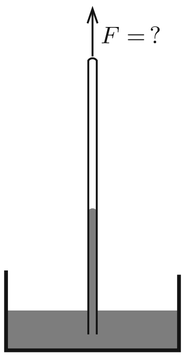
P. 5212. Egy asztallap fölött h magasságban felfüggesztett $\ell > h$ hosszúságú fonálingát vízszintes helyzetből kezdősebesség nélkül elengedünk. A fonál végén lévő golyó az asztalon n-szer pattan úgy, hogy az utolsó pattanáskor a fonál éppen megfeszül, és az inga továbblendül. Adjuk meg h és ℓ arányát!

(Az ütközések tökéletesen rugalmasak, a légellenállás elhanyagolható, és a meglazult fonál nem akadályozza a golyó mozgását.)

(*4 pont*) Közli: *Orbay Péter,* Sopron

P. 5213. Egy tartályban 30%-os relatív páratartalmú levegő van. Állandó hőmérsékleten összenyomva legfeljebb hányszorosára növelhetjük a nyomást a tartályban, ha el akarjuk kerülni a víz kicsapódását?

(*4 pont*) *Példatári feladat*



P. 5214. Ha a Torricelli-kísérletet a tengerszinten végezzük el, akkor az üvegcsőben 76 cm magasra emelkedik a higany. Egy igen magas hegyen azonban csak 40 cm-es higanyoszlop-magasságot mérünk. Mekkora függőleges erővel kell tartanunk az üvegcsövet a magas hegyen?

A cső belső átmérője 1 cm, teljes hossza 110 cm, ebből 10 cm merül a higanyba. A cső centiméterenként 1 g, fedőlapja pedig 5 g tömegű. (Az üveg sűrűsége 2,6 g/cm^3.)

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5215. Egy raktárépület alapja négyzet, falai 40 cm vastag téglából készültek. A falfelület $\frac{3}{4}$ részét 10 cm vastag, $\frac{1}{4}$ részét részét pedig 20 cm vastag hőszigetelő réteggel borították. A tégla hővezetési tényezője 10-szer nagyobb, mint a hőszigetelő anyagé. Ha a ház falát mindenhol ugyanolyan, d vastagságú hőszigetelő réteggel borították volna, akkor a hőterjedés szempontjából a két elrendezés ugyanúgy viselkedne. Mekkora d értéke?

(*4 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

P. 5216. Egy függőlegesen álló hengeres tartályban egy súlyos dugattyú alatt n mol, T_0 hőmérsékletű levegő van. A tartály és a dugattyú jó hőszigetelő, kívül vákuum van. A dugattyút lassan emelni kezdjük, majd amikor már W munkát végeztünk, hirtelen elengedjük. A dugattyú lengésbe jön, és idővel (a levegő belső súrlódása miatt) megáll.

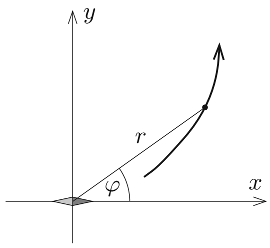
Mekkora lesz a levegő hőmérséklete az új egyensúlyi helyzetben? Hogyan változik az eredmény, ha a dugattyút nem emeljük, hanem W munkavégzéssel lenyomjuk, majd hirtelen elengedjük?

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

P. 5217. A radioaktív ^{14}C izotóp a kozmikus sugárzás hatására folyamatosan keletkezik a légkörben. Ennek ellenére a mennyisége állandónak tekinthető a bolygónkon, mert 5-9 km-es magasságban a $\mathrm{n} + {}^{14}\mathrm{N} \to {}^{14}\mathrm{C} + \mathrm{p}$ átalakulás eredményeként – a földfelszínre vetítve – négyzetméterenként átlagosan 17 600 ilyen atom jön létre minden másodpercben. Az izotóp felezési ideje 5730 év.

Becsüljük meg, hogy hány tonnányi ^{14}C található a Földön!

(*4 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves



P. 5218. A derékszögű koordináta-rendszer origójában elhelyezett kicsiny, „pontszerű” mágnestű az x tengely irányába mutat. Egyik mágneses erővonalának egyenlete $r = r_0 \sin^2\varphi$, ahol r és φ az erővonal egy-egy pontjának ún. polárkoordinátái.

a) Írjuk fel ennek az erővonalnak az egyenletét x és y koordinátákkal kifejezve, ha $r_0 = 3$ méter!

b) Az erővonalnak hol vannak olyan pontjai, ahol a mágneses indukcióvektor iránya merőleges a mágnestűre?

