KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

70. évfolyam 4. szám — Budapest, 2020. április

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Kós Géza: Térbe kilépő bizonyítások VII. 194

Simonovits András: Egy járványmodell 201

Varga Péter: Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire 206

Szoldatics József: Megoldásvázlatok a 2020/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához 210

Matematika feladat megoldása (5023.) 224

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1602–1608.) 225

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5094–5101.) 226

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (775–776.) 228

Informatikából kitűzött feladatok (508–510., 44., 143.) 229

Fizika gyakorlatok megoldása (681., 690., 694.) ... 233

Fizika feladatok megoldása (5165., 5174., 5178., 5180., 5183., 5185., 5191., 5197., 5203.) 234

Fizikából kitűzött feladatok (395., 705–708., 5219–5229.) 249

Problems in Mathematics 253

Problems in Physics 255

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Térbe kilépő bizonyítások VII.[1]

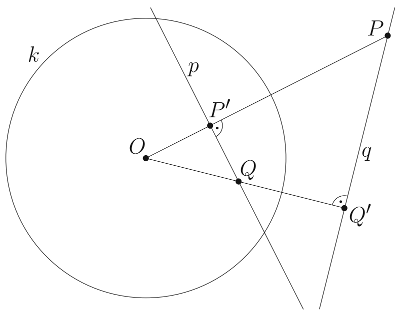
A körre vonatkozó polaritás

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

A *polaritások* olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések, amelyek a projektív sík pontjait a projektív sík egyeneseivel párosítják össze úgy, hogy bármely e egyenesre és P pontra igaz, hogy az e akkor és csak akkor megy át P-n, ha az e-nek megfelelő E pont illeszkedik a P-hez rendelt p egyenesre. A P ponthoz rendelt p egyenes a P *polárisa*, és a p egyeneshez rendelt P pont a p *pólusa*. Praktikus dolog az egymásnak megfeleltetett objektumokat ugyanazzal a betűvel jelölni, a pontokat nagy-, az egyeneseket kisbetűvel.

Most a polaritás legismertebb, középiskolás versenyfeladatokban is gyakran előforduló speciális esetével, a *körre vonatkozó polaritással* fogunk foglalkozni.

Két lehetséges definíció



1. ábra

Legyen k egy rögzített kör, ez lesz a polaritás *alapköre;* a középpontja O, sugara ϱ. *A k-ra vonatkozó polaritást* fogjuk definiálni.

Két lehetséges definíciót is szeretnék mutatni. Az első egy intuitív mód, ahogy az ember először maga fedezné fel a polaritás alaptulajdonságait, cserébe több technikai részletkérdést később kell végiggondolnunk. A második egy technikailag egyszerűbb, kompaktabb definíció, cserébe a geometriai tulajdonságokat kell külön ellenőrizni. Mindkét definíció lépéseit követhetjük az *1. ábrán.*

1. definíció

1*a*. Tetszőleges, O-tól különböző P pont k-ra vonatkozó inverze legyen P'. A P pont *polárisa* a P'-n átmenő, OP-re merőleges p egyenes.

1*b*. A P, Q pontok *konjugáltak,* ha rajta vannak egymás polárisán.

2. definíció

2*a*. A P és Q pontok *konjugáltak,* ha $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\varrho^2$.

2*b*. A P pont *polárisa* a P-vel konjugált pontok halmaza, avagy az $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OX}=\varrho^2$ egyenletű egyenes.

[1] A cikksorozat a Rényi Intézet és a Sztaki támogatásával készült.

1*c*. Ha a p egyenes nem megy át az O ponton, és O merőleges vetülete p-re a P' pont, akkor p *pólusa* a P' k-ra vonatkozó inverze.

1*d*. A p, q egyenesek *konjugáltak*, ha átmennek egymás pólusán.

2*c*. A p egyenes *pólusa* az az egyértelmű P pont, amely p összes pontjával konjugált.

2*d*. A p, q egyenesek *konjugáltak*, ha átmennek egymás pólusán.

Tetszés szerint, tekinthetjük az 1*a*–1*d*. tulajdonságokat definíciónak és a 2*a*–2*d*. tulajdonságokat következményeknek, vagy fordítva. A polaritás néhány további alaptulajdonsága:

3. A P pont polárisa akkor és csak akkor a p egyenes, ha p pólusa P.
4. A P pont akkor és csak akkor van rajta a Q pont polárisán, ha Q rajta van P polárisán (*1. ábra*).

5*a*. Ha a P és Q pontok polárisa p, illetve q, akkor az $r = PQ$ egyenes pólusa p és q metszéspontja, R (*2a. ábra*).

5*b*. Ha a p és q egyenesek pólusa P, illetve Q, akkor az R metszéspontjuk polárisa az $r = PQ$ egyenes (*2a. ábra*).

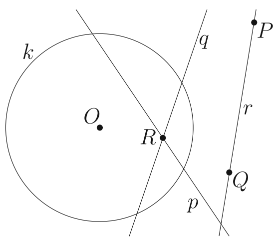
6*a*. Ha P az alapkörön van, akkor a polárisa a körhöz P-ben húzott érintő (*2b. ábra*).

6*b*. Ha p érinti az alapkört, akkor a pólusa az érintési pont (*2b. ábra*).

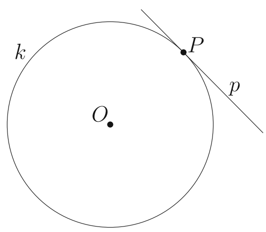
7. Ha a P pont kívül van, és a P-ből k-hoz húzott érintők PE és PF, akkor P polárisa az EF egyenes (*2c. ábra*).

8*a*. Bármely pont akkor és csak akkor konjugált önmagával, ha az alapkörnek pontja (*2b. ábra*).

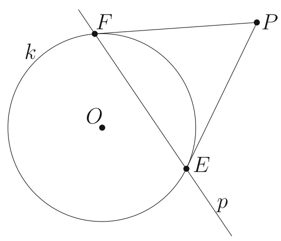
8*b*. Bármely egyenes akkor és csak akkor konjugált önmagával, ha érinti az alapkört (*2b. ábra*).



2a. ábra



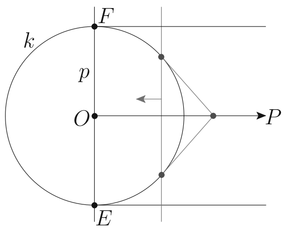
2b. ábra



2c. ábra

Az Olvasóra bízzuk annak végiggondolását, hogy a kétféle definíció ugyanazt a megfeleltetést írja le, és a fenti tulajdonságok is teljesülnek.

Kiterjesztés a projektív síkra

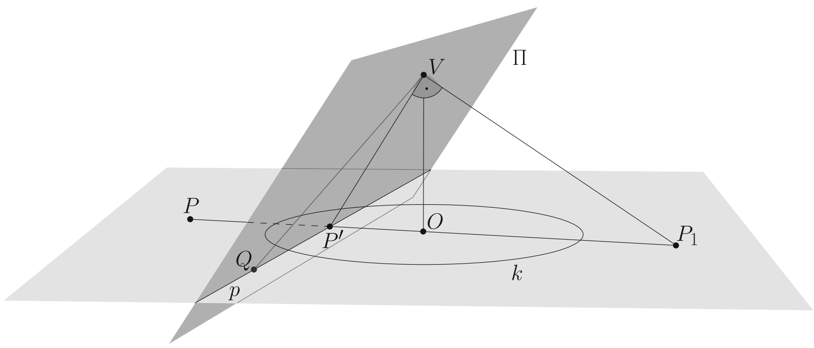


3. ábra

Ha a síkot kiegészítjük a szokásos végtelen távoli pontokkal és az azokat tartalmazó ideális egyenessel, akkor definiálhatjuk az O pont polárisát és az O-n átmenő egyenesek pólusait is. Ha P egy ideális pont, akkor P polárisa az O-n átmenő, az OP irányra merőleges egyenes. Ez szemléletesen megfelel annak, hogy ha a P pontot valamelyik irányban végtelen messzire elmozgatjuk, akkor a polárisa is párhuzamosan mozog az O pontra illeszkedő helyzetig. A 7. tulajdonság is érvényes marad; a határhelyzetben a P-ből húzott érintők párhuzamosak az OP iránnyal (*3. ábra*).

Végül az O pont polárisa az ideális egyenes; ezt is szemléltethetjük úgy, hogy a P pontot az O-ba húzzuk, miközben P polárisa egyre távolabbra vándorol.

Térbe kilépve egységessé tehetjük a sokféle definíciót. Vegyünk fel egy V pontot a térben, amelyre az OV szakasz merőleges k síkjára, és a hossza ϱ. Tekintsünk egy tetszőleges, O-tól különböző P pontot a síkban, a k-ra vonatkozó inverze legyen P', a polárisa pedig p; legyen továbbá P tükörképe az O pontra P_1, és legyen Π a V-re és p-re illeszkedő sík (*4. ábra*).



4. ábra

Mivel $OP_1 \cdot OP' = OP \cdot OP' = \varrho^2 = OV^2$, az OVP_1 háromszög hasonló az $OP'V$ háromszöghöz, emiatt $P'VP_1 = 90°$. A p egyenes merőleges OP-re és OV-re, ezért merőleges az OVP síkra és az abban fekvő VP_1 egyenesre is. A Π síkban most már két egyenesről, p-ről és VP'-ről is tudjuk, hogy merőleges VP_1-re, tehát a Π sík merőleges a VP_1 egyenesre.

Ez az észrevétel egy térbeli eljárást ad a P pont polárisának szerkesztésére: tükrözzük P-t O-ra, így megkapjuk a P_1 pontot. A V-ponton át, VP_1-re merőlegesen vegyük fel a Π síkot; a Π kimetszi az alapsíkból a p egyenest. Azt is láthatjuk, hogy bármely Q pont akkor és csak akkor konjugált P-vel, ha $P_1VQ\sphericalangle = 90°$.

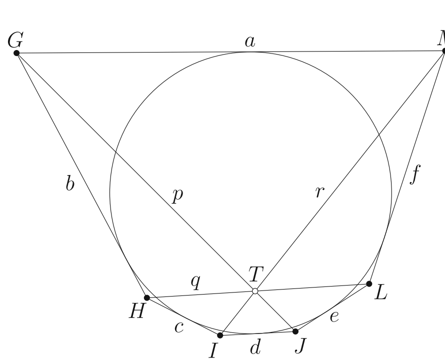
Ha P valamelyik ideális pont, akkor $P_1 = P$, az OP irány párhuzamos az alapsíkkal, és Π kimetszi az O-n átmenő, OP-re merőleges egyenest. Ha pedig $P = O$, akkor Π párhuzamos k síkjával, a két sík metszete valóban az alapsík ideális egyenese. Tehát a fenti szerkesztés egységesen működik a projektív sík bármely pontjára.

Dualitás

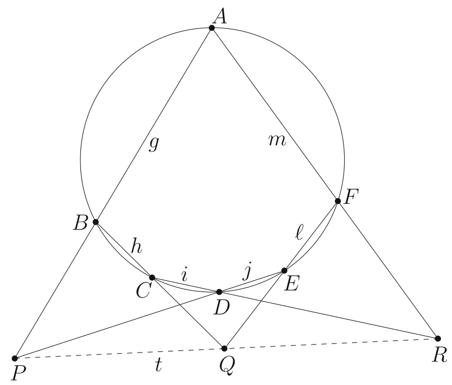
Ha van egy projektív geometriai állítás, tétel, amelyben pontok, egyenesek és (legfeljebb) egy kör szerepel, az ábrára alkalmazhatjuk a körre vonatkozó polaritást: minden pontot kicserélünk a polárisára, és minden egyenest kicserélünk a pólusára. Ilyen módon a projektív geometriai tételeket párokba állíthatjuk; mindegyik tételnek van egy párja, *duálisa.*

Próbáljuk ki ezt az első részben látott Brianchon-tétellel:

Brianchon tétele: *Ha az a, b, c, d, e, f egyenesek érintik a k kört, metszéspontjaik $a \cap b = G$, $b \cap c = H$, $c \cap d = I$, $d \cap e = J$, $e \cap f = L$ és $f \cap a = M$, akkor a $p = GJ$, $q = HL$ és $r = IM$ egyenesek egy ponton (T) mennek át* (5*a*. ábra).



5*a. ábra*



5*b. ábra*

A polaritást alkalmazva kapjuk a Pascal-tételt:

Pascal[2] tétele: *Ha az A, B, C, D, E, F pontok egy körön vannak, az összekötő egyeneseik $AB = g$, $BC = h$, $CD = i$, $DE = j$, $EF = \ell$ és $FA = m$, akkor ezek metszéspontjai, a $g \cap j = P$, $h \cap \ell = Q$ és $i \cap m = R$ pontok egy egyenesen (t) vannak* (5*b*. ábra).

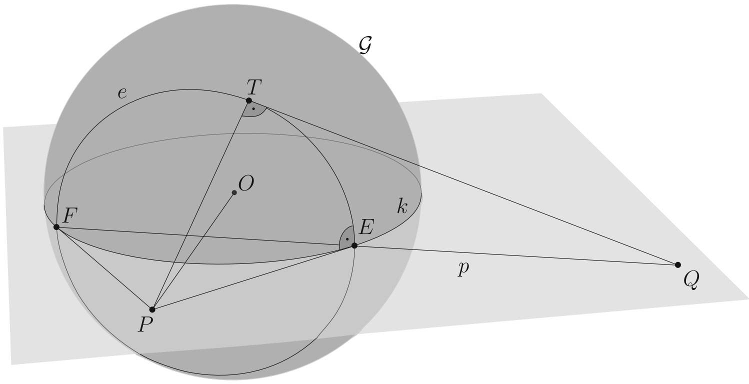
A Brianchon-tétel és a Pascal-tétel *egymás duálisa.*

Konjugált pontpárok egy térbeli jellemzése

Legyen $\mathcal{G}$ az O középpontú, az alapkörre illeszkedő gömb, és vegyünk fel két pontot, P-t és Q-t a síkban, a körön kívül; a P-ből k-hoz húzott érintők végpontjai legyenek E és F. A 7. tulajdonság szerint a $p = EF$ egyenes a P pont polárisa. A PO egyenesre a p mentén állítsunk egy merőleges síkot; ez a $\mathcal{G}$-t egy e körben metszi; az e merőleges a PE és PF szakaszokra.

[2]Blaise Pascal (1623–1662) francia matematikus és filozófus

Ha Q rajta van a p egyenesen, vagyis P és Q konjugáltak, akkor a Q pont is az e kör síkjában van, a körön kívül. Húzzuk meg Q-ból az e egyik érintőjét; az érintési pontot jelöljük T-vel. Vegyük észre, hogy a PT és a QT szakasz is érintője $\mathcal{G}$-nek, ezért a PQT sík érinti a gömböt. Továbbá a PT szakasz a PE elforgatottja, szintén merőleges e-re és a körhöz húzott QT érintőre, tehát a PT és QT szakaszok merőlegesek (*6. ábra*).



6. ábra

Végig lehet gondolni, hogy ezek a lépések megfordíthatók: ha egy, a P és Q pontokon keresztül fektetett sík a T pontban érinti a gömböt úgy, hogy PT és QT merőlegesek, akkor Q a p egyenesre esik, vagyis P és Q konjugáltak.

Melléktermékként a 4. tulajdonságra is egy új bizonyítást adtunk, legalábbis külső pontok esetén.

Autopoláris háromszögek

Azokat a háromszögeket, amelyekben mindegyik csúcs a vele szemközti oldal pólusa, *autopoláris háromszögnek* hívjuk, de van, aki a görög–angol *autopolar* név betű szerinti átírását szereti. Bármely két konjugált P, Q pont kiegészíthető autopoláris háromszöggé, a harmadik, R csúcs a PQ egyenes pólusa, amely P-vel és Q-val is konjugált. Például a P ponttal Q és R is konjugált, ezért P polárisa csak a QR egyenes lehet.

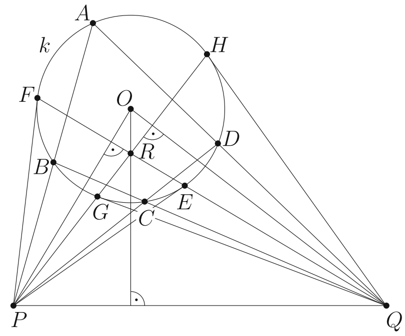
Az autopoláris háromszögeknek egy nagyon fontos előfordulása, versenyfeladatok megoldásában is gyakran találkozhatunk vele, amikor egy húrnégyszög szemközti oldalpárjainak és átlóinak metszéspontját vesszük:

Tétel. (a) *Ha A, B, C és D négy különböző pont a k körön, AB és CD metszéspontja P, BC és AD metszéspontja Q, továbbá AC és BD metszéspontja R, akkor a PQR háromszög k-ra nézve autopoláris.*

(b) *A PQR háromszög magasságpontja a k középpontja* (7. ábra).

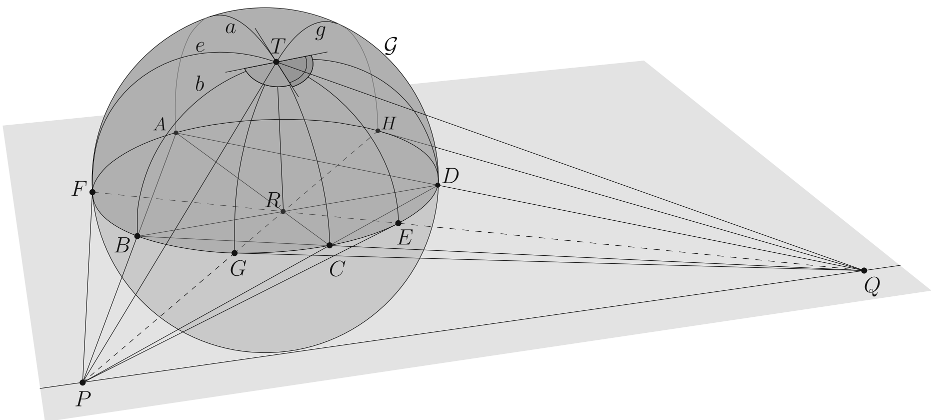
A tétel (b) része triviálisan következik az (a) állításból: ha PQR autopoláris háromszög, akkor például a QR egyenes a P pont polárisa, ami az 1a. tulajdonság miatt merőleges az OP egyenesre, tehát a PQR háromszögben OP a QR oldalhoz tartozó magasságvonal. Ugyanez a másik két oldalra is elmondható, tehát O a három magasságvonal metszéspontja.