(*6 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Beküldési határidő: 2020. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 70. No. 3. March 2020)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 159): **K. 654.** There were 20 people at a meeting. It turned out that everyone knew exactly 13 of the other participants (acquaintance is mutual). What is the minimum possible number of acquaintances that an arbitrary pair of participants may have in common? **K. 655.** The four-digit numbers $\overline{ABCD}$, $\overline{BCBA}$, $\overline{BDAB}$ and $\overline{DDAD}$ are distinct four-digit primes (different letters denote different digits). Which numbers are they? You can use website `http://matek.com/szamok/primszamok` to check if a particular four-digit number is a prime number. **K. 656.** Given a 21 cm by 29 cm rectangular sheet of paper, how can you use it to measure a distance of *a*) exactly 3 cm, *b*) exactly 1 cm, without using anything else? (It is allowed to fold the sheet of paper.) **K. 657.** Find all multiples of 99 from 1 to 10 000 in which the sum of the digits is not divisible by 18. **K. 658.** In each of two rectangular rooms of the same floor area, the floor is covered with 25 cm × 40 cm tiles. No tile is cut. In one room, the 40-cm sides of the tiles are parallel to the longer side of the rectangle, and in the other room they are parallel to the shorter side. In one room, there are 9 fewer tiles along the longer wall than in the other room, and 6 more tiles along the shorter wall than in the other. How long are the sides of the bases of the rooms?

New exercises for practice – competition C (see page 160): **Exercises up to grade 10: C. 1595.** Find all pairs (x, y) of positive integers such that $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{1893}$. (Could have been proposed by *Zaphenath Paaneah,* Thebes, Egypt) **C. 1596.** The sides of a triangle are 5 cm, 5 cm and 6 cm long. The sides, and the tangents drawn to the incircle parallel to the sides form a hexagon. What is the area of this hexagon? **Exercises for everyone: C. 1597.** How many different right-angled triangles are there in which the measures of the sides are integers, and one side is 2^n units long? (Where n is a positive integer: express your answer in terms of n.) **C. 1598.** The length of the line segment MN joining the midpoints of sides AB and CD in a convex quadrilateral $ABCD$ is the arithmetic mean of the lengths of sides AD and BC. Show that the quadrilateral $ABCD$ is a trapezium. **C. 1599.** Solve the following equation over the set of pairs of natural numbers: $2y^2-2x^2-3xy+3x+y=13$. (Proposed by *T. Imre,* Marosvásárhely) **Exercises upwards of grade 11: C. 1600.** Solve the following equation over the set of real numbers: $4^x+9^x+36^x+\sqrt{\frac{1}{2}-2x^2}=1$. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1601.** The height of a lateral face of a right pyramid with a square base is twice as long as the base edge. At what percentage of this height (counting from the base) do we need to cut the pyramid with a plane parallel to the base so that the total area of the lateral surface plus top square of the resulting frustum is equal to half the lateral surface area of the original pyramid?

New exercises – competition B (see page 161): **B. 5086.** Solve the equation $\left(x^3-y^2\right)^2=\left(x^2-y^3\right)^2$ over the set of pairs of integers. (*4 points*) (Proposed by *M. Szalai,* Szeged) **B. 5087.** The distances of an interior point P of a square $ABCD$ from the vertices A, B, D are 1, $\sqrt{2}$, and 2, respectively. Calculate the measure of the angle APB. (*4 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 5088.** With respect to a given set G of numbers, the positive integer $k>1$ is called *interesting* if there exist k distinct elements in set G such that the arithmetic mean of these elements also belongs to set G. Let $H=\{1;3;4;9;10;\ldots\}$ be the set of those numbers that can be represented as a sum of some different powers of 3. *a*) What numbers $k>1$ are interesting with respect to the set H? *b*) Let $c\notin H$ be an arbitrary positive integer. Prove that every number $k>1$ is interesting with respect to the set $H'=H\cup\{c\}$. (*5 points*) **B. 5089.** Two skew edges of a tetrahedron are perpendicular to each other, their lengths are 12 and 13, and the distance between their lines is 14 units. Determine the volume of the tetrahedron. (*3 points*) **B. 5090.** The inscription on one side of a fair coin is $+1$, and -1 is on the other side. The coin is tossed n times in a row, and the n results are written down in a row. Then the product of every pair of consecutive items is written below them, resulting in a new list of numbers that only consists of $(n-1)$ items. The procedure is repeated until a single number remains. What is the expected value of the sum of the $\frac{n(n+1)}{2}$ numbers written down in the resulting triangular arrangement of numbers? (*3 points*) **B. 5091.** In a regular dodecagon $A_1A_2\ldots A_{12}$, let P denote the intersection of the diagonals A_1A_8 and A_6A_{11}, and let R denote the intersection of lines A_7A_8 and A_9A_{11}. Show that the line PR divides diagonal A_1A_4 in a $2:1$ ratio. (*5 points*) (Based on the idea of *B. Bíró,* Eger) **B. 5092.** The sum of the elements is calculated for each subset of the set $\{0,1,\ldots,n-1\}$. What may the value of n be if exactly one nth of the resulting 2^n sums is divisible by n? **B. 5093.** The intersection of two congruent regular pentagons is a decagon with sides of $a_1,a_2,\ldots,a_{10}$ in this order. Prove that $a_1a_3+a_3a_5+a_5a_7+a_7a_9+a_9a_1=a_2a_4+a_4a_6+a_6a_8+a_8a_{10}+a_{10}a_2$.