Az (a) részt a térbe kilépve fogjuk igazolni. Az A, B, C, D pontok szerepe szimmetrikus; feltehetjük, hogy $ABCD$ egy konvex húrnégyszög, így P és Q a körön kívül, R pedig a körön belül helyezkedik el.



7. ábra

A P-ből és Q-ból a körhöz húzott érintők legyenek PE, PF, QG és QH, és legyen $\mathcal{G}$ az O középpontú, k-ra illeszkedő gömb. Az AC és BD átlókra illeszkedő, az alapsíkra merőleges síkok metsszék $\mathcal{G}$-t az a és b körvonalak mentén, és ezek egyik metszéspontja legyen T. Mivel az ACT és a BDT sík is merőleges a k síkjára, a T pont merőleges vetülete a síkra az R pont (*8. ábra*).



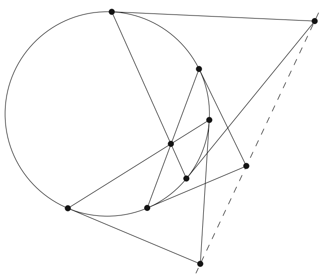
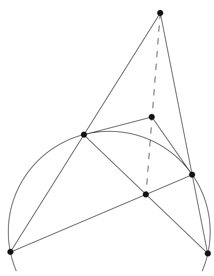
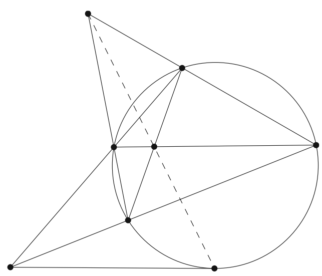
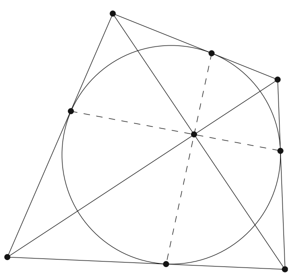
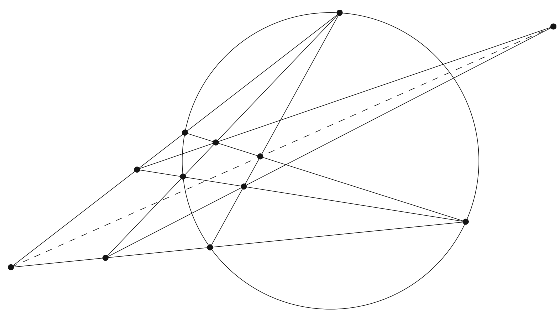
8. ábra

A P középpontú, PE sugarú inverzió a gömböt önmagára képezi, felcseréli egymással A-t B-vel, valamint C-t D-vel, ezért az alapsíkra merőleges a és b köröket is egymásra képezi. A PT egyenesen T a két kör egyetlen – közös – pontja, tehát az inverziónak – E és F mellett – T is fixpontja, tehát PT érinti $\mathcal{G}$-t. Az ilyen pontok az alapsíkra merőleges, EF átmérőjű e körön vannak, tehát az EFT sík is merőleges k síkjára, így tartalmazza a TR szakaszt és vele együtt az R pontot. Ebből azt is látjuk, hogy az EF egyenes átmegy az R ponton. De az EF egyenes a P pont polárisa, tehát P és R konjugáltak. Ugyanígy láthatjuk, hogy Q és R konjugáltak.

Az előbbi, P középpontú inverzió önmagára képezi a PT egyenest és felcseréli egymással az a és b köröket; az inverzió szögtartása miatt a PT egyenes ugyanakkora szöget zár be a két körrel, illetve a T pontban húzott érintőikkel. Mindhárom egyenes egy síkban, a T-ben a gömbhöz fektetett érintősíkban van; tehát PT a két kör közötti egyik szög felezője. Hasonlóan, a QT egyenes a két kör közötti másik, kiegészítő szög felezője. A két szögfelező, vagyis PT és QT merőlegesek, tehát P és Q konjugáltak. Ezzel beláttuk, hogy a P, Q, R pontok páronként konjugáltak, vagyis a PQR háromszög valóban autopoláris.

Feladatok

1. Mi a Desargues-tétel duálisa?
2. Mi a Papposz-tétel duálisa?
3. Írjuk és rajzoljuk fel az autopoláris háromszögekről szóló tétel duálisát.
4. Feladatok szöveg nélkül:

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges P és Q pontok akkor és csak akkor konjugáltak a k körre nézve, ha a PQ átmérőjű kör merőlegesen metszi k-t.
6. Vetítsük a k kör síkját középpontosan egy másik, vele nem párhuzamos síkra úgy, hogy a k kör vetülete is kör legyen. Mutassuk meg, hogy a vetítés megtartja a polaritást, azaz bármely pont vetületének polárisa az új síkban a poláris vetülete, és egyenes vetületének pólusa a pólus vetülete.

Ajánlott irodalom

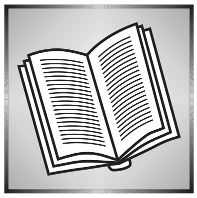
[1] Sz. C. Havalampijev: *Pólus és poláris körben,* KöMaL 37/1 (1987. január), 9–15.
`http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=198702`

[2] Kiss György: *A körre vonatkozó polaritás,* KöMaL 48/8–9 (1998. november), 450–455.
`http://db.komal.hu/scan/1998/11/MAT9808.PS`

[3] Hajós György: *Bevezetés a geometriába,* 46. fejezet. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

Kós Géza

Egy járványmodell



A koronavírus világjárvánnyá szélesedése bizonyára felkeltette a KöMaL olvasóinak érdeklődését a *járványmodellek* iránt. Ez az írás nekik szól: a legelterjedtebb (ún. SIR-féle) járványmodellt mutatjuk be. Bonyolultsága miatt mégis le kell mondanunk a koronavírus terjedésének valódi modellezéséről, tehát csak bevezetésre számítson az Olvasó.

Megnehezíti dolgunkat, hogy *dinamikus* folyamatról van szó, ahol minden pillanatban a már fertőzöttek egy része megfertőzi a még nem fertőzöttek (röviden: megfertőzhetők) bizonyos részét, miközben a fertőzöttek másik része meggyógyul vagy meghal. A szakirodalmat követve, ebben a leírásban a könnyebb érthetőség érdekében több végletes egyszerűsítő feltevést teszünk: *a*) a népesség létszáma időben állandó; *b*) a fertőzésben senki sem hal meg; *c*) ha valaki kigyógyul a fertőzésből, az már nem fertőződik meg és nem fertőz újra; *d*) a fertőzési valószínűség független a népesség egyéb (nemi, életkori, területi, egészségi állapot- stb.) jellemzőitől; *e*) a gyógyulási valószínűség független az egészségügyi ellátástól.

Három típust különböztetünk meg: a *megfertőzhetők* (susceptibles, S), (népességi) részarányuk $s > 0$; a *fertőzöttek* (infectious, I), részarányuk $i > 0$; végül a *gyógyultak* (recovered, R), de ide tartoznak az eleve immunisak is: részarányuk $r > 0$, innen a modell közkeletű elnevezése: SIR-modell. Az ilyen típusú modelleket egyébként *rekesz*modelleknek nevezik.

Egyenleteinkben kulcsszerepet kap a fertőzési és a gyógyulási ráta. Ezek függvényében igazoljuk, hogy *a megfertőzhetők részarányának kicsi kezdőértékeire elhal a járvány, és nagy kezdőértékeire fellángol.* Azt is szemléltetni tudjuk, hogyan laposítja el a járvány időbeli lefutását, ha a fertőzési rátát elkülönítéssel vagy a megfertőzhetők részarányának kezdőértékét oltással csökkentjük.

A technikai egyszerűség kedvéért és a szokással ellentétben, nem folytonos, hanem diszkrét időben írjuk föl a népességi részarányok dinamikáját, egységnyinek rögzítve az időszak hosszát, pl. nap, hét, $t = 0, 1, 2, \ldots$ az időszakok indexe. A jobb érthetőség kedvéért az $S \to I \to R$ időrendi sorrendet felcserélve adjuk meg a három egyenletet.

Föltesszük, hogy az *új* fertőzések részaránya egyaránt arányos a megfertőzhetők és a fertőzöttek részarányával, de az *újonnan* gyógyultak részaránya csak a fertőzöttek részarányával arányos. Visszatérve a „rekeszek tartalmára":

A *megfertőzhetők részarányának csökkenése* egyenesen arányos a megfertőzhetők részarányának és a fertőzöttek részarányának szorzatával:

(1) $$s_{t+1} - s_t = -\beta s_t i_t,$$

ahol $\beta > 0$ a fertőzési ráta.

A *gyógyultak részarányának növekedése* egyenesen arányos a fertőzöttek részarányával:

(2) $$r_{t+1} - r_t = \gamma i_t,$$

ahol $\gamma > 0$ a gyógyulási ráta.

Valójában az az eset az érdekes, amikor a gyógyulási ráta kisebb a fertőzési rátánál, és az időegység megfelelő megválasztásakor a fertőzési ráta legfeljebb 1: $0 < \gamma < \beta \leqslant 1$.

Mivel mindenki vagy megfertőzhető, vagy fertőzött, vagy gyógyult, ezért a három részarány összege 1:

$$s_t + i_t + r_t = 1,$$

azaz az összeg időbeli változása 0:

$$s_{t+1} - s_t + i_{t+1} - i_t + r_{t+1} - r_t = 0.$$

Ebbe behelyettesítve (1)-et és (2)-t következik:

A *fertőzöttek részarányának változása:*

(3) $$i_{t+1} - i_t = (\beta s_t - \gamma) i_t.$$

Figyeljük meg, hogy beszorzás után (3) jobb oldalán két tag különbsége szerepel: a kisebbítendő az új fertőzések részaránya, a kivonandó pedig az újonnan gyógyultaké.

Bevezetjük a megfertőzhetők részarányának *kritikus értékét,* amelynél a (3) egyenlet jobb oldala 0, azaz a fertőzöttek részaránya változatlan (maximális, mert kisebb értékre növekszik, nagyobbra csökken):

$$s^{\mathrm{o}} = \frac{\gamma}{\beta} < 1.$$

Becsempészve (3)-ba s^{o}-t, jobban látszik s^{o} szerepe a fertőzöttek részarányának alakulásában:

(4) $$i_{t+1} - i_t = \beta(s_t - s^{\mathrm{o}}) i_t.$$

Mivel r_t nem hat sem s_{t+1}-re, sem i_{t+1}-re, ezért a (2) egyenlettel ráérünk utólag törődni; a modell magva (1) és (4), vagy alkalmasabb alakban:

(5) $$s_{t+1} = (1 - \beta i_t) s_t$$

és

$$(6)\qquad i_{t+1} = \big[1 + \beta(s_t - s^{\mathrm{o}})\big] i_t.$$

Az (5)–(6) rekurziót elsőrendű nemlineáris differenciaegyenlet-rendszernek nevezzük: elsőrendű, mert a jövő csak a jelentől függ; nemlineáris, mert két változó szorzata is szerepel mindkét egyenlet jobb oldalán. A rekurzió (s_t, i_t) megoldása (pályája) a kezdeti részaránypárostól függ: (s_0, i_0), ahol $i_0 \approx 0$ (nagyon kicsi pozitív szám, a fertőzés hirtelen jelenik meg), és helyet hagyva az esetleg pozitív r_0-nak, $s_0 \leqslant 1 - i_0$.

1. segédtétel. *Az* (5)–(6) *rendszer minden pályájára teljesül:*

$$(7)\qquad s_t, i_t \geqslant 0 \quad \textit{és} \quad s_t + i_t \leqslant 1.$$

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk: feltevés szerint (7) teljesül $t = 0$-ra, és belátjuk, hogyha (7) teljesül t-re, akkor teljesül $t + 1$-re.

Amíg $i_t \geqslant 0$, addig (2) értelmében $r_{t+1} \geqslant r_t$. Mivel $s_t + i_t = 1 - r_t$, ezért

$$s_{t+1} + i_{t+1} \leqslant s_t + i_t \leqslant 1. \qquad \square$$

Szavakkal: (1)-ből és (3)-ból következik, hogy amíg van fertőzött, addig a megfertőzhetők részaránya monoton csökken, a gyógyultaké viszont monoton nő.

Most már kimondható az

1. tétel. *a*) *Ha a megfertőzhetők részarányának kezdőértéke legfeljebb a kritikus érték:* $s_0 \leqslant s^{\mathrm{o}}$*, akkor a fertőzöttek részaránya monoton tart a* 0*-hoz.*

b) *Ha a megfertőzhetők részarányának kezdőértéke nagyobb, mint a kritikus érték:* $s^{\mathrm{o}} < s_0 < 1$*, akkor a fertőzöttek* i_t *részaránya egészen addig növekszik, amíg a megfertőzhetők részaránya nem csökken a kritikus érték alá, aztán pedig* i_t *a végtelenben* 0*-hoz tart.*

Bizonyítás. *a*) Ha $s_0 \leqslant s^{\mathrm{o}}$, akkor $s_t < s^{\mathrm{o}}$ $(t > 0)$. Két alesetet különböztetünk meg.

(*i*) Ha $s_0 < s^{\mathrm{o}}$, akkor (6)-ot felírva $0, 1, \dots, t-1$ időszakra, és figyelembe véve, hogy $s_{t-1} < \dots < s_1 < s_0$, adódik

$$(8i)\qquad i_t = \big[1 + \beta(s_{t-1} - s^{\mathrm{o}})\big] \cdot \ldots \cdot \big[1 + \beta(s_0 - s^{\mathrm{o}})\big] i_0 < \big[1 + \beta(s_0 - s^{\mathrm{o}})\big]^t i_0,$$

azaz i_t gyorsan tart 0-hoz. (*ii*) Ha $s_0 = s^{\mathrm{o}}$, akkor az első lépést külön kell kezelni. $i_1 = i_0$, és (5) szerint $s_1 = (1 - \beta i_0)s^{\mathrm{o}}$, majd (8i) szerint

$$(8ii)\qquad i_t < \big[1 + \beta(s_1 - s^{\mathrm{o}})\big]^{t-1} i_1 = \big[1 - \beta^2 i_0 s^{\mathrm{o}}\big]^{t-1} i_0, \qquad t \geqslant 1.$$

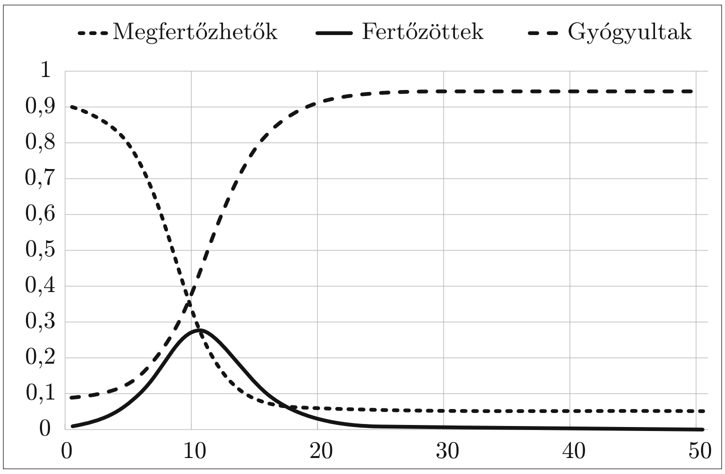
b) $0 < s^{\mathrm{o}} < s_0 < 1$ esetén, amíg a megfertőzöttek részaránya nagyon kicsi: $i_t \approx 0$, addig (5) miatt $s_t \approx s_0$ (csak lassan csökken), tehát i_t részarány (6) és

$s^{\mathrm{o}} < s_0 < 1$ miatt közelítőleg egy $1+\beta s_0 - \gamma$-hányadosú mértani sorozat szerint nő. Belátjuk, hogy előbb-utóbb s_t a kritikus érték alá süllyed, s *a*) szerint i_t ezután végleg csökkenésre vált.

Indirekt bizonyítunk. Tegyük föl, hogy $s_t \geqslant s^{\mathrm{o}}$ minden t-re. Az (s_t) alulról korlátos csökkenő sorozat, tehát van határértéke, amelyre $s^* \geqslant s^{\mathrm{o}}$ áll. (6) szerint $i_t \geqslant i_0$, azaz (5) szerint $s_t \leqslant (1-\beta i_0)^t s_0$, azaz $s^* = 0$, s ez ellentmond $s^* \geqslant s^{\mathrm{o}} > 0$-nak. $\square$

További vizsgálatot igényelne, hogy hosszú távon milyen esetben szűnik meg a megfertőzhetőség (és válik teljessé a gyógyultság), számpéldáinkban azonban az idők végezetéig maradnak megfertőzhetők.

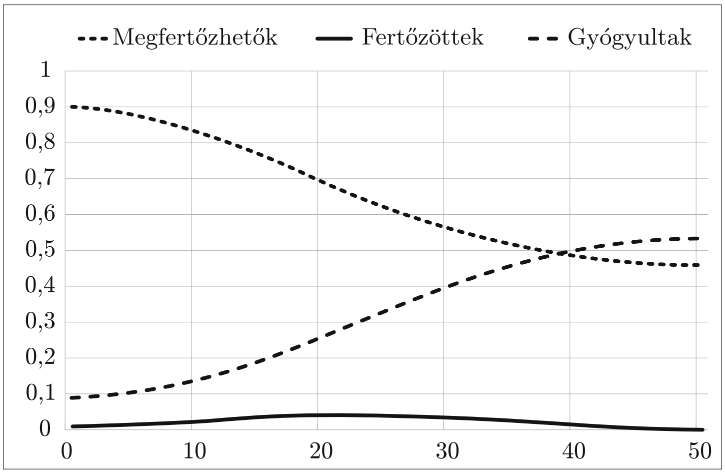
Rátérünk a numerikus szemléltetésre. Önkényesen választjuk, hogy $i_0 = 0{,}01$. Első futásunkban $\beta = 1$ és $\gamma = 1/3$, valamint a megfertőzhetők részarányának nagy kezdőértéket adunk: $s_0 = 0{,}9 > s^{\mathrm{o}} = 1/3$. Egyszerű programmal elkészíthetjük az *1. ábrát.* Legérdekesebb eredmény: a 10. időszakban éri el a fertőzöttség a maximumát, a lakosság 27,7%-a fertőzött. A 20. időszakra a fertőzöttség gyakorlatilag eltűnik, de további számítások szerint a megfertőzhetőség megmarad 5%-nál.



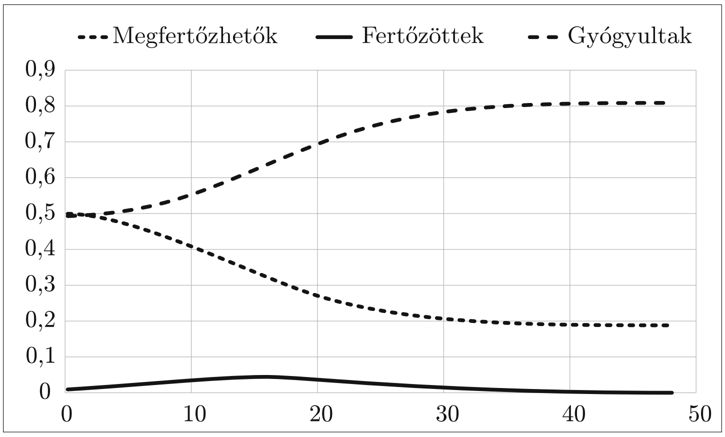
1. ábra. Erős fertőzés, sok megfertőzhető

A második futásban feltesszük, hogy elkülönítéssel sikerült az erős fertőzési rátát gyengíteni: $\beta = 0{,}5$. Az előző programot használva kapjuk a *2. ábrát.* A legérdekesebb eredmény: a fertőzöttség jóval később, a 22. időszak körül éri el a maximumát, s a lakosságnak csupán 4,5%-a fertőzött, de a megfertőzhetők részaránya lassabban csökken, és megáll 45%-nál.

A harmadik futásnál feltesszük, hogy oltással sikerült a megfertőzhetők nagy kezdő-részarányát jelentősen csökkenteni, de a kritikus érték fölött maradva: $s_0 = 0{,}5 > s^{\mathrm{o}}$. A fertőzési ráta újra nagy: $\beta = 1$. A *3. ábrán* látható, hogy a maximális fertőzöttség véletlenül ismét 4,4%, de már a 16. időszakban elérjük, és alacsonyabb lesz a megfertőzhetők részarányának határértéke: 19%.



2. ábra. Gyengén fertőző, sok megfertőzhető



3. ábra. Erősen fertőző, kevés megfertőzhető

Eddig kizártuk a $\gamma \geqslant \beta$ esetet. A teljesség kedvéért most röviden megvizsgáljuk, mi történik ekkor. Formálisan $s^{\mathrm{o}} \geqslant 1$, tehát az 1. tétel b) pontja értelmében minden $s_0 \leqslant 1$ kezdőállapotra teljesül az $s_0 \leqslant s^{\mathrm{o}}$ feltétel, azaz a járvány elhal.

Összefoglalásként, ne várjunk csodákat egy modelltől. Ez a modell csak a legegyszerűbb összefüggéseket képes megvilágítani, például, hogy létezik a megfertőzhetők részarányának egy kritikus értéke. Ha a kritikus érték alattról vagy fölöttről indítjuk a rendszert, az nemcsak kvantitatíve, de kvalitatíve is másképp viselkedik. Modellünk azonban képtelen kezelni a koronavírus-járványnak azt a központi kérdését, hogy az elkülönítés a fertőzési folyamat lassításával megnöveli a gyógyulás valószínűségét (lesz elég lélegeztetőgép). Ennek részletezése azonban túlmutat a tanulmányon.

Simonovits András

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a $\sqrt{2x+6}=9-x$ egyenletet a valós számok halmazán. (*5 pont*)

b) Oldjuk meg a $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3} \frac{4}{9}$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. (*3 pont*)

c) Oldjuk meg a $\sin^2 4x+\sin 4x+\cos^2 4x=2$ egyenletet a $[0;\pi]$ halmazon. (*4 pont*)

2. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $y+2x=x^2$ egyenletű parabola.

a) Írjuk fel a parabola $E(2;0)$ pontjában húzott érintő egyenletét. (*3 pont*)

b) Számítsuk ki a parabola tengelypontjának koordinátáit és határozzuk meg a parabola paraméterét. (*4 pont*)

A koordináta-rendszerben a $(-4;0)$, $(4;0)$, $(4;8)$ és $(-4;8)$ csúcspontokkal megadott téglalapot a fenti parabola három részre vágja.

c) Mekkora a középső rész területe? (*6 pont*)

3. *a*) Egy mértani sorozat 1011-edik tagja megegyezik a sorozat nullától különböző hányadosával. Számítsuk ki a sorozat első 2019 tagjának a szorzatát. (*6 pont*)

b) Jelölje x és y ebben a sorrendben egy mértani sorozat két egymást követő tagját. Tudjuk, hogy $x\neq 0$ és az $(x;y)$ számpár megoldása a

$$100^x-2\cdot 10^x\cdot 10^{2y}+10^{4y}\leqslant 0$$

egyenlőtlenségnek. Számítsuk ki a sorozat hányadosát. (*6 pont*)

4. A VONALAZÓ nevű játékot két ember játszhatja.

A játék menete

Egy papírlapra a játékosok néhány pontot rajzolnak. A kezdő játékos húz egy vonalat valamelyik pontból egy másik pontig, és a vonalra egy újabb pontot rajzol. Így ebből az új pontból két vonal indul ki. A két játékos felváltva húzza a vonalakat a pontok között és a játékos a megrajzolt vonalra mindig egy új pontot rajzol a következő szabályok betartásával:

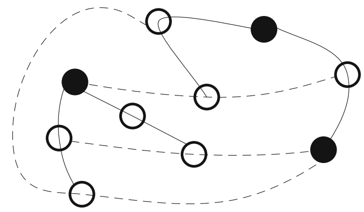
1. Mindegyik vonal alakja tetszőleges lehet, de nem metszheti önmagát és nem metszhet egyetlen korábban megrajzolt vonalat sem.
2. Az összekötő vonal két pontot köt össze és nem mehet át más korábban megrajzolt ponton.
3. Két pontot csak egyetlen vonal köthet össze.

4. Egyetlen pontból sem indulhat ki háromnál több vonal.

Az veszít, aki már nem tud húzni egy vonalat sem.

a) A *4.1. ábrán* 3 pont látható. Rajzoljuk bele az ábrába – a fenti feltételek figyelembevételével – annak a játéknak az egyes lépéseit, amelyben pontosan 4 új pont szerepel. A kezdő játékos vonala legyen folytonos, az ellenfélé pedig szaggatott. Az új pontokat üres karikával jelölje. (*3 pont*)

4.1. ábra



4.2. ábra

A *4.2. ábrán* egy játszma lépéseit lehet nyomon követni. A kezdő játékos vonalait a folytonos, az ellenfél lépéseit pedig a szaggatott vonalak jelzik.

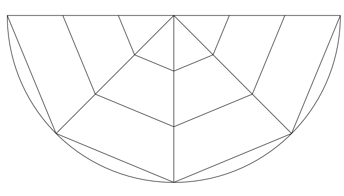
b) Számozzuk be az üres karikával jelzett új pontokat a keletkezésük sorrendjében és döntsük el, melyik játékos nyerte a játszmát. (*4 pont*)

Levente Csabával már nagyon sokszor játszotta a VONALAZÓ nevű játékot. Annak a valószínűsége, hogy Levente 10 játékból legalább 8-at megnyer kétszer akkora, mint annak, hogy pontosan 8-at nyer meg. (Tételezzük fel, hogy Levente mindegyik játszmában ugyanakkora valószínűséggel nyer.)

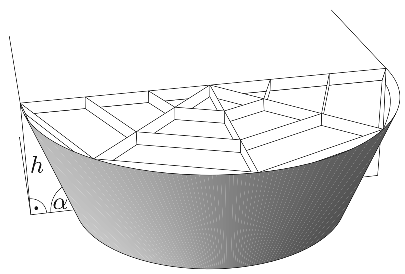
c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Levente megnyer egy játszmát? (*7 pont*)

II. rész

5. Egy zöldségárus a friss áruját a pulton félkörívben helyezi el. Az egyes tartományokat falécek határolják. A félkör az *5.1. ábrán* látható módon négy egybevágó körcikkre van osztva. Az ábrán látható összes egyenes szakasz és a félkörív is falécből készült. A szomszédos sugarakat összekötő elválasztó lécek párhuzamosak és három egyenlő részre osztják a sugarakat. A félkör sugara 1,5 méter.



5.1. ábra



5.2. ábra

a) Hány méter falécre van szükség a pult kialakításához? Válaszunkat egészre kerekítve adjuk meg. (*8 pont*)

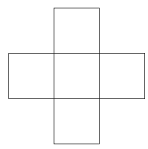
Egy másik zöldségesnek megtetszett az ötlet és bódéjához egy félbevágott csonkakúp alakú bővítményt tervezett az *ábra* szerint, ahol h a bővítmény magasságát, α pedig a félbevágott csonkakúp bódéval érintkező alkotójának a bódé alsó, vízszintes élével bezárt szögét jelöli. A bővítmény méretei: $h = 100$ cm, $\alpha = 70°$, a felső kör sugara pedig 1,5 m (*5.2. ábra*).

c) Mennyi anyag szükséges a szürkével jelölt palástrész beborításához, ha az illesztések miatt plusz 4% anyaggal kell számolni? Válaszunkat tized négyzetméterre kerekítve adjuk meg. (*8 pont*)

6. Egy 8×8-as sakktábla mezőire 1-től 64-ig beírtuk a természetes számokat a *6.1. ábra* szerint. Ezután készítettünk egy olyan alakzatot, amely 5 darab, a sakktábla mezőivel egybevágó négyzetből áll (*6.2. ábra*). Az így elkészített alakzatot véletlenszerűen ráhelyezzük a sakktáblára úgy, hogy annak mind az öt négyzete lefedjen egy-egy mezőt a táblán.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
33	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
49	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
57	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**

6.1. ábra



6.2. ábra

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lefedett számok összege osztható 3-mal? (*6 pont*)

Egy másik alkalommal a sakktábla mezőire 64 pozitív egész számot írtunk. Közülük az egyik egyjegyű, a többi kétjegyű szám. Tudjuk, hogy a felírt számok mediánja és egyetlen módusza a 68, ami kétszer szerepel a táblán. Tudjuk továbbá, hogy a számok átlaga 67,5, a terjedelmük pedig 93.

b) Mely számok szerepelnek a táblán? (*10 pont*)

7. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(11; -2)$ és a $B(2; 1)$ pontokat összekötő szakasz, továbbá az $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 20$ egyenletű kör. Az AB szakaszt a koordináta-rendszer origója körül $+90°$-kal elforgatjuk.

a) Számítással igazoljuk, hogy a forgatással kapott *szakasz* egy pontban metszi a megadott kört. (*4 pont*)

Egy r és R sugarú kör kívülről érinti egymást. A körök középpontjain áthaladó egyenes ezeket a köröket az érintési ponton kívül az A és B pontokban metszi. Az egyik közös külső érintő érintési pontjai E és F.

b) Igazoljuk, hogy az $ABEF$ négyszög húrnégyszög. (*6 pont*)

c) Számítsuk ki a közös külső érintőszakasz hosszát. (*6 pont*)

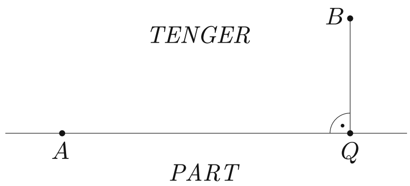
8. Egy szabadulószobának három bejárata van. Egy 6 fős társaság tagjai bármelyik ajtón, de csak kettesével léphetnek be. A belépés sorrendje nem számít.

a) Hányféle módon juthatnak be a szobába a társaság tagjai? (*4 pont*)

A szabadulószoba egyik feladata így szólt: adott tíz látszólag egyforma lakat illetve tíz kulcs. Mindegyik lakatra igaz, hogy pontosan egy kulcs nyitja. A játékszabály szerint a játékosnak mind a 10 lakatot ki kell nyitnia. Nevezzük próbálkozásnak egy kulcs és egy lakat összeillesztését, akár nyitja a kulcs a lakatot, akár nem.

b) Módszeresen dolgozva legfeljebb hány próbálkozás kell a feladat megoldásához? (*3 pont*)

Egy „túlélő” műsorban az egyik feladat az volt, hogy a lehető leggyorsabban jussanak el a versenyzők a tengerparton lévő A pontból a tengeren lévő B pontba, mert akkor védettséget szereznek a következő megmérettetésre. Tudjuk, hogy a parton csak futhatnak, a tengerben csak úszhatnak, segédeszközöket (farönk, evező stb.) nem használhatnak. Az *ábra* szerint a pálya méretei: $AQ = 4$ km, $BQ = 1$ km, valamint $AQB\sphericalangle = 90°$. (A partvonalat az egyszerűség kedvéért tekintsük egyenesnek.) Az egyik versenyző 8 km/óra sebességgel képes futni a homokban és 2 km/óra sebességgel úszni a tengerben.



c) Hány km futás után ugorjon a versenyző a tengerbe, ha a lehető legrövidebb időn belül szeretne eljutni A-ból B-be? (*9 pont*)

9. Egy öttagú család (apa, anya és a három gyerek) életkorának összege ebben az évben 100 év. Az anya 6 évvel fiatalabb a férjénél. 6 év múlva a középső gyerek kétszerannyi idős lesz, mint most. Amikor a legkisebb gyerek született, abban az évben (a kicsi megszületése előtt) a négytagú család átlagéletkora 22,5 év volt. Az anya az első gyermekét 22 éves korában szülte.

a) Hány éves most az anyuka? (*7 pont*)

Vasárnap délután a családtagok egy új társasjátékot próbálnak ki. A társasjáték játéktábláján 100 mező kapcsolódik egymás után, melyeket a tervezők 1-től 100-ig megszámoztak. A táblán a második mezőtől kezdve minden 2. mező zöld színű (a többi fehér), a harmadik mezőtől kezdve minden 3. mezőn egy állat képe, a negyedik mezőtől kezdve minden 4. mezőn egy fa képe, és az ötödik mezőtől kezdve minden 5. mezőn egy vadászház képe látható. A játékszabály szerint, ha egy mezőn két figura szerepel, akkor az erre a mezőre lépő játékos egyszer kimarad a játékból.

b) Hány olyan fehér színű mező van a táblán, amelyre lépve a játékos egyszer kimarad a játékból? (*3 pont*)

A társasjáték játékszabálya szerint a játékosok egy fehér és egy sárga színű szabályos dobókockával dobnak egyszerre, és a lépésük száma a dobott számok összege. Ha a dobás összege 6, akkor a játékosok újra dobhatnak, és a lépések száma a játékos által dobott négy szám összege lesz. (Például: Ha a játékos első dobása 2 és 5 volt, akkor a 7-es mezőre lép. Ha viszont a játékos első dobása 2 és 4, az új dobása 3 és 5 volt, akkor a játékos a 14-es mezőre léphet.) Ha egy mező sorszáma 10-zel osztható, akkor erre rálépve, a játékos a bábujával visszalép a legközelebbi, fát ábrázoló mezőre.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első játékos bábuja kezdéskor a 10-es mezőre lép? (Kezdéskor a játékosok bábui az 1-es mező előtt állnak.) (*6 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2020/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$x^2 - 14 = 2\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (6\ pont)$$

b) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:*

$$\frac{2x^2y}{2x^2+y} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{12x^2y}{4x^2+3y} = \frac{1}{5}. \qquad (7\ pont)$$

Megoldás. *a*) A gyökjel alatti mennyiség mindig pozitív. Az egyenlet bal oldala nem lehet negatív, azaz

$$x^2 - 14 \geqslant 0; \qquad x^2 \geqslant 14.$$

Vezessünk be új ismeretlent, azaz legyen

$$a = \sqrt{x^2+1} \quad (\geqslant 0).$$

Ekkor az egyenletünk az

$$x^2 + 1 - 15 = a^2 - 15 = 2a, \qquad a^2 - 2a - 15 = 0$$

alakot veszi fel. Ennek megoldásai $a_1 = 5$, $a_2 = -3$. Ebből csak az a_1 jöhet számításba az előjel miatt, azaz

$$a_1 = 5 = \sqrt{x^2+1}, \qquad 25 = x^2 + 1, \qquad x^2 = 24, \qquad x = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}.$$

A kapott gyököket az ellenőrzés jónak találja.

b) Ha $x=0$ lenne, akkor az egyenletek bal oldalán nulla állna, míg jobb oldalán nem, tehát $x\neq 0$. Ugyanezen gondolat alapján kapjuk, hogy $y\neq 0$. A megoldhatóság feltétele, hogy $2x^2+y\neq 0$ és $4x^2+3y\neq 0$ legyen. Vegyük az egyenletek reciprokait – az előzőek alapján megtehetjük – és rendezzük:

$$\frac{2x^2+y}{2x^2y}=2, \qquad \frac{4x^2+3y}{12x^2y}=5,$$

$$\frac{2x^2}{2x^2y}+\frac{y}{2x^2y}=2, \qquad \frac{4x^2}{12x^2y}+\frac{3y}{12x^2y}=5,$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{2x^2}=2. \qquad \frac{1}{3y}+\frac{1}{4x^2}=5.$$

Vezessünk be új ismeretleneket:

$$a=\frac{1}{x^2}, \quad b=\frac{1}{y}.$$

Az egyenletrendszer az

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a+b=2 \\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b=5 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a+2b=4 \\ 3a+4b=60 \end{cases}$$

alakot nyeri el. Itt a második egyenletből az első kétszeresét levonva kapjuk, hogy $a=52$ és $b=-24$; azaz

$$a=52=\frac{1}{x^2}, \qquad x^2=\frac{1}{52}, \qquad b=-24=\frac{1}{y}, \qquad y=-\frac{1}{24},$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{52}}=\pm\frac{1}{2\sqrt{13}}.$$

A kapott gyökök $\left(\frac{1}{2\sqrt{13}};-\frac{1}{24}\right)$ és $\left(-\frac{1}{2\sqrt{13}};-\frac{1}{24}\right)$, az ellenőrzés mindkettőt jónak találja.

2. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$4^x+4\cdot 2^{-x}=5. \qquad (6\ pont)$$

b) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\sin^6 x+\cos^6 x=-2+3\cos 2x. \qquad (7\ pont)$$

Megoldás. *a*) Vezessünk be új ismeretlent, legyen $2^x=a$ (>0). Így

$$a^2+\frac{4}{a}=5, \qquad a^3-5a+4=0, \qquad a^3-1-5a+5=0,$$

$$(a-1)(a^2+a+1)-5(a-1)=0, \qquad (a-1)(a^2+a-4)=0.$$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, azaz

$$a-1=0, \qquad a^2+a-4=0,$$

$$a_1=1, \qquad a_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},$$

$$a_3=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\ (<0),$$

$$2^x=1, \qquad 2^x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},$$

$$x_1=0, \qquad x_2=\log_2\frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

a_3 nem ad megoldást, mivel negatív.

A kapott gyököket az ellenőrzés jónak találja.

b) Használjuk fel, hogy $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ és $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ igaz minden valós számra:

$$\left(1-\cos^2 x\right)^3+\cos^6 x=-2+3(2\cos^2 x-1),$$

$$1-3\cos^2 x+3\cos^4 x-\cos^6 x+\cos^6 x=-2+6\cos^2 x-3,$$

$$3\cos^4 x-9\cos^2 x+6=0,$$

$$\cos^4 x-3\cos^2 x+2=0.$$

Vezessünk be új ismeretlent, azaz $a=\cos^2 x$, ekkor egyenletünk az

$$a^2-3a+2=0$$

alakot veszi fel, aminek a gyökei: $a_1=2$ és $a_2=1$. Ekkor

$$a_1=2=\cos^2 x, \qquad a_2=1=\cos^2 x,$$

$$\cos x=\pm\sqrt{2}, \qquad \cos x=\pm 1,$$

ami nem lehetséges, $\qquad x=k\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$

A kapott gyököket az ellenőrzés jónak találja.

3. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$1+\frac{3}{\log_4(x^2-6x+13)}=\frac{4}{\log_2(x+1)}+\frac{\log_2(x+1)^2}{2}. \qquad (8\ pont)$$

b) *Egy szabályos dobókockát hatvanszor feldobva* 15 *esetben kaptunk hatost. Ezt a kísérletet egymás után többször elvégezve mindig ehhez hasonló eredményre jutunk. Emiatt úgy sejtjük, hogy a dobókocka „cinkelt", azaz a hatos megnövelt valószínűséggel bír. Mekkora ez a valószínűség, ha minden* 60*-as sorozat esetén* 15 *lett a kapott érték* (*azaz a várható érték* 15)? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyenlet értelmezési tartományát vizsgálva:

$$\begin{array}{llll}\log_4(x^2-6x+13)\neq 0, & x^2-6x+13>0, & \log_2(x+1)\neq 0, & x+1>0,\\ x^2-6x+12\neq 0, & (x-3)^2+4>0, & x\neq 0, & x>-1,\\ (x-3)^2+3\neq 0. & & & \end{array}$$

Összefoglalva: $-1<x$ és $x\neq 0$.

I. eset: $-1<x<0$. Ekkor az egyenlet jobb oldala negatív, hiszen $x<0$ esetén $\log_2(x+1)<0$, és így

$$\frac{4}{\log_2(x+1)}+\frac{\log_2{(x+1)}^2}{2}=\frac{4}{\log_2(x+1)}+\frac{2\log_2(x+1)}{2}=$$
$$=\frac{4}{\log_2(x+1)}+\log_2(x+1)=\log_2(x+1)\left(\frac{4}{\log_2^2(x+1)}+1\right)$$

is negatív.

A bal oldal pozitív, hiszen

$$x^2-6x+13=(x-3)^2+4\geqslant 4,$$
$$\log_4(x^2-6x+13)\geqslant\log_4 4=1,$$
$$1+\frac{3}{\log_4(x^2-6x+13)}>1.$$

Ebben az intervallumban tehát nincs megoldás.

II. eset: $0<x$. Az egyenlet bal oldalának értékkészletét vizsgálva:

$$x^2-6x+13=(x-3)^2+4\geqslant 4,$$
$$\log_4(x^2-6x+13)\geqslant 1,$$
$$\frac{1}{\log_4(x^2-6x+13)}\leqslant 1,$$
$$1+\frac{3}{\log_4(x^2-6x+13)}\leqslant 4.$$

Az egyenlet jobb oldalát vizsgálva, közben használva egy számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget a pozitív $\log_2(x+1)$ kifejezésre:

$$\frac{4}{\log_2(x+1)}+\frac{\log_2{(x+1)}^2}{2}=$$
$$=\frac{4}{\log_2(x+1)}+\log_2(x+1)\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{\log_2(x+1)}\cdot\log_2(x+1)}=2\sqrt{4}=4,$$

azaz

$$\frac{4}{\log_2(x+1)} + \frac{\log_2 (x+1)^2}{2} \geqslant 4.$$

Kaptuk, hogy az egyenlet bal oldala 4 vagy kisebb, a jobb oldala 4 vagy nagyobb. Egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha mind a két oldal 4, ekkor

$$\begin{aligned} x^2-6x+13=(x-3)^2+4=4, &\qquad \frac{4}{\log_2(x+1)} = \log_2(x+1),\\ (x-3)^2=0, &\qquad \log_2^2(x+1)=4,\\ x_1=3, &\qquad \log_2(x+1)=\pm 2,\\ &\qquad x_2=3,\ x_3=-\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Mindkét követelmény csak az $x=3$ esetén teljesül, így ez az egyenlet megoldása.

A kapott gyököt az ellenőrzés jónak találja.

b) Legyen p annak a valószínűsége, hogy hatost dobunk, ekkor a többi dobásra $1-p$ adódik. Annak a valószínűsége, hogy 60 dobásból 15 esetben kapunk hatost:

$$P(15 \text{ a } 60\text{-ból}) = \binom{60}{15} p^{15}(1-p)^{45}.$$

Tekinthetjük ezt egy binomiális eloszlásnak.

A várható érték np, ami az adott esetben $60 \cdot p = 15$, $p = \frac{1}{4}$. Ez az elvi $\frac{1}{6}$ értéktől erős eltérést mutat. Mindenképpen igazolja a gyanút, hogy „cinkelt” a kocka.

4. *a*) *Egy nem állandó számtani sorozat első, második és negyedik eleméhez rendre* 1*-et adunk, így egy mértani sorozat második, harmadik és negyedik elemét kapjuk. A mértani sorozat első, második és harmadik elemének az összege* 7*. Mennyi a számtani sorozat* 1010*-edik eleme?* (*6 pont*)

b) *Adott a következő sorozat:*

$$a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1 \ (n \geqslant 1).$$

Adjuk meg a sorozat 2020*-adik tagját.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Jelöljük a számtani sorozat első elemét a-val és a differenciáját d-vel. Ekkor az első négy eleme rendre $a_1 = a$; $a_2 = a+d$; $a_2 = a+2d$; $a_4 = a+3d$. Az első, második és negyedik elemhez 1-et adva egy mértani sorozat egymás utáni három elemét kapjuk, amelyekre igaz, hogy a középső elem négyzete a két szélső szorzata, azaz:

$$\begin{gathered} (a+d+1)^2 = (a+1)(a+3d+1),\\ a^2+d^2+1+2a+2d+2ad = a^2+2a+1+3ad+3d,\\ d^2-ad-d=0,\\ d(d-a-1)=0. \end{gathered}$$

Mivel a sorozat nem állandó, ezért $d \neq 0$, így $d = a + 1$. A számtani sorozat: $a_1 = a$; $a_2 = a + d = 2a + 1$; $a_3 = 3a + 2$; $a_4 = 4a + 3$. Az elemekhez egyet hozzáadva:

$$a_1 = a + 1; \quad a_2 = 2a + 2; \quad a_3 = 3a + 3; \quad a_4 = 4a + 4.$$

Ezek közül az első, második és negyedik tényleg egy mértani sorozat elemei, melynek a hányadosa $q = 2$.

Az első, második és harmadik elem összege 7 a feladat szerint, tehát

$$\frac{a+1}{2} + (a+1) + 2(a+1) = 7, \qquad (a+1) \cdot \frac{7}{2} = 7, \qquad a = 1.$$

Ekkor $d = 2$, a kezdeti számtani sorozat 1; 3; 5; 7. Az elemekhez egyet adva a 2; 4; 6; 8 számokat kapjuk és a 2; 4; 8 tényleg egy mértani sorozat elemei. A 2 előtti elem 1, és az első három összege $1 + 2 + 4 = 7$.

A számtani sorozat 1010-edik eleme: $a_{1010} = 1 + 1009 \cdot 2 = 2019$.

b) I. megoldás. Az elemeket kiszámolva kapjuk, hogy $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_3 = 13$; $a_4 = 40$; $a_5 = 121$. Azt vehetjük észre, hogy ha a sorozat elemeit megszorozzuk 2-vel:

$$2 \cdot a_1 = 2; \quad 2 \cdot a_2 = 8; \quad 2 \cdot a_3 = 26; \quad 2 \cdot a_4 = 80; \quad 2 \cdot a_5 = 242,$$

akkor mindig egy három hatványnál eggyel kisebb számot kapunk. Tehát az a sejtés, hogy $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$. Alkalmazva a képzési szabályt:

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1 = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 1}{2},$$

azaz igaz volt sejtésünk. Így a keresett elem:

$$a_{2020} = \frac{3^{2020} - 1}{2}.$$

II. megoldás. Alakítsuk át az összefüggést:

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1, \qquad a_{n+1} + \frac{1}{2} = 3 \cdot a_n + \frac{3}{2}, \qquad a_{n+1} + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(a_n + \frac{1}{2}\right).$$

Ezt felírva n-től 2-ig:

$$a_n + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(a_{n-1} + \frac{1}{2}\right), \qquad a_{n-1} + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(a_{n-2} + \frac{1}{2}\right),$$

$$a_{n-2} + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(a_{n-3} + \frac{1}{2}\right), \qquad \ldots \qquad a_2 + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(a_1 + \frac{1}{2}\right),$$

majd összeszorozva

$$a_n + \frac{1}{2} = 3^{n-1} \cdot \left(a_1 + \frac{1}{2}\right) = 3^{n-1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3^n, \qquad a_n = \frac{3^n - 1}{2},$$

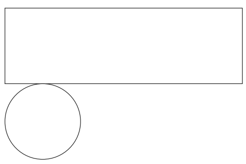
és innen
$$a_{2020} = \frac{3^{2020} - 1}{2}.$$

III. megoldás (vázlat/ötlet). Az elemeket kiszámolva $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_3 = 13$; $a_4 = 40$; $a_5 = 121$. Észrevehető, hogy a sorozat elemeinek különbsége
$$a_2 - a_1 = 3; \quad a_3 - a_2 = 9; \quad a_4 - a_3 = 27; \quad a_5 - a_4 = 81,$$
vagyis minden különbség az előző különbség háromszorosa, ami adódik az
$$\begin{cases} a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 1 \\ a_{n-1} = 3 \cdot a_{n-2} + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_n - a_{n-1} = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} = 3(a_{n-1} - a_{n-2})$$
átalakításból is. Innen az elemek:
$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1 + 3, \qquad a_3 = 1 + 3 + 3^2, \qquad a_4 = 1 + 3 + 3^2 + 3^3, \quad \ldots$$
$$a_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1},$$
és adódik a zárt alak.

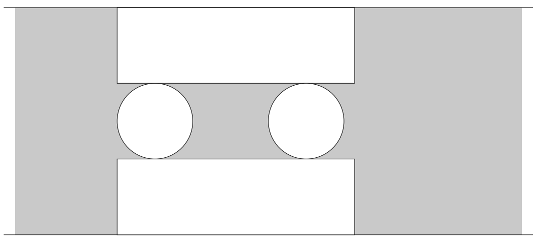
II. rész

5. *a*) *Legyen a és b nemnegatív valós szám. Bizonyítsuk be, hogy*
$$0 \leqslant \frac{(a+1)(b+1)}{a^2 + b^2 + 2} \leqslant 1.$$
Írhatunk-e a nulla helyett nála nagyobb számot? (*9 pont*)

b) *Egy felül nyitott fémdobozt lemezből állítunk elő úgy, hogy az* 1. ábrán *látható módon kivágunk, majd összehajtogatunk egy ilyen alakot.*



1. ábra



2. ábra

A kivágást egy 30 cm-*es széles fémszalagból végezzük úgy, hogy* 2 *ilyen mintát fordítunk egymással szembe a* 2. ábra *szerint. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy a kikerülő fémdoboz a lehető legnagyobb térfogatú legyen?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A nevező biztosan pozitív, hiszen $a^2 + b^2 + 2 \geqslant 2 > 0$. Nézzük a dupla egyenlőtlenség bal oldalát. A vizsgálandó kifejezés számlálója és nevezője is pozitív, így maga a tört is.

Legyen a kicsi és $b = n$ nagy szám. Ekkor

$$0 \leqslant \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} = \frac{(a+1)(n+1)}{a^2+n^2+2} < \frac{2\cdot(n+1)}{n^2-1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{2}{n-1},$$

$$\frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} < \frac{2}{b-1}, \qquad 0 \leqslant \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} < \frac{2}{b-1},$$

ami azt jelenti, hogy a tört akármilyen kicsi tud lenni, így a bal oldalon nem lehet nulla helyett nagyobb számot írni. Egyenlőség semmilyen a, b érték esetén nem teljesül.

Rendezzük az egyenlőtlenség jobb oldalát:

$$\begin{aligned}
\frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} &\leqslant 1,\\
(a+1)(b+1) &\leqslant a^2+b^2+2,\\
ab+a+b+1 &\leqslant a^2+b^2+2,\\
ab+a+b &\leqslant a^2+b^2+1,\\
2a+2b+2ab &\leqslant 2a^2+2b^2+2,\\
0 &\leqslant a^2-2a+1+b^2-2b+1+a^2-2ab+b^2,\\
0 &\leqslant (a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2.
\end{aligned}$$

Az utolsó sor biztosan igaz, hiszen három szám négyzetének összege nem lehet negatív. Mivel a lépések megfordíthatóak, ezért az eredeti egyenlőtlenség is igaz.

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha egyidejűleg mind a három négyzetszám nulla, azaz $a = b = 1$.

b) Legyen a kivágandó körlemez sugara r, ekkor a fémdoboz magassága

$$m = \frac{30-2r}{2} = 15 - r$$

lesz. A térfogata $V = r^2 m\pi = r^2(15-r)\pi$, ahol $0 \leqslant r \leqslant 15$.

Tekintsük az $f : [0;15] \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2(15-x)$ függvényt. Ennek keressük a maximumát. Egy zárt intervallumon folytonos függvénynek van szélsőértéke. Mivel $f(0) = f(15) = 0$, ezért a maximumát az intervallum belső pontjában veszi fel.

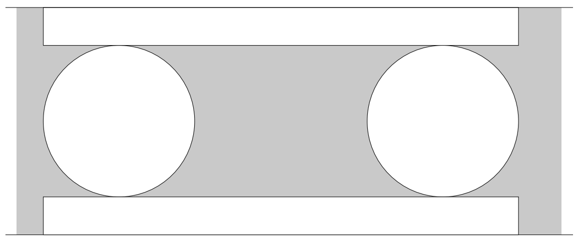
$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2(15-x) = 15x^2 - x^3,\\
f'(x) &= 30x - 3x^2,\\
f''(x) &= 30 - 6x.
\end{aligned}$$

Ott lehet maximuma, ahol $f'(x) = 0$ és $f''(x) < 0$.

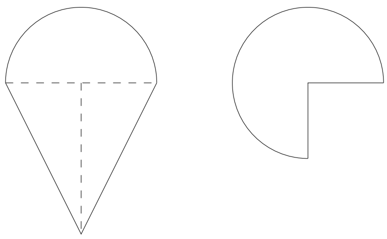
$$f'(x) = 30x - 3x^2 = 3x(10-x) = 0.$$

Csak az $x = 10$ jöhet szóba, ekkor $f''(10) = 30 - 6 \cdot 10 = -30 < 0$; azaz $x = 10$-ben tényleg maximuma van a függvénynek, a maximális értéke $f(10) = 10^2(15 - 10) = 500$. Kaptuk, hogy $V = r^2(15 - r)\pi \leqslant 500\pi$ és a maximuma $r = 10$ esetén lesz, a térfogata ekkor 500π cm^3.

A méretarányos rajz ezek szerint:



6. *a*) *Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely egyidejűleg érinti az $y = x^2$ és $y = -x^2 + 4x - 2$ parabolákat.* (*9 pont*)



b) *A magyar GúgLi Kft. egy emblémát tervez a székházuk elé, amely egy félbevágott gömb és egy kúp összetételéből áll. Az emblémának függőlegesen a negyede ki van vágva úgy, hogy a két vágósík az embléma függőleges tengelye mentén metszi egymást. Az embléma keresztmetszete és a függőleges metszete az* ábrán *látható.*

A kúp magassága éppen a félbevágott gömb sugarának a kétszerese. Betonból szeretnék elkészíttetni majd lefesteni a 1,5 m *magasságúra tervezett emblémát.*

– Mennyi beton szükséges az elkészítéséhez, ha az elkészítés folyamán 15% *veszteséggel számolhatunk?*

– Mekkora lesz az elkészült embléma tömege?

– Hány m^2*-re elegendő festéket kell beszerezniük, ha az időjárás ellen háromszor szeretnék lefesteni és a festés során keletkező veszteség* 5%? (*7 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Határozzuk meg egy a pontban az $y = x^2$ érintőjét. Az érintő meredeksége: $y' = 2x$; $m = 2a$. Ez átmegy az $(a; a^2)$ ponton, így az érintő: $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$. Ezen egyenesnek és az $y = -x^2 + 4x - 2$ parabolának 1 metszéspontja (érintési pont) van. Keressük ezt meg, azaz oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2, \\ y = -x^2 + 4x - 2. \end{cases}$$

$$2ax - a^2 = -x^2 + 4x - 2,$$

$$x^2 + (2a - 4)x - (a^2 - 2) = 0.$$

Mivel az egyenes érintő, ennek a másodfokú egyenletnek csak egy valós szám lehet a megoldása, tehát a diszkriminánsa nulla:

$$0 = D = (2a-4)^2 + 4(a^2-2) = 8a^2 - 16a + 8 = 8(a-1)^2,$$

vagyis $a = 1$ és a keresett érintő $y = 2x - 1$.