New problems – competition A (see page 162): **A. 772.** Each of N people chooses a random integer number between 1 and 19 (including 1 and 19, and not necessarily with the same distribution). The random numbers chosen by the people are independent from each other, and it is true that each person chooses each of the 19 numbers with probability at most 99%. They add up the N chosen numbers, and take the remainder of the sum divided by 19. Prove that the distribution of the result tends to the uniform distribution exponentially, i.e. there exists a number $0<c<1$ such that the mod 19 remainder of the sum of the N chosen numbers equals each of the mod 19 remainders with probability between $1/19-c^N$ and $1/19+c^N$. (Submitted by *Dávid Matolcsi,* Budapest) **A. 773.** Let $b\geqslant 3$ be a positive integer and let σ be a nonidentity permutation of the set $\{0,1,\ldots,b-1\}$ such that $\sigma(0)=0$. The *substitution cipher* C_σ encrypts every positive integer n by replacing each digit a in the representation of n in base b with $\sigma(a)$. Let d

be any positive integer such that b does not divide d. We say that C_σ *complies* with d if C_σ maps every multiple of d onto a multiple of d, and we say that d is *cryptic* if there is some C_σ such that C_σ complies with d. Let k be any positive integer, and let $p = 2^k + 1$. *a*) Find the greatest power of 2 that is cryptic in base $2p$, and prove that there is only one substitution cipher that complies with it. *b*) Find the greatest power of p that is cryptic in base $2p$, and prove that there is only one substitution cipher that complies with it. *c*) Suppose, furthermore, that p is a prime number. Find the greatest cryptic positive integer in base $2p$, and prove that there is only one substitution cipher that complies with it. (Submitted by *Nikolai Beluhov,* Bulgaria) **A. 774.** Let O be the circumcenter of triangle ABC, and D be an arbitrary point on the circumcircle of ABC. Let points X, Y and Z be the orthogonal projections of point D onto lines OA, OB and OC, respectively. Prove that the incenter of triangle XYZ is on the Simson-Wallace line of triangle ABC corresponding to point D. (Submitted by *Lajos Fonyó,* Keszthely)

Problems in Physics

(see page 185)

M. 394. Make an approximately 80 cm long paper strip, and fix its ends at the same height to some moveable stands. Place a small cylinder-shaped tin can on the middle of the strip such that the tin pulls down the strip a little. Then displace the tin always by the same amount (approximately 20 cm), and then release it without any initial speed, and let it roll freely. Measure the period of the (damped) periodic motion of the tin, as a function of the sag of the strip h in the case of *a*) a full tin can; *b*) an empty tin can.

G. 701. What is the ratio of the number of revolutions of the two pulleys shown in the *figure,* if their radius is the same? (The threads between the pulleys can be considered vertical.) **G. 702.** A disc-shaped permanent magnet of a mass of 80 g clings to a vertical iron sheet. The flat disc can be slid vertically downwards by applying a force of 2 N. With what force can the magnet be moved upwards? What is the magnitude and the direction of the force which should be applied in order to move the disc horizontally? (The applied force is parallel to the plane of the sheet in all cases.) **G. 703.** How can we determine the internal resistance of a durable battery by using a digital voltmeter (which can be considered ideal) and a resistor of known resistance? (Wires can also be used.) **G. 704.** When Torricelli's experiment is carried out at sea level, then the mercury column is 76 cm high. However, on a very high hill the height of the mercury is only 40 cm. How high is the hill?