II. megoldás. Határozzuk meg egy a pontban az $y = x^2$ érintőjét. Az érintő meredeksége: $y' = 2x$; $m = 2a$. Ez átmegy az $(a; a^2)$ ponton, így az érintő

$$y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2.$$

Határozzuk meg most egy b pontban az $y = -x^2 + 4x - 2$ érintőjét. Az érintő meredeksége: $y' = -2x + 4$, $m = -2b + 4$. Ez átmegy a $(b; -b^2 + 4b - 2)$ ponton, így az érintő:

$$y = (-2b+4)(x-b) - b^2 + 4b - 2 = (-2b+4)x + b^2 - 2.$$

Ha közös az érintő, akkor ugyanaz az egyenes egyenlete, azaz

$$y = 2ax - a^2, \qquad y = (-2b+4)x + b^2 - 2.$$

$$\begin{cases} 2a = -2b + 4, \\ -a^2 = b^2 - 2. \end{cases}$$

Megoldva az egyenletrendszert:

$$2a = -2b + 4, \qquad a = -b + 2, \qquad -(-b+2)^2 = b^2 - 2,$$
$$-b^2 + 4b - 4 = b^2 - 2, \qquad 0 = 2b^2 - 4b + 2, \qquad 0 = b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2,$$
$$b = 1, \qquad a = 1.$$

Innen a közös érintő: $y = 2x - 1$.

b) A félgömb sugara legyen r, ekkor a kúp magassága $2r$. Az egész embléma magassága így $3r$, ami a feladat szerint 1,5 m: $3r = 1{,}5$, $r = 0{,}5$. Nézzük a térfogatot. A kivágott félgömb térfogata:

$$V_{\text{félgömb}} = \frac{4r^3\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{r^3\pi}{2}.$$

A kivágott kúp térfogata:

$$V_{\text{kúp}} = \frac{r^2\pi \cdot 2r}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{r^3\pi}{2}.$$

Az embléma térfogata:

$$V_{\text{embléma}} = V_{\text{félgömb}} + V_{\text{kúp}} = \frac{r^3\pi}{2} + \frac{r^3\pi}{2} = r^3\pi.$$

Ez a beton térfogatának a 85%-a:

$$0{,}85 \cdot V_{\text{beton}} = r^3\pi, \qquad V_{\text{beton}} = r^3\pi \cdot \frac{20}{17} \approx 0{,}462\ \text{m}^3.$$

Az embléma tömege (2400 kg/m^3-es beton sűrűséget használva) $0{,}462 \cdot 2400 = 1108{,}8$ kg.

Nézzük a felszínt. A kivágott félgömb felszíne:

$$A_{\text{félgömb}} = \frac{4r^2\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{r^2\pi}{2} = 2r^2\pi.$$

Az alkotó $r\sqrt{5}$, így a kivágott kúp felszíne:

$$A_{\text{kúp}} = \frac{2r\pi \cdot \sqrt{5}r}{2} \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{2r \cdot r}{2} = \frac{3r^2\pi \cdot \sqrt{5}}{4} + 2r^2 = \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8}{4} \cdot r^2.$$

Az embléma felszíne:

$$A_{\text{embléma}} = A_{\text{félgömb}} + A_{\text{kúp}} = 2r^2\pi + \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8}{4} \cdot r^2 = \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8\pi + 8}{4} \cdot r^2.$$

Háromszor kell festeni és a festék 95%-a hasznosul:

$$0{,}95 \cdot A_{\text{festék}} = 3 \cdot \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8\pi + 8}{4} \cdot r^2,$$

$$A_{\text{festék}} = 60 \cdot \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8\pi + 8}{76} \cdot r^2 \approx 10{,}7\ \text{m}^2.$$

7. *a*) 18 *tudós e-mail segítségével tartja a kapcsolatot a világban. Bármely két tudós egymással angol, német vagy orosz nyelven levelezik, mindig ugyanazt a nyelvet használják egymás között. Tudjuk, hogy nincs három olyan tudós, aki egymás között angol, vagy orosz nyelvet használ. Bizonyítsuk be, hogy létezik közöttük három, akik egymással németül leveleznek.* (*9 pont*)

b) *Aladár négyjegyű számokat ír fel egy papírlapra, melyek csak az* 1; 2; 3 *és* 4 *számjegyeket tartalmazhatják (lehet ismétlődés, nem kell minden számjegyet felhasználni minden négyjegyű számban). Figyel arra, hogy* 1*-es után csak* 4*-es, páros számjegy után csak páratlan jegy következhet. Hányféle számot tud leírni így?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A feladatot általánosan oldjuk meg: ha 18 tudós 3 nyelvet használ, akkor biztosan van olyan nyelv, amit 3 tudós egymás között használ.

A használt nyelvek legyenek A, B és C. Tekintsük az egyik tudóst, ő 17 másikkal levelez. A skatulyaelv miatt lesz olyan nyelv (legyen ez az A nyelv), amin legalább 6 másik tudóssal levelez. Ha a 6 levelező partner között van kettő, akik egymással az A nyelven leveleznek, akkor készen vagyunk, hiszen találtunk három tudóst, aki az A nyelven leveleznek egymás között.

Ha ez nem teljesül, akkor ez a 6 tudós egymás között csak a B és C nyelvet használja. Tekintsünk most ebből a hat tudósból egyet, aki a másik öttel levelez.

A skatulyaelv miatt biztosan van olyan nyelv (legyen ez a B nyelv), amit legalább 3 másikkal használ. Ezen másik három most egymás között ha használja a B nyelvet, akkor találunk három tudóst, aki a B nyelvet használja, ha meg nem, akkor ők egymás között a C nyelvet használják, és ezért vagyunk készen.

Ezt a feladatra alkalmazva adódik az állítás.

b) Építsük fel balról jobbra a számokat.

Jelölje $f_1(n)$ az n hosszúság esetén az 1-esre végződő számok számát.

Jelölje $f_2(n)$ az n hosszúság esetén az 2-esre végződő számok számát.

Jelölje $f_3(n)$ az n hosszúság esetén az 3-asre végződő számok számát.

Jelölje $f_4(n)$ az n hosszúság esetén az 4-esre végződő számok számát.

Ekkor

$$\begin{aligned} f_1(1) &= f_2(1) = f_3(1) = f_4(1) = 1 \quad \text{és} \\ f_1(2) &= f_2(1) + f_3(1) + f_4(1), \\ f_2(2) &= f_3(1), \\ f_3(2) &= f_2(1) + f_3(1) + f_4(1), \\ f_4(2) &= f_1(1) + f_3(1), \quad \text{illetve} \\ f_1(n+1) &= f_2(n) + f_3(n) + f_4(n), \\ f_2(n+1) &= f_3(n), \\ f_3(n+1) &= f_2(n) + f_3(n) + f_4(n), \\ f_4(n+1) &= f_1(n) + f_3(n). \end{aligned}$$

Táblázatba foglalva:

n	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f_3(n)$	$f_4(n)$	Összes
1	1	1	1	1	4
2	3	1	3	2	9
3	6	3	6	6	21
4	15	6	15	12	48

Tehát 48 ilyen számot tud felírni.

Megjegyzés. Ha S_n-nel jelöljük az összeget, akkor arra igaz, hogy

$$S_1 = 4; \quad S_2 = 9; \quad S_n = S_{n-1} + 3 \cdot S_{n-2}; \quad n \geqslant 3.$$

8. *a*) *Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egészek halmazán:*

$$2 \cdot (x; y) + 17 \cdot [x; y] = 257,$$

ahol a „kerek” zárójel a két szám legnagyobb közös osztóját, a „szögletes” zárójel pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli. (*9 pont*) *b) Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai* 2 *és* 14*, szárai* 10 *egység hosszúak. Meghúzzuk a belső szögeinek szögfelezőjét, amelyek egy négyszöget zárnak be. Amennyiben ennek a négyszögnek létezik a beírt és körülírt köre, mekkora ezen körök sugara?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A legnagyobb közös osztóban a közös prímek, a legkisebb közös többszörösben az összes prím, tehát a legnagyobb közös osztó prímjei is szerepelnek; és a legnagyobb közös osztóban levő prímek kitevője nem lehet nagyobb a legkisebb közös többszörösben szereplő prímek kitevőjénél. Ezért $(x;y) \mid [x;y]$. Az egyenlet bal oldala osztható $(x;y)$-nal, tehát a jobb oldal is: $(x;y) \mid 257$. Mivel 257 prím, ezért két eset van.

I. eset: $(x;y) = 257$.

$$2 \cdot (x;y) + 17 \cdot [x;y] = 257, \qquad 2 \cdot 257 + 17 \cdot [x;y] = 257, \qquad 17 \cdot [x;y] = -257.$$

Ekkor a legkisebb közös többszörösre negatív szám adódik (de még egésznek sem egész), tehát ez nem lehet.

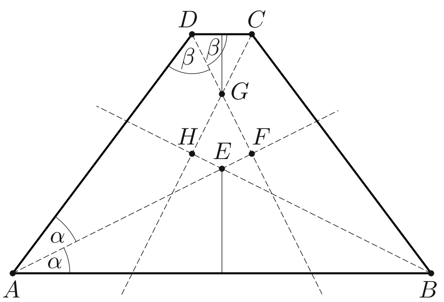
II. eset: $(x;y) = 1$.

$$2 \cdot (x;y) + 17 \cdot [x;y] = 257, \qquad 2 \cdot 1 + 17 \cdot [x;y] = 257,$$
$$17 \cdot [x;y] = 255, \qquad [x;y] = 15,$$

azaz olyan számokat keresünk, amelyek relatív prímek és csak 3-as és 5-ös prímeket tartalmazhatnak, mert a legkisebb közös többszörös a 15.

Négy lehetőség van:

x	1	15	3	5
y	15	1	5	3



b) Készítsünk *ábrát.* Jelöljünk meg pár szöget és bocsássunk merőlegest a G és E pontokból a megfelelő alapokra.

A trapéz magassága

$$10^2 = m^2 + \left(\frac{14-2}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad m = 8.$$

A szögekre pedig

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \quad \alpha + \beta = 90^\circ.$$

A szimmetrikus trapéz miatt a keletkezett négyszög szimmetrikus a GE egyenesre és konvex, tehát deltoid. A konvex deltoidoknak van beírt köre (szembeni oldalak összege megegyezik).

$AFD\sphericalangle = BHC\sphericalangle = 90^\circ$, ugyanis a trapéz egy szárán levő szögek összege 180°, így a szögfelezők 90°-os szöget zárnak be. Tehát a négyszögünk 2 szemközti szögének összege 180°, így van köré írt köre is.

Derékszögű háromszögekben számolva:

$$AE = \frac{7}{\cos\alpha}, \qquad AF = 10 \cdot \cos\alpha, \qquad EF = 10 \cdot \cos\alpha - \frac{7}{\cos\alpha},$$

$$DG = \frac{1}{\cos\beta}, \qquad DF = 10 \cdot \cos\beta, \qquad GF = 10 \cdot \cos\beta - \frac{1}{\cos\beta}.$$

$EFG\triangle$ derékszögű és az átfogója a négyszög köré írt kör sugarának a kétszerese, azaz

$$(2R)^2 = EF^2 + GF^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{EF^2 + GF^2}.$$

A beírt körre igaz, hogy

$$t = \frac{k \cdot r}{2}, \qquad 2 \cdot \frac{EF \cdot GF}{2} = r \cdot \frac{(2 \cdot EF + 2 \cdot GF)}{2}, \qquad r = \frac{EF \cdot GF}{EF + GF}.$$

Az adatokat behelyettesítve kapjuk: $r = 0{,}745$; $R = 1{,}25$.

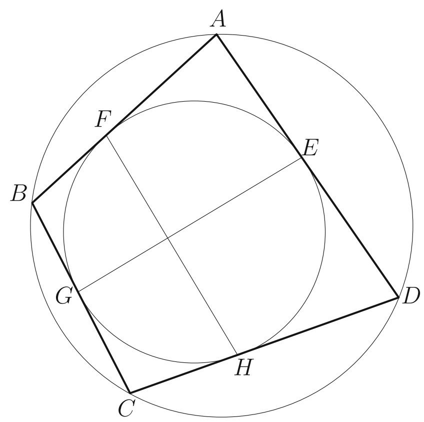
9. *a) Bizonyítsuk be, hogy*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3},$$

ahol $n \in \mathbb{N}^+$. *(8 pont)*

b) Adott egy olyan húrnégyszög, ami egyben érintőnégyszög is.

Az ábrán jelöltük az érintési pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az EG *és* FH *szakaszok merőlegesek egymásra.* *(8 pont)*



Megoldás. *a)* Teljes indukcióval bizonyítunk.

I. Nézzük meg, hogy teljesül-e a bizonyítandó állítás az $n = 1$ és $n = 2$ esetre:

$$n = 1 \qquad 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2,$$

$$n = 2 \qquad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 8.$$

II. Tegyük fel, hogy $n = k$-ig minden értékre teljesül, hogy

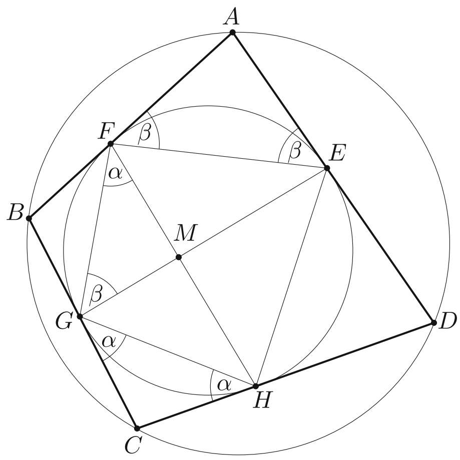
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k \cdot (k+1) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3}.$$

III. Nézzük az $n=k+1$ esetet, induljunk ki a bal oldalból:

$$\begin{aligned}1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k\cdot(k+1) + (k+1)\cdot(k+2) &= \\ = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}{3} + (k+1)\cdot(k+2) &= \\ = (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right) = (k+1)(k+2)\tfrac{k+3}{3} &= \\ = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3},&\end{aligned}$$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k\cdot(k+1) + (k+1)\cdot(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Ezt akartuk kapni, tehát a bizonyítás kész.



b) Húzzuk meg a FG, GH, HE és EF szakaszokat. $HFG\sphericalangle = CGH\sphericalangle = CHG\sphericalangle = \alpha$, mivel mind a GH szakasz kerületi vagy érintő szárú kerületi szögei. Tehát $GCH\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$.

$FEA\sphericalangle = EFA\sphericalangle = FGE\sphericalangle = \beta$, mivel mind az FE szakasz kerületi vagy érintő szárú kerületi szögei. Tehát $EAF\sphericalangle = 180^\circ - 2\beta$.

Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, ezért a szemben fekvő szögeinek összege 180°, tehát

$$180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ,$$

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Innen $GMF\sphericalangle = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$ és ezt kellett bizonyítani.

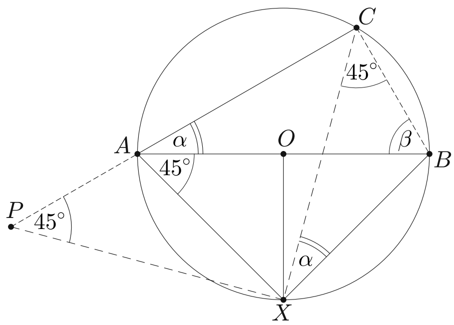
Szoldatics József
Budapest

Matematika feladat megoldása

B. 5023. *Az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle = 90^\circ$ és $AC > BC$. A háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívének felezőpontja X. A CX-re X-ben állított merőleges a CA egyenest a P pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $AP = BC$.*

(*3 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

Megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy az XAP és XBC háromszögek egybevágók. Ebből azonnal adódik, hogy $BC=AP$. Mivel $BXA\sphericalangle = CXP\sphericalangle = 90°$, ezért mindkettőből kivonva a $CXA\sphericalangle$ szöget, látjuk, hogy $BXC\sphericalangle = AXP\sphericalangle$. Az X pont az AB ív felezőpontja, ezért $XA=XB$. Végül felhasználva, hogy $BCAX$ húrnégyszög:



$$XBC\sphericalangle = 180° - XAC\sphericalangle = XAP\sphericalangle.$$

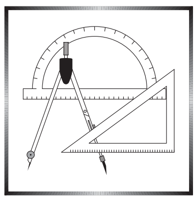
A két háromszögnek egy-egy oldala és a rajta fekvő szögek megegyeznek, tehát a két háromszög egybevágó. Így oldalaik páronként egyforma hosszúságúak, vagyis $BC=AP$.

Vu Phuong Nam (High School for The Gifted, VNU-HCM, Ho Si Minh-város, 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A két háromszög egybevágóságának bizonyításához az is felhasználható, hogy az ábrán jelzett szögek $BCX\sphericalangle = XCA\sphericalangle = BAX\sphericalangle = APX\sphericalangle = 45°$.

Összesen 74 dolgozat érkezett. 3 pontos 52, 2 pontos 19 tanuló dolgozata. 1 pontot 3 tanuló kapott.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1602–1608.)



Feladatok 10. évfolyamig

C. 1602. Két tizedikes és két tizenegyedikes diák nekiült az áprilisi KöMaL C feladatok megoldásának*. Egy óra elteltével azt vették észre, hogy minden feladatra pontosan egyvalaki tudott megoldást adni közülük, valamint, hogy mindenki megoldott legalább egy feladatot. Hányféle felosztásban dolgozhattak a példákon, ha mindenki csak a saját korosztályának megfelelő feladatokkal foglalkozott? (Különbözőnek tekintünk két felosztást, ha van legalább egy feladat, amit más old meg.)

*Minden hónapban hét gyakorlatot tűzünk ki, ebből az 1–5. gyakorlatokra a legfeljebb 10. évfolyamosok, a 3–7. gyakorlatokra pedig a 11–12. évfolyamosok küldhetnek be megoldást.

C. 1603. Az ABC egyenlőszárú háromszög A csúcsából induló magasságvonal a BC szárt T-ben metszi, a magasságpontot jelölje M, a beírt körének középpontját pedig O. Bizonyítsuk be, hogy ha az OT egyenes párhuzamos az AB alappal, akkor $MC = 2AM$.

Feladatok mindenkinek

C. 1604. A mezőgazdasági kiállításon és vásáron egy termelő az általa előállított vetőmaggal jelentkezett. Összesen 1225 csomagot hozott: 1 db 1 grammos, 2 db 2 grammos, 3 db 3 grammos, $\ldots$, k db k grammos csomagot – 1-től k-ig minden pozitív egész szám előfordul. Átlagosan hány gramm vetőmag volt egy csomagban?

C. 1605. Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja M. Az ABM háromszög területe nagyobb a CDM háromszög területénél. A négyszög BC oldalának felezőpontja P, CD oldalának felezőpontja pedig Q, $AP + AQ = \sqrt{2}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $ABCD$ négyszög területe kisebb, mint 1.

C. 1606. Egy téglatest két oldallapjának területe 40, illetve 56 területegység. A testátló hossza $\sqrt{138}$ egység. Mekkora lehet a téglatest felszíne, illetve térfogata?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

Feladatok 11. évfolyamtól

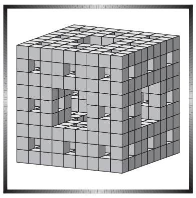
C. 1607. A 4 és a 9 közé leírunk néhány 4-est, majd mellé még ugyanannyi 8-ast (például 4489). Bizonyítsuk be, hogy az így kapott szám négyzetszám.

C. 1608. Jelmezbálra szeretnénk elkészíteni kartonból egy vietnámi kalapot. A kalap egy 97,18° nyílásszögű egyenes körkúp, amelynek alkotója 28 cm hosszú. Elkészíthető-e egy ilyen méretű kalap a kereskedelemben kapható 50×70 cm-es kartonpapírból?

❄

Beküldési határidő: 2020. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5094–5101.)

B. 5094. Igazoljuk, hogy ha két derékszögű háromszög területe és kerülete megegyezik, akkor egybevágók.

(*3 pont*) *Kiss Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5095. Legyenek a, b, c nullától különböző egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\frac{ab}{c}$, $\frac{bc}{a}$ és $\frac{ca}{b}$ számok összege egész, akkor külön-külön is egészek.

(*3 pont*) *George Stoica* (Saint John, Kanada)

B. 5096. Az ABC egységnyi oldalú szabályos háromszögben legyen P a beírható körvonal tetszőleges pontja. Jelölje a P pont merőleges vetületét a BC, AC és AB oldalakra rendre D, E, illetve F. Igazoljuk, hogy a DEF háromszög területe P választásától független állandó.

(*4 pont*)

B. 5097. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív számok szorzata 1. Igazoljuk, hogy

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 \geqslant x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3.$$

(*4 pont*) *Dinu Ovidiu-Gabriel* (Bălceşti, Románia)

B. 5098. Kezdő és Második a következő játékot játsszák:

Kezdő gondol egy 2020-nál nem nagyobb pozitív egészre, amit Második úgy szeretne kitalálni, hogy mindig egy konkrét számra kérdez rá.

Kezdő lehetséges válaszai Második kérdéseire: „Kisebb számra gondoltam."; „Eltaláltad."; „Nagyobb számra gondoltam."

Ha a válasz „Kisebb számra gondoltam", vagy „Eltaláltad", akkor Második 10 forintot fizet Kezdőnek, míg abban az esetben, ha a válasz „Nagyobb számra gondoltam", akkor 20 forintot fizet.

Mennyi az a legkisebb összeg, amennyiért Második biztosan ki tudja találni Kezdő számát és hogyan kell ehhez játszania?

(A játék az első „Eltaláltad" válaszig tart, akkor is, ha a legutolsó kérdés előtt Második már tudja mi a gondolt szám.)

(*5 pont*)

B. 5099. Az $ABCD$ rombusz A-nál lévő szöge $60°$. A rombuszba olyan ellipszist írtunk, amelynek tengelyei a rombusz átlói, továbbá az AB és AD oldalakat az A-hoz, a BC és CD oldalakat a C-hez közelebbi negyedelőpontjaikban érinti. Legyen P az ellipszis egy mozgó pontja. Metsszük el a rombusz mindkét középvonalát a P ponton keresztül húzott, a másik középvonallal párhuzamos egyenessel; jelöljük az így kapott metszéspontokat Q-val, illetve R-rel. Mutassuk meg, hogy a QR szakasz hossza nem függ a P pont helyzetétől.

(*5 pont*)

B. 5100. Mutassuk meg, hogy n szomszédos egész szám közül mindig kiválasztható néhány (legalább egy), melynek összege osztható $(1 + 2 + \ldots + n)$-nel.

(*6 pont*) *Kovács Benedek* és *Várkonyi Zsombor* ötletéből

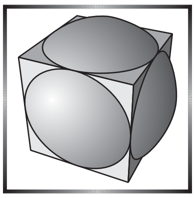
B. 5101. Adott egy $ABCDO$ négyoldalú gúla, és az $ABCD$ alaplap belsejében egy P pont. Egy O-ra nem illeszkedő sík az OA, OB, OC, OD és OP egyeneseket rendre az A', B', C', D', illetve P' pontokban metszi. Igazoljuk, hogy

$$\frac{t_{PAB} \cdot t_{PCD}}{t_{PBC} \cdot t_{PDA}} = \frac{t_{P'A'B'} \cdot t_{P'C'D'}}{t_{P'B'C'} \cdot t_{P'D'A'}}.$$

(t_{XYZ} az XYZ háromszög területét jelöli.)

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2020. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (775–776.)

A. 775. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^3$ olyan, hogy H bármely pontját H bármely másik pontjára tükrözve ismét H-beli pontot kapunk. Igazoljuk, hogy H sűrű $\mathbb{R}^3$-ban, vagy vannak egymástól egyenlő távolságra lévő párhuzamos síkok, amelyek lefedik H-t.

Javasolta: *Kurusa Árpád* (Szeged) és *Totik Vilmos* (Szeged)

A. 776. Legyen $k > 1$ egy rögzített páratlan szám, és ha n nemnegatív egész, legyen

$$f_n = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ k \mid n-2i}} \binom{n}{i}.$$

Bizonyítsuk be, hogy f_n kielégíti a következő rekurziót:

$$f_n^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i f_{n-i}.$$

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

Beküldési határidő: 2020. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok

I. 508. A Föld felszínét műholdakról fényképezik. A felszínen a különböző eszközök pozicionálásához jeladók működnek. A jeladók be- és kikapcsolt állapotban lehetnek.

A felszín egy négyzet alakú területét vizsgáljuk, amelyet gondolatban egy 100×100-as négyzethálóval borítunk. Erről a területről több fénykép készült. Minden kép egy négyzet alakú területet ábrázol, melyet középpontjának koordinátáival és az oldalhosszúság felének nagyságával rögzít a műhold. Minden kép minden oldala párhuzamos a négyzetháló valamely egyenesével. Készítsünk programot `i508` néven, amely a következő kérdésekre ad választ:

1. Milyen sorszámú jeladó(k) van(nak) többször lefényképezve a megadott területen belül?
2. Milyen sorszámú képek(en) van egynél több működő jeladó?
3. Mekkora területről nem készült kép?

A program standard bemenetének első sorában N ($N \leqslant 100$) a fényképek száma és M ($M \leqslant 100$) a jeladók száma. A következő N sorban egy-egy képet leíró három egész szám szerepel: a kép középpontjának (x, y) koordinátája ($1 \leqslant x, y \leqslant 100$) és a kép oldalhosszának fele ($1 \leqslant h \leqslant 10$). Azaz a négyzet alakú kép két szemközti csúcsa $(x-h, y-h)$ és $(x+h, y+h)$ koordinátákkal bír. A következő M sorban egy-egy jeladót leíró három szám szerepel egy-egy szóközzel elválasztva: az első két szám a jeladó (`xjel`, `yjel`) koordinátája ($1 \leqslant$ `xjel`, `yjel` $\leqslant 100$) és a harmadik a jeladó állapotát jelzi (`1` bekapcsolt és `0` kikapcsolt).

A program standard kimenetén a három kérdésre adott válasz jelenjen meg soronként. Ha egy kérdésre nincs válasz, akkor üres sort írjunk ki.

Bemenet (a / jel a sortörést helyettesíti):	Kimenet
`6 4 / 10 10 2 / 20 20 4 / 30 10 2 / 10 30 3 /`	`2 3`
`38 38 3 / 22 22 1 / 9 11 0 / 23 21 1 / 22 23 1`	`2 6`
`/ 31 11 1`	`9771`

Beküldendő egy tömörített `i508.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 509 (É). A keszegfalvai horgásztavat a helyi horgászegyesület kezeli. Az egyesület vezetősége úgy döntött, hogy felméri a tó vízmélységét. Az adatokat egy 1 m × 1 m-es rács mentén veszik fel méter pontossággal és egy táblázatban rögzítik. A mérési adatok egy *táblázatban* találhatók.

A táblázatban a szárazföld „mélysége” egységesen 0 méter.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	2	2	2	1	3	3	3	0	1	0	1	0
5	0	0	0	1	1	2	2	3	4	3	3	3	3	3	6	3	4	4
6	0	0	0	1	7	7	8	7	7	3	8	6	6	6	6	6	5	3
7	0	1	1	3	6	5	4	4	5	5	4	3	6	5	5	2	5	3
8	0	0	1	1	6	7	3	5	7	6	3	7	2	3	5	6	3	3
9	0	0	0	1	7	3	6	6	8	7	6	4	5	3	5	5	4	3
		0			2		3	3		4			4					

1. Töltsük be a táblázatkezelő program egyik munkalapjára az A1-es cellától kezdve a `meres.txt` UTF-8 kódolású, tabulátorokkal tagolt adatfájlt, majd mentsük a munkafüzetet `horgaszto` néven a program alapértelmezett formátumában.

	AT	AU
1		
2	A tó alapterülete:	666 m²
3	A tóban lévő víz:	2992 m³
4	A tó átlagos mélysége:	4,50 m
5		
6	A tó legnagyobb mélysége	26 m
7	A kürtő helye:	U12

2. A halak telepítése szempontjából fontos adat a tó felületének nagysága és a tóban lévő víz mennyisége. Határozzuk meg e két adat közelítő értékét az AU2:AU3 tartomány celláiban azt feltételezve, hogy a mért mélységadatok a teljes 1 m $\times$ 1 m-es szelvényre vonatkoznak.
3. Mennyi a tó átlagos mélysége? Az eredményt két tizedesjegy pontossággal kifejezve írassuk az AU4-es cellába.
4. Az AU2:AU4 tartomány adatai a feladat szövegének megfelelő mértékegységben jelenjenek meg, azaz a felület m^2-ben, a térfogat m^3-ben, az átlagos mélység m-ben.
5. A falu öregjeitől származó szájhagyomány szerint a tó egy nagyon mély kürtőből nyeri a vizét. Ezt a mérések is igazolták. Milyen mély itt a tó, és hol van ez a kürtő? Az adatokat írassuk az AU6:AU7 tartomány celláiba a mintának megfelelően.
6. Állítsuk be az A:AP oszlopok szélességét úgy, hogy a tó mélységadatait tartalmazó cellák szélessége és magassága megegyezzen.

tó mélysége (m)	háttérszín
1	világoskék
2–3	világoszöld
4–6	sárga
7–20	narancs
21–	halványvörös

7. Feltételes formázással emeljük ki a tó mélységének megfelelően az egyes cellák háttérszínét a *táblázat* szerint.
8. A geológusok a tó „vízszintes" metszetét szeretnék egy adott sor mentén grafikonon ábrázolni. Írjunk

ehhez az AR29-es cellába egy sorszámot, és jelenítsük meg az adott sor értékeit az A29:AP29 tartományban. Készítsünk az így kapott adatokból PontXY diagramot (grafikont), a diagram címe legyen Metszet.

Beküldendő egy tömörített `i509.zip` állományban a megoldást adó táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja a felhasznált táblázatkelő nevét és verzióját.

I. 510. Az iskolák jelenleg távoktatásban működnek. A tanítás szervezésére a legtöbb tanulócsoportban virtuális osztályok jöttek létre, ahol a tanár-diák és diák-diák kommunikáció zajlik. A tudás megosztása, az ismeretek megszerzése, azok gyakorlása és számonkérése is sok esetben a virtuális térben, interneten történik. Ebben a feladatban azt kérjük, hogy a megoldó néhány otthoni iskolanapról készítsen naplót, illetve a napló alapján egy adatbázist. A napló tartalmazza időrendben az elvégzett tanulási tevékenységeket, az azokhoz használt hardver és egyéb eszközöket, alkalmazásokat, fölkeresett weboldalakat stb. Érdemes táblázatos elrendezést alkalmazni, amelyben időrendben és oszlopokra rendezve megtalálhatók a kért információk. Például:

Szerda 8:15–9:00	Fizika: Az elektromos mező szemléltetése erővonalakkal – online óra	Google Hangouts, a tanár MozaBookban rajzol és magyaráz	Számítógép, mobiltelefon, színes tollak, fizika füzet	Google kereső, „electric field” képtalálatok
...				
Szerda 15:00–15:30	Matematika házi feladat megoldása és beküldése	A kapott feladat megoldása a füzetben majd beküldése fényképként	Számítógép, mobiltelefon (fényképezésre)	Google Classroom, Google Fotók

A napló elkészítése után hozzunk létre adatbázist naplo néven, amelynek tábláiban megtalálhatók a megvalósításhoz használt eszközök és alkalmazások, az elvégzett tevékenységek, a tanulást tartalma (tantárgy és témakör), illetve az ezeket a dátum és időpontokkal összekapcsoló napló.

Beküldendő egy `naplo.pdf` állomány három egymás követő tanítási napról, valamint az az alapján készült adatbázis.

I/S. 44. Egy egész évben tartó versenysorozatban N autóversenyző vesz részt. Tudjuk, hogy az utolsó forduló előtt az i-edik versenyzőnek B_i pontja van. A verseny utolsó fordulójának első helyezettje N pontot, második helyezettje $N-1$ pontot és így tovább, utolsó helyezettje 1 pontot kap. Írjunk programot, amely az utolsó forduló előtti eredmények alapján megadja, hogy hány embernek van esélye az összetett győzelemre. Ha az első helyen pontegyenlőség lenne, akkor minden maximális pontszámú versenyzőt győztesnek tekintünk.

Bemenet: az első sor tartalmazza az autóversenyzők N számát. A második sor N darab számot tartalmaz: az i-edik szám azt jelenti, hogy az i-edik versenyzőnek az utolsó forduló előtti pontszáma B_i. A kimenet egyetlen szám, amely megadja, hogy hány versenyzőnek van esélye az összetett győzelemre.

Példa:

Bemenet	Kimenet
5 15 14 15 12 14	4

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 100\,000$, $1 \leqslant B_i \leqslant 10^9$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 1000$.

Beküldendő egy `is44.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 143. Adott egy irányított gráf, amelynek N csúcsa és M éle van. Semelyik két csúcs közt sincs egynél több közvetlen él (iránytól függetlenül). Nevezzük körsétának a csúcsok egy olyan x_1, x_2, x_n sorozatát, ahol $x_1 = x_n$ és minden $1 \leqslant i \leqslant n-1$ esetén létezik x_i-ből x_{i+1}-be mutató él, valamint a körséta során egy csúcson tetszőleges sokszor átmehetünk, de egy élen csak egyszer.

Legyen az ilyen körséták száma egy gráfban K. Kérdés, hogy legföljebb hány irányított élt húzhatunk be a gráfba úgy, hogy a körséták száma továbbra is K legyen, és semelyik két csúcs között ne legyen egynél több közvetlen él (iránytól függetlenül). A csúcsokat 1-től indexeljük.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N és M számot. A következő M sor mindegyike tartalmaz egy a_i és b_i számot, ami azt jelenti, hogy megy egy irányított él az a_i csúcsból a b_i csúcsba. *Kimenet:* adjuk meg a maximálisan behúzható élek számát.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesíti)	Kimenet
5 6 1 2 / 1 4 / 2 3 / 4 3 / 3 1 / 3 5	3

Korlátok: $1 \leqslant N, M \leqslant 10^5$. Időkorlát: 0,4 mp.

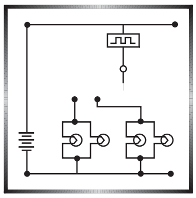
Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N, M \leqslant 100$.

Beküldendő egy `s143.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2020. május 10.

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 681. *Régészeti ásatások során jó állapotban a felszínre került egy színaranyból készült, egyenletes, kis falvastagságú, egyenes henger alakú, felül nyitott, 2 literes edény. A henger belső átmérője és a belső magassága ugyanakkora.*

Ha az üres edényt óvatosan egy tál vízbe helyezzük úgy, hogy a szimmetriatengelye mindvégig függőleges legyen, a test akkor kerül egyensúlyi helyzetbe, amikor a külső vízszint az edény belső magasságának $\frac{5}{8}$ *részénél helyezkedik el. Határozzuk meg az edény falvastagságát!*

(*3 pont*)

Megoldás. Jelöljük az edény belső átmérőjét (és az ezzel megegyező belső magasságát) d-vel. Az edény ismert ($V = 2000\ \mathrm{cm}^3$-es) térfogatából d kiszámítható:

$$\frac{d^2\pi}{4}d = V, \qquad \text{ahonnan} \qquad d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 13{,}7\ \mathrm{cm}.$$

Az úszó test egyensúlyban van, ezért a kiszorított víz súlya megegyezik a test súlyával. (Az edényben lévő levegő tömegét elhanyagolhatónak tekintjük.) Mivel az edény x falvastagsága a d átmérőhöz képest kicsi, az arany térfogatát $\frac{5}{8}V$ mellett elhanyagolhatjuk, vagyis a kiszorított víz térfogatát az edény vízbe merülő részének belső térfogatával közelíthetjük.

Az úszás feltétele:

$$\frac{5}{8}V\,\varrho_{\text{víz}}g = \left(\frac{d^2\pi}{4}\,x + d^2\pi\,x\right)\cdot\varrho_{\text{arany}}g,$$

vagyis az edény falvastagsága

$$x = \frac{V}{2\pi d^2}\,\frac{\varrho_{\text{víz}}}{\varrho_{\text{arany}}} = \frac{2000\ \mathrm{cm}^3}{2\pi\,(13{,}7\ \mathrm{cm})^2}\cdot\frac{1}{19{,}3} = 0{,}088\ \mathrm{cm} \approx 0{,}9\ \mathrm{mm}.$$

Schmercz Blanka (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. és Koll., 9. évf.) dolgozata alapján

46 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 18, hiányos (1 pont) 7, hibás 3, nem versenyszerű 2 dolgozat.