P. 5208. A basketball of mass 0.6 kg bounces to a height of 0.57 m when it is dropped form a height of 1.05 m. *a*) What is the mechanical energy loss due to the collision with the ground? *b*) What is the ratio of the speed at which the basketball bounced back to the speed of the ball when it reached the ground? (This ratio is called the coefficient of restitution.) *c*) In order to compensate the energy loss, players usually dribble the basketball, during which they push the ball downwards for a short while. Suppose a player pushes the ball along a distance of 0.08 m, starting it at a height of 1.05 m. What is the average force exerted by the player if the ball bounces back to a height of 1.05 m? **P. 5209.** In the pulley system shown in the *figure* the fixed pulley at the top has a radius of 15 cm, whilst the radius of the moveable pulley at the bottom is 25 cm. Each of the moveable pulleys turns 15 whole revolutions in a minute, and the rotational speeds of the fixed pulleys are also equal. (The threads between the pulleys can be considered vertical.) *a*) What is the radius of each of the other pulleys? *b*) What is the number of revolutions of the fixed pulleys? **P. 5210.** The crew of the spacecraft Apollo 11 (Neil Armstrong, Edwin Aldrin és Michael Collins) performed the first landing on the Moon. The spacecraft was launched from the Kennedy Space Center on July 16, 1969. *a*) Apollo 11 was launched by a Saturn V rocket, which had a thrust of 34 000 kN. The total mass of the spacecraft and the rocket after a few seconds of the launch was 2.8 millions of kilograms. What was the acceleration of the spacecraft at that time? *b*) The spacecraft left the Earth orbit on July 16 at 16:22, and after travelling around 380 000 km, it entered lunar orbit on July 19 at 17:21. What was the approximate average speed of the spacecraft while it travelled from the Earth to the Moon? **P. 5211.** At what speed should a small object, being at rest at the starting point of a horizontal straight track of length $2L$, be pushed in order that after sliding along the vertical semicircular path of radius R at the end of the straight track it hit the midpoint of the horizontal track? The coefficient of kinetic friction along the horizontal track is μ, the circular track is frictionless. *Data:* $L=2$ m; $R=0.5$ m; $\mu=0.4$. **P. 5212.** There is a simple pendulum suspended above a horizontal tabletop at a height of h. The bob of the simple pendulum of length $\ell>h$ is released without initial speed from the position at which the thread is horizontal. The bob at the end of the thread bounces on the table n times such that at the last bounce the thread just gets tight, and the pendulum swings forward. Determine the ratio of h to ℓ. (The collisions are totally elastic, air resistance is negligible and the thread does not disturb the motion of the bob.) **P. 5213.** There is a sample of air, having a relative humidity of 30%, in a container. By what factor can the pressure of the air be increased, when the gas is compressed at constant temperature, if the condensation of water should be avoided. **P. 5214.** When Torricelli's experiment is carried out at sea level, then the mercury column is 76 cm high. However, on a very high hill the height of the mercury is only 40 cm. What is the magnitude of the vertically upward force that we have to apply in order to hold the tube at rest on the high mountain? The inner diameter of the tube is 1 cm, its total length is 110 cm, from which 10 cm is immersed into the mercury. The mass of a 1 cm-long part of the tube is 1 g, and the mass of its cover at its top is 5 g. (The density of glass is 2.6 g/cm^3.) **P. 5215.** The base of a warehouse is a square, and its walls are built from bricks of width 40 cm. $\frac{3}{4}$ of the surface of the wall is covered with 10 cm-thick heat insulating material, whilst $\frac{1}{4}$ of the surface of the wall is covered with 20 cm-thick heat insulating material. The thermal conductivity of brick is ten times as big as that of the heat insulating material. If the walls of the warehouse were covered uniformly with a layer of insulating material of thickness d, the two types of insulation would result in the same effect in terms of heat propagation. What is the value of d? **P. 5216.** In a vertical cylinder, below a heavy piston, there is a sample of air of quantity of n moles at a temperature of T_0. The container and the piston are well insulated and there is vacuum outside. The piston is slowly raised, and when a work of W was done, the piston is released. The piston begins to swing, but after a while it stops (because of the internal friction of the air). What will the temperature of the air at the new equilibrium position be? How does this result change if the piston is not raised, but pushed down, while W work is done, and then it is suddenly released? **P. 5217.** The radioactive carbon-14 isotope is constantly produced in the atmosphere by the cosmic rays. Nonetheless, the amount of ^{14}C on the Earth is constant, because at a height of 5-9 km, as a result of the reaction $\mathrm{n}+{}^{14}\mathrm{N}\ \rightarrow\ {}^{14}\mathrm{C}+\mathrm{p}$, an average of 17 600 ^{14}C isotopes are produced in each second on each square metre – projected to the surface of the Earth. The half-life of the isotope is 5730 years. Estimate how many tons of ^{14}C are present on the Earth. **P. 5218.** At the origin of a Cartesian coordinate system there is a small "point-like" compass needle, pointing in the direction of the x axis. The equation of one of its magnetic field line is $r=r_0\sin^2\varphi$, where r and φ are the polar coordinates of a point on the field line. *a*) Write down the equation of the field line in terms of the x and y coordinates, if $r_0=3$ metres. *b*) At which points of the field line is the magnetic induction (magnetic flux density) perpendicular to the needle?