G. 690. *Az asztalon két teljesen egyforma pohár van színültig töltve vízzel. Az egyik pohárban a víz tetején egy pingponglabda úszik. Melyik pohár nyomja jobban az asztalt?*

(*3 pont*)

Megoldás. Az egyik pohár tele van vízzel, a másikban pedig pontosan annyival kevesebb víz van, amennyit a pingponglabda kiszorít. A kiszorított víz súlya megegyezik a pingponglabdára ható felhajtóerő ellenerejével, tehát a két pohár (vízzel és labdával együtt) egyforma súlyú. Ezek szerint a két pohár *ugyanakkora* erővel nyomja az asztalt.

Cynolter Dorottya (Budapest, Veres Pálné Gimn., 9. évf.)

76 dolgozat érkezett. Helyes 60 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 2, hiányos (1 pont) 9, hibás 3, nem versenyszerű 2 dolgozat.

G. 694. *Egy éppen* 100 kg *tömegű rakéta a világűrben másodpercenként* 100 g *égésterméket lövell ki. A gáz* 1 km/s *sebességgel hagyja el a rakéta fúvókáját. Mekkora a rakéta gyorsulása?*

(*3 pont*)

Megoldás. Az éppen $m=100$ kg tömegű, v sebességű rakétát $\Delta t=1$ s alatt $\Delta m=0{,}1$ kg tömegű égéstermék hagyja el a rakétához képest $u=1$ km/s sebességgel, és ennek következtében a rakéta sebessége Δv értékkel megváltozik. Az impulzusmegmaradás törvénye szerint

$$mv=(m-\Delta m)(v+\Delta v)-\Delta m(u-v),\quad \text{amiből}$$

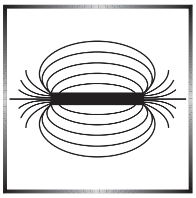
$$\Delta v=\frac{u}{m-\Delta m}\Delta m\approx\frac{u}{m}\Delta m.$$

A rakéta gyorsulása tehát

$$a=\frac{u}{m}\,\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{1000\ \text{m/s}}{100\ \text{kg}}\cdot\left(0{,}1\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}\right)=1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

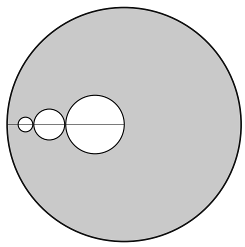
Egyházi Hanna (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. és Koll., 10. évf.)

51 dolgozat érkezett. Helyes 33 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 13, hiányos (1 pont) 2, hibás 3 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5165. *Egységsugarú, homogén, kör alakú lemezből az* ábrán *látható módon kivágunk egymást kívülről érintő, rendre* $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ *sugarú, középpontjukkal az egyik sugárra illeszkedő köröket. Hol lesz a maradék idom tömegközéppontja, ha*



a) csak a legnagyobb kört vágjuk ki;

b) a két legnagyobb kört vágjuk ki;

c) nagyon sok kört vágunk ki?

(*5 pont*) Közli: *Tupi Zoltán,* Budapest

Megoldás. A kis körök kivágása előtt az alakzat tömegközéppontja a nagy kör középpontjában volt. Egyre több kis kör kivágása után a maradék idom tömegközéppontja egyre inkább jobbra mozdul el.

Az eredeti kör sugara 1, területe $T=\pi$. Az n-edik kis kör sugara $x_n = (1/2)^{n+1}$, területe $T_n = (1/4)^{n+1}\pi$. A forgatónyomatékok egyensúlyából rendre kiszámolhatjuk, hogy mekkora y_n távolsággal tolódik el n darab kis kör kivágása után a maradék lemez tömegközéppontja. (A maradék rész forgatónyomatéka az eredeti lemez középpontjára vonatkoztatva nyilván ugyanakkora, mint amennyi a kivágott részek forgatónyomatéka volt.)

a) Ha csak a legnagyobb kört vágjuk ki, akkor (a lemez vastagságával, anyagának sűrűségével és g-vel egyszerűsítve) az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$T_1x_1 = (T-T_1)y_1,$$

ahonnan megkapjuk, hogy $y_1 = \frac{1}{60} \approx 0{,}017$ egység.

b) Két kördarab eltávolítása után a maradékra felírható:

$$T_1x_1 + T_2(2x_1+x_2) = (T-T_1-T_2)y_2,$$

ahonnan $y_2 = \frac{13}{472} \approx 0{,}028$ egység eredmény adódik.

c) Ha nagyon sok (formálisan $n\to\infty$) kört távolítunk el a lemezből, akkor a maradék rész tömegközéppontjának y-nal jelölt elmozdulására az alábbi összefüggést írhatjuk fel:

$$T_1x_1 + T_2(2x_1+x_2) + T_3(2x_1+2x_2+x_3) + \ldots = (T-T_1-T_2-T_3-\ldots)y.$$

A jobb oldalon szereplő összeg:

$$\left(\pi - \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{64} - \frac{\pi}{256} - \ldots\right)y = \left(1 - \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{4^n}\right)\pi\, y = \frac{11}{12}\pi\, y.$$

A forgatónyomatéki egyenlet bal oldala:

$$\pi\left(\frac{1}{64} + \frac{5}{512} + \frac{13}{4095} + \frac{29}{32\,768} + \ldots\right) = \pi\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^k-3}{8^k} = \frac{5}{168}\pi.$$

Innen már adódik, hogy a keresett távolság

$$y = \frac{5}{168}\cdot\frac{12}{11} = \frac{5}{154} \approx 0{,}032 \text{ egység.}$$

Téglás Panna (Révkomárom, Selye János Gimn., 10. évf.)

44 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 16, hibás 3, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5174. *Egy illegális laboratórium ólomkonténerében olyan sugárzó anyagot találtak, amelyből másodpercenként* $2\cdot 10^{14}$ *elektron lép ki. A rendőrségi jegyzőkönyvek szerint* 53 *évvel ezelőtt eltűnt* 221 g *cézium a közeli kutatóintézetből. Lehet-e a megtalált anyag az akkor eltűnt preparátum, ha azóta csak raktározták?* (*A cézium felezési ideje* 30,17 év.*)

(*4 pont*) *Tematikus feladatgyűjtemény,* Szeged

Megoldás. Ha abból a feltételezésből indulunk ki, hogy a megtalált radioaktív anyag tényleg az 53 éve eltulajdonított cézium-137 preparátum, akkor először ki kell számolnunk, hogy mára mennyi (hány atom) maradt belőle. Az eredeti mennyiség:

$$\frac{221\ \mathrm{g}}{136{,}9\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}} = 1{,}614\ \mathrm{mol},$$

vagyis kezdetben a radioaktív atomok száma:

$$N_0 = (1{,}614\ \mathrm{mol})\cdot\left(6{,}022\cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}}\right) = 9{,}721\cdot 10^{23}.$$

Ebből a mennyiségből – ha valóban az ellopott, T felezési idejű céziumról van szó – mára, t idő elteltével

$$N(t) = N_0\, 0{,}5^{t/T} = (9{,}721\cdot 10^{23})\cdot 0{,}5^{\frac{53\ \text{év}}{30{,}17\ \text{év}}} = 2{,}88\cdot 10^{23}$$

atom maradt. Ennek a mennyiségnek az aktivitása:

$$A(t) = N(t)\,\frac{\ln 2}{T} = 2{,}88\cdot 10^{23}\,\frac{\ln 2}{30{,}17\cdot 365{,}24\cdot 24\cdot 60\cdot 60\ \mathrm{s}} = 2{,}1\cdot 10^{14}\ \mathrm{Bq},$$

ami (a kerekítésekből adódó pontossággal) éppen megegyezik a megtalált anyag aktivitásával.

Az ólomkonténerben tárolt radioaktív preparátum tehát *lehet* az 53 éve ellopott cézium, ennek lehetőségét nem zárhatjuk ki. Természetesen a számolt és a mért aktivitások egyenlősége *nem bizonyítja*, hogy a régen eltűnt preparátumot találták meg. Az is elképzelhető, hogy egy olyan – máshonnan származó – anyagot találtak, aminek az aktvitása éppen megegyezik a feladatban megadott értékkel.

A Cs-137-es izotópot mesterségesen állítják elő, a természetben csak olyan nagy katasztrófák után található meg, mint Csernobil és Fukusima.

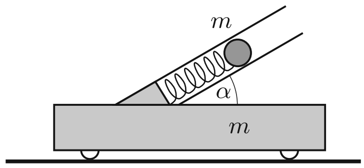
Bagu Bálint (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. és Koll., 10. évf.)

52 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 3 dolgozat.

---

*A kitűzött feladatban hibás adat jelent meg. Ugyancsak hibás a Négyjegyű függvénytáblázatokban a cézium-137 felezési ideje.

P. 5178. *Vízszintes talajon lévő, m tömegű kiskocsira elhanyagolható tömegű, $\alpha = 30°$-os szögben beállított rugós puskát rögzítettünk, amely egy m tömegű lövedéket lő ki két esetben. Az első esetben a kocsi rögzített, a második esetben szabadon mozoghat. A lövedék függőleges irányú emelkedési magassága az első esetben h_1, a második esetben h_2. Határozzuk meg a h_2/h_1 arányt!*



(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. Legyen az összenyomott rugó rugalmas energiája E_0! Ez először mozgási, majd helyzeti és mozgási energiává alakul.

1. eset (rögzített kiskocsi)

Legyen a kilövés pillanatában (amikor a rugó energiája már nullára csökkent) a lövedék sebessége v_1, ennek vízszintes irányú komponense v_{1x}, függőleges irányú komponense pedig v_{1y} (tehát $v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2$). Mivel a kocsihoz képest $\alpha = 30°$-os szögben lőttük ki a lövedéket, és a kocsi nem tud elmozdulni, a lövedék asztalhoz viszonyított sebességének a vízszintessel bezárt szöge is α, tehát

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{azaz} \qquad v_{1x}^2 = 3\cdot v_{1y}^2.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$E_0 = \frac{1}{2}m\,v_1^2 = \frac{1}{2}m\,(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) = \frac{1}{2}m\,(3v_{1y}^2 + v_{1y}^2) = 2m\,v_{1y}^2.$$

Az emelkedési magasságot a lövedék függőleges irányú kezdősebessége határozza meg:

$$\frac{1}{2}mv_{1y}^2 = mgh_1,$$

vagyis

$$h_1 = \frac{v_{1y}^2}{2g} = \frac{E_0}{4mg}.$$

2. eset (a kiskocsi szabadon elmozdulhat)

Legyen a kilövés pillanatában (amikor a rugó energiája már nullára csökkent) a lövedék sebessége v_2, ennek vízszintes irányú komponense v_{2x}, függőleges irányú komponense v_{2y} (tehát $v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2$), a kocsi sebessége pedig v (ez vízszintes irányú, a lövedékével ellentétes irányban).

A kiskocsi+lövedék rendszerre nem hat vízszintes irányú külső erő, így a lendületmegmaradás törvénye alapján

$$0 = mv_{2x} - mv, \qquad \text{vagyis} \qquad v = v_{2x}.$$

Ezek szerint a lövedék vízszintes irányú sebessége *a kiskocsihoz képest* $v_{2x} + v = 2v_{2x}$. Mivel a kocsihoz képest $\alpha = 30°$-os szögben lőttük ki a lövedéket, fennáll:

$$\frac{v_{2y}}{2v_{2x}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{ahonnan} \quad v_{2x}^2 = \frac{3}{4}v_{2y}^2$$

következik.

Az energiamegmaradás törvénye alapján:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) + \frac{1}{2}mv_{2x}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}v_{2y}^2 + v_{2y}^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}v_{2y}^2\right) = \frac{5}{4}mv_{2y}^2.$$

A lövedék emelkedési magasságát most is a lövedék függőleges irányú kezdősebessége határozza meg:

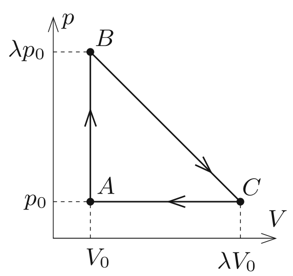
$$\frac{1}{2}mv_{2y}^2 = mgh_2, \quad \text{vagyis} \quad h_2 = \frac{v_{2y}^2}{2g} = \frac{2E_0}{5mg}.$$

A két esetet összevetve látjuk, hogy az emelkedési magasságok aránya:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

Jánosik Áron (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll., 12. évf.)

48 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 29, hibás 3, nem versenyszerű 5 dolgozat.



P. 5180. *Egyatomos ideális gáz az* ábrán *látható ABCA körfolyamatot végzi. Mekkora a körfolyamat hatásfoka, ha a gáz (kelvinben mért) legmagasabb hőmérséklete kilencszer akkora, mint a legalacsonyabb hőmérséklet?*

(Lásd még Gálfi László: Hőfelvétel vagy hőleadás? *című cikkét a KöMaL 2009. évi 4. számában vagy a honlapunkon!)*

(5 pont) Közli: *Dezsőfi György,* Miskolc

Megoldás. A gáztörvény szerint $pV = nRT$, tehát a gáz hőmérséklete a pV szorzattal arányos. A hőmérséklet az A pontnak megfelelő állapotban a legalacsonyabb:

$$T_{\min} = \frac{p_0V_0}{nR}.$$

Az ABC háromszög szimmetriája miatt a legmagasabb hőmérséklet a BC szakasz felezőpontjához tartozik:

$$T_{\max} = \left(\frac{\lambda + 1}{2}\right)^2 \frac{p_0V_0}{nR}.$$

A feladat szövege szerint $T_{\max} = 9T_{\min}$, vagyis $\lambda = 5$.

A körfolyamat hatásfoka a gáz által végzett hasznos W' munka és a felvett hő hányadosa. A gáz által végzett hasznos munka az ABC háromszög területe:

$$W' = \frac{(\lambda-1)^2 p_0 V_0}{2} = 8 p_0 V_0.$$

Az $A \to B$ folyamat izochor, amely során felvett hő:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2} nR(T_B - T_A) = \frac{3}{2}(p_B V_B - p_A V_A) = 6 p_0 V_0.$$

A $C \to A$ izobár folyamatban a gáz biztosan *hőt ad le,* így ez a folyamat a körfolyamat hatásfoka szempontjából érdektelen. Nehezebb eset a $B \to C$ folyamat, amely során hőfelvétel és hőleadás egyaránt előfordulhat.

Tekintsük az AB szakasz valamely D pontját, amelyhez tartozó nyomás p és a térfogat V. (Nyilván $V_0 \leqslant V \leqslant 5V_0$.) Mivel D rajta fekszik az egyenesen, teljesül, hogy

$$p = p_0 \left(6 - \frac{V}{V_0}\right),$$

ami az $x = \frac{V}{V_0}$ dimenziótlan arányszám bevezetésével így írható:

$$p = p_0(6 - x).$$

Számítsuk ki, mennyit hőt kell közöljünk a gázzal, hogy az a B állapotból az egyenes mentén haladva a D állapotba jusson. A folyamat során addig történik folyamatosan hőfelvétel, amíg a $Q_{BD} \equiv f(x)$ függvény monoton növekszik. Ha $f(x)$-nek valahol lokális maximuma van, majd onnan kezdve monoton csökken, akkor ott már hőleadás történik.

A belső energia megváltozása:

$$\Delta U_{BD} = \frac{3}{2}(p_D V_D - p_B V_B) = \frac{3}{2} p_0 V_0 (-x^2 + 6x - 5).$$

A gáz által eközben végzett munka (a BD szakasz és a V tengely közötti trapéz területe):

$$W'_{BD} = p_0 V_0 \frac{5 + (6 - x)}{2}(x - 1).$$

Az első főtétel szerint a gáz által a $B \to D$ állapotváltozás során felvett hő:

$$Q_{BD} = \Delta U_{BD} + W'_{BD} = (-2x^2 + 15x - 13) p_0 V_0,$$

amit

$$Q_{BD} = (x - 1)(13 - 2x) p_0 V_0$$

alakban is felírhatunk. Ez a függvény egy olyan parabolát ír le, amelynek zérushelyei: $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{13}{2}$. A parabola maximuma

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{15}{4}$$

értéknél van, és ezen a helyen

$$Q_{BD} = \frac{121}{8} p_0 V_0.$$

A teljes körfolyamatban a gáz az $A \to B \to D$ állapotváltozás során vesz fel hőt:

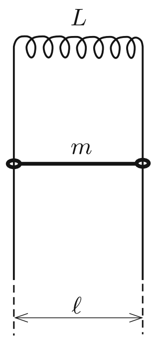
$$Q_{\text{fel}} = Q_{AB} + Q_{BD} = \frac{169}{8} p_0 V_0.$$

Így a kérdéses hatásfok:

$$\eta = \frac{W'}{Q_{\text{fel}}} = \frac{64}{169} \approx 0{,}38 = 38\%.$$

Nguyễn Đức Anh Quân (Hanoi, Tạ Quang Bửu, 12. évf.)
dolgozata alapján

31 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 11 dolgozat.



P. 5183. *Az ábrán látható függőleges sínpár felső végét L induktivitású tekerccsel zártuk. A sínek távolsága ℓ, rajtuk súrlódásmentesen mozoghat egy m tömegű, elhanyagolható ellenállású rúd. A külső mágneses tér $\boldsymbol{B}$ indukcióvektora vízszintes és merőleges a sínek síkjára.*

A rudat elengedve

a) legfeljebb mekkora feszültség indukálódik a tekercsben;

b) legfeljebb mekkora lesz az indukált áram erőssége?

(*5 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

Megoldás. A rendszerre nem hat disszipatív erő, ezért alkalmazható az energiamegmaradás törvénye. A rendszer teljes energiája (a gravitációs helyzeti energia, a mágneses térenergia és a mozgási energia összege) a mozgás során nem változik, állandó marad. Ha a rúd függőleges elmozdulása x, a sebessége v és az áramerősség I, akkor

$$-mgx + \frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} m v^2 = 0. \tag{1}$$

(Az elmozdulást és a sebességet lefelé tekintjük pozitívnak, és a helyzeti energiát az indulás helyén választottuk nullának. A kezdeti helyzetben $x = 0$, $v = 0$ és $I = 0$, tehát az összenergia is nulla.)

a) A rúd sebességének növekedtével egyre nagyobb feszültség indukálódik, ez egyre nagyobb áramot hoz létre, és emiatt a mágneses térben mozgó rúdra egyre nagyobb fékezőerő hat. Az indukált feszültség is, és az áramerősség is véges határok között marad, nem fognak idővel korlátlanul nőni.

Megjegyzés. A mozgás részletesebb vizsgálatával belátható, hogy a rúd harmonikus rezgőmozgást végez; ennek bizonyítása azonban nem tartozik a feladathoz.

Az indukált feszültség nagysága

$$U = v\ell B, \tag{2}$$

ami – a Faraday-féle indukciótörvény szerint – az áramerősség változási sebességével is kifejezhető:

$$U = L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \tag{3}$$

Ebből a két összefüggésből U-t kiküszöbölve, és kihasználva, hogy $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta(x\ell B - LI)}{\Delta t} = 0,$$

vagyis

$$B\ell x(t) - LI(t) = \text{állandó}.$$

Mivel induláskor $x = 0$ és $I = 0$, az állandó értéke nulla, tehát

$$I(t) = \frac{\ell B}{L}\,x(t). \tag{4}$$

Helyettesítsük be (4) és (2) felhasználásával I-t és v-t az energiamegmaradást kifejező (1) egyenletbe:

$$\frac{mU^2}{2\ell^2 B^2} = mgx - \frac{\ell^2 B^2}{2L}x^2,$$

majd alakítsuk a jobb oldalt teljes négyzetté:

$$\frac{mU^2}{2\ell^2 B^2} = \frac{m^2 g^2 L}{2\ell^2 B^2} - \frac{\ell^2 B^2}{2L}\left(x - \frac{mgL}{\ell^2 B^2}\right)^2 \leqslant \frac{m^2 g^2 L}{2\ell^2 B^2}.$$

Innen leolvasható az indukált feszültség legnagyobb értéke:

$$U(t) \leqslant U_{\max} = g\sqrt{mL}.$$

b) A (4) összefüggésből látszik, hogy az indukált áram legnagyobb értékénél x is a legnagyobb értékét veszi fel, és ott a rúd sebessége nulla. Ekkor (1) szerint

$$\frac{1}{2}LI^2 = mgx,$$

ami (4) felhasználásával így írható:

$$\frac{1}{2}LI^2=\frac{mgLI}{B\ell}.$$

Ez az összefüggés két esetben teljesül: $I=0$, ami a legkisebb áramerősségnek felel meg, illetve amikor

$$I=I_{\max}=\frac{2mg}{B\ell}.$$

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

8 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Bonifert Balázs, Horváth Anikó, Ludányi Levente, Nguyễn Đức Anh Quân és Tóth Ábel megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hibás 1 dolgozat.

P. 5185. *Egy vízszintes lapon mozgó kis korongra a pillanatnyi sebességével arányos fékezőerő hat. Kétféle kísérletet végzünk vele:*

(*i*) *Ha meglökjük v_0 sebességgel, akkor a megállásáig* 50 cm *utat tesz meg.*

(*ii*) *Amikor a meglökött korong sebessége már $v_0/2$-re csökkent, nekiütközik egy másik, álló korongnak, amelyre ugyancsak a sebességével arányos fékezőerő hat. (Az arányossági tényező mindkét korongnál ugyanakkora.) Az ütközés egyenes és rugalmas. Meglepő módon a két korong egymás mellett áll meg.*

a) *Mekkora a két korong tömegének aránya?*

b) *Az ütközés helyétől milyen messze áll meg a két korong?*

(*6 pont*) A *Kvant* nyomán

Megoldás. *a*) A vízszintes lapon mozgó, kicsiny, m tömegű korongra a pillanatnyi v sebességével arányos (azzal ellentétes irányú)

$$F(v)=-\alpha v$$

fékezőerő hat, emiatt

$$a=-\frac{\alpha}{m}v \tag{1}$$

„gyorsulással" (ténylegesen lassulva) mozog.

Mivel a gyorsulás a sebesség, a sebesség pedig az s megtett út időegységre eső megváltozása (precízen megfogalmazva: az idő szerinti első deriváltja),

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=-\frac{\alpha}{m}\,\frac{\Delta s}{\Delta t},\qquad \text{azaz}\qquad \Delta v=-\frac{\alpha}{m}\Delta s.$$

A kis változásokat összegezve (integrálva) megkapjuk a korong sebességét a megtett út függvényében:

$$v(s)=-\frac{\alpha}{m}\,s+\text{állandó}.$$

Ha a korong elmozdulását egy olyan ponttól mérjük, ahol a korong sebessége egy ismert v_0 érték, akkor a fenti egyenletben szereplő állandó nagysága éppen v_0, tehát a mozgást a

$$v(s) = v_0 - \frac{\alpha}{m}\, s$$

egyenlet írja le. Ebből leolvasható, hogy az m tömegű korong a megállásáig

$$s_0 = \frac{m}{\alpha} v_0 \tag{2}$$

utat tesz meg. Mivel az első kísérletben $s_0 = 50$ cm, a fékezőerő együtthatója

$$\alpha = \frac{mv_0}{s_0} = \frac{mv_0}{50\ \text{cm}}.$$

Legyen a másik, kezdetben álló korong tömege M, a pillanatnyi sebességét és gyorsulását pedig jelöljük V-vel és A-val. Közvetlenül az ütközés előtt a korongok sebessége $v = v_0/2$ és $V = 0$, az ütközés után pedig $v = v_1$ és $V = V_1$. (Az ütközés utáni sebességeket nem ismerjük, ezeket később még meg kell határoznunk.)

A két korong ugyanott áll meg, tehát az ütközéstől a megállásig megtett d-vel jelölt útjuk ugyanakkora. A második korong mozgásegyenletét az (1) egyenlet mintájára írhatjuk fel:

$$F(V) = M\, A(V) = -\alpha V,$$

amiből – a (2)-nél leírtakhoz hasonló érveléssel – következik, hogy a megállásig megtett útja

$$d = \frac{M}{\alpha} V_1, \tag{3}$$

az m tömegű korongra pedig ez érvényes:

$$d = \frac{m}{\alpha} v_1. \tag{4}$$

A fenti két egyenletből kapjuk, hogy

$$mv_1 = MV_1, \tag{5}$$

vagyis az ütközés után a két korong lendülete megegyezik egymással.

Az ütközés egyenes (a mozgások egy egyenesen történnek) és rugalmas. Az ütközés során mind az összimpulzus (összes lendület), mind pedig a mechanikai energiák összege *megmarad.* Az impulzusmegmaradást a következő módon írhatjuk fel:

$$m\frac{v_0}{2} = mv_1 + MV_1,$$

amiből (5) felhasználásával

$$m\frac{v_0}{2} = 2mv_1,$$

azaz

$$v_1 = \frac{1}{4}v_0 \tag{6}$$

következik

A mechanikai energia megmaradási törvénye szerint

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2,$$

tehát (5) és (6) ismeretében

$$\frac{1}{8}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}\,\frac{v_0}{4}\right)^2,$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{32} + \frac{1}{32}\,\frac{m}{M},$$

és végül a kérdezett tömegarányra $\frac{m}{M} = 3$ adódik.

b) A (4), (6) és (2) összefüggések szerint a korongok az ütközés helyétől

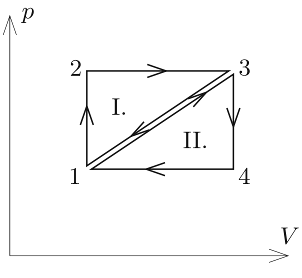
$$d = \frac{m}{\alpha}v_1 = \frac{m}{\alpha}\,\frac{v_0}{4} = \frac{s_0}{4} = 12{,}5\ \text{cm}$$

távolságban, éppen egymás mellett állnak meg.

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Belátható, hogy mindkét korong sebessége az idő exponenciális függvénye szerint (nagyon gyorsan) tart nullához, tehát – ha valóban csak a feladatban szereplő fékezőerő hatna rájuk – véges idő alatt sohasem állhatnának meg. A fenti megoldásban kapott d távolság úgy értendő, hogy ekkora út megtétele után csökken a korongok sebessége elhanyagolhatóan kicsiny értékre.

17 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 3, hiányos (1–4 pont) 4 dolgozat.



P. 5191. *Ugyanannyi ideális gázzal az ábra szerinti $p-V$ diagramon ábrázolt $1 \to 2 \to 3 \to 1$, illetve az $1 \to 3 \to 4 \to 1$ körfolyamatot végeztetjük. Melyik körfolyamatot végző gépnek nagyobb a hatásfoka, és milyen összefüggés áll fenn a két hatásfok között?*

(*5 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

Megoldás. A hőtan I. főtétele szerint a körfolyamat egyes „szakaszaira” érvényes, hogy $Q = \Delta E + W'$. (A képletben Q a felvett hőt, ΔE a gáz belső energiának megváltozását, W' pedig a gáz által végzett tágulási munkát jelöli, és mindegyik mennyiség *előjelesen* értendő.)

Adjuk össze a hőfelvételeket az I. körfolyamat mentén:

$$Q_{12}+Q_{23}+Q_{31}=(\Delta E_{12}+\Delta E_{23}+\Delta E_{31})+(W'_{12}+W'_{23}+W'_{31}).$$

A belső energia teljes változása *nulla,* a tágulási munkák előjeles összege pedig a körfolyamat hasznos munkavégzése. Ezek szerint

$$Q_{12}+Q_{23}+Q_{31}=W'_{\text{hasznos}},$$

amit $Q_{31}=-Q_{13}$ miatt így is felírhatunk:

$$Q_{12}+Q_{23}=W'_{\text{hasznos}}+Q_{13}. \tag{1}$$

Az I. körfolyamatban csak az $1\to2$ és a $2\to3$ változások során történik ténylegesen hőfelvétel ($Q_{12}>0$ és $Q_{23}>0$), tehát ennek a körfolyamatnak a hatásfoka:

$$\eta_1=\frac{W'_{\text{hasznos}}}{Q_{12}+Q_{23}}. \tag{2}$$

A II. körfolyamatban csak az $1\to3$ állapotváltozáskor történik hőfelvétel, és a hatásfok

$$\eta_2=\frac{W'_{\text{hasznos}}}{Q_{13}}. \tag{3}$$

(Kihasználtuk, hogy mindkét folyamatban ugyanakkora a hasznos munka, mert a $p-V$ diagramon az I. és a II. háromszög területe megegyezik.) A hőfelvételeket (2) és (3)-ból kifejezve, majd (1)-be helyettesítve a hatásfokok között az

$$\frac{1}{\eta_1}=1+\frac{1}{\eta_2}$$

összefüggést kapjuk. Látható, hogy $\frac{1}{\eta_1}>\frac{1}{\eta_2}$, vagyis $\eta_1<\eta_2$.

Fekete András Albert (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 11. évf.) és
Fülöp Sámuel Sihombing (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

27 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 11, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 1 dolgozat.

P. 5197. *Micimackó kapott ajándékba egy* 20 cm *sugarú, gömb alakú lufit. A léggömb úgy volt megtöltve héliummal, hogy ha elengedte a fonalát, éppen lebegett a levegőben, nem emelkedett fel, de nem is süllyedt le.*

Micimackó örömében elkezdett körbe szaladni a lufival úgy, hogy az egyik kezével fogta a lufi fonalának végét. Így a lufi egyenletes körmozgást végzett. Malacka megfigyelte, hogy bármekkora is Micimackó állandó szögsebessége, a lufi fonala mindig 45°*-os szöget zár be a kör érintőjével.*

Mekkora a lufi körpályájának sugara? (A fonál súlyától és a lufi alakjának esetleges megváltozásától eltekinthetünk.)

(*5 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

Megoldás. Mivel a lufi álló helyzetben lebeg, az mg nagyságú nehézségi erő, valamint a $\varrho_{\text{levegő}}Vg$ nagyságú felhajtóerő kiegyenlíti egymást:

$$mg = \varrho_{\text{levegő}}Vg.$$

Vizsgáljuk az r sugarú körpályán mozgó lufira ható erőket. A fonalat feszítő, F nagyságú erő vízszintes síkban hat, és mivel a körpálya érintőjével mindig 45°-os szöget zár be, a fonálerő érintőirányú (tangenciális) komponense és a sugár irányú komponense ugyanakkora, nevezetesen $F/\sqrt{2}$ nagyságú. Hat még a lufira a sebességével ellentétes (tehát érintőirányú) közegellenállási erő.

Az egyenletes körmozgást végző lufi érintőirányú gyorsulása nulla, így a tangenciális erők egyensúlyban vannak:

$$\frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}kA\varrho_{\text{levegő}}\,v^2 = \frac{1}{2}\,0{,}45\cdot(20\ \text{cm})^2\pi\varrho_{\text{levegő}}\,r^2\omega^2.$$

A sugárirányú erőkomponens biztosítja a centripetális gyorsulást:

$$\frac{F}{\sqrt{2}} = mr\omega^2 = \varrho_{\text{levegő}}\frac{4}{3}(20\ \text{cm})^3\pi\cdot r\omega^2.$$

Ebből a két egyenletből megkapjuk a körpálya sugarát:

$$r = \frac{\frac{4}{3}\cdot 20\ \text{cm}}{0{,}45\cdot 0{,}5} \approx 118\ \text{cm} = 1{,}18\ \text{m}.$$

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

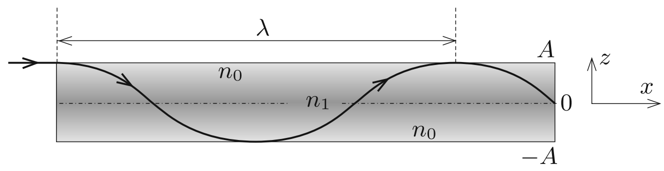
Megjegyzés. A közegellenállási erő lényegében abból származik, hogy a lufi mozgatása közben a közelében lévő (nagyjából a lufi térfogatával megegyező mennyiségű) levegőt is mozgásba kell hoznunk, és a megmozgatott levegő sebessége v nagyságrendű. (A „nagyjából" és a „nagyságrendű" kifejezések pontosítását az alaktényezőtől várhatjuk.)

A fenti megoldásban a centripetális erő kiszámításánál csak a lufi lendületének irányváltozását vettük figyelembe, a lufi által megmozgatott levegő hatásával nem törődtünk. Egy egyenes mentén gyorsított testnél a környező levegő hatása úgy jelentkezik, mintha a test ún. „effektív tömege" (az a tömeg, ami a Newton-egyenletben szerepel) a valóságos értékénél nagyobb lenne, a különbség kb. a kiszorított levegő tömegével egyezik meg. Az a kérdés, hogy vajon az effektív tömeges leírásmód a körmozgásnál is alkalmazható-e (vagyis a centripetális erő képletébe is valamekkora effektív tömeget kell-e írnunk) lényegesen meghaladja a középiskolai fizika szintjét, ezért ennek tárgyalását – természetesen – nem várjuk el a KöMaL megoldóitól sem.

(G. P.)

31 dolgozat érkezett. Helyes 21 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (1–3 pont) 6 dolgozat.

P. 5203. *Egy $2A$ széles, átlátszó üveglemezben a lemez síkjára merőleges z tengely irányában változik a törésmutató, értéke $z=\pm A$-nál n_0, míg $z=0$-nál n_1. Az üveglemez szélénél ($z=A$ „magasságban") az x tengely irányában egy vékony lézersugarat indítunk, amely az üvegben eltérülve egy koszinuszgörbe mentén halad.*



a) Hogyan függ a törésmutató z-től?

b) Mekkora a fény pályagörbéjének hullámhossza?

Adatok: $A = 1$ cm, $n_0 = 1{,}5$ *és* $n_1 = 1{,}6$.

(Lásd a **P. 5066.** feladat megoldását a KöMaL 2018. évi decemberi számában.)

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. A lézersugár pályagörbéjét leíró egyenlet

$$z(x) = A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right), \tag{1}$$

ennek az inverze (a $0 \leqslant x \leqslant \lambda$ intervallumon):

$$x(z) = \frac{\lambda}{2\pi}\arccos\frac{z}{A}. \tag{2}$$

Az (1) egyenletet x szerint deriválva:

$$z'(x) = -\frac{2\pi}{\lambda}A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right). \tag{3}$$

A derivált abszolút értéke megegyezik a $z =$ állandó „réteghez” tartozó α beesési szög kotangensével:

$$z'(x) = -\operatorname{ctg}\alpha. \tag{4}$$

(A függvény meredekségét jellemző szöget – aminek a tangense a függvény deriváltja – az x tengelytől mérjük, az optikai beesési szöget pedig a z tengelytől számítjuk. A két szög egymás pótszöge.)

A Snellius–Descartes-törvény szerint

$$n(z)\cdot\sin\alpha = \text{konstans},$$

és mivel a lézersugár belépési pontjánál $\alpha = 90°$ és $n = n_0$, a fenti képletben szereplő állandó éppen n_0:

$$n(z)\sin\alpha = n_0,$$

vagyis

$$n(z) = \frac{n_0}{\sin\alpha} = n_0\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}. \tag{5}$$

A (3), (4) és (5) összefüggések felhasználásával:

$$n(z)=n_0\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)^2\sin^2\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)}.$$

Innen (2) behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$n(z)=n_0\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2\pi}\arccos\frac{z}{A}\right)},$$

amit egyszerűsítve, és $\sin^2\big(\arccos(x)\big)=1-x^2$ felhasználásával

$$n(z)=n_0\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)^2\cdot\left(1-\left(\frac{z}{A}\right)^2\right)},$$

vagyis

$$n(z)=n_0\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)^2-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2z^2} \tag{6}$$

adódik.

Tudjuk még, hogy $z=0$-nál a törésmutató

$$n(0)=n_1=\frac{1{,}6}{1{,}5}n_0=n_0\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)^2}.$$

Ebből kiszámíthatjuk a pályagörbe keresett hullámhosszát:

$$\lambda=\frac{2\pi A}{\sqrt{\left(\frac{1{,}6}{1{,}5}\right)^2-1}}\approx 0{,}169\ \mathrm{m},$$

majd ezt (6)-ba visszahelyettesítve megkapjuk a törésmutató z-függését:

$$n(z)\approx 1{,}5\sqrt{1{,}138-0{,}138\ \frac{1}{\mathrm{cm}^2}\,z^2}.$$

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

7 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Ludányi Levente, Selmi Bálint, Tóth Ábel és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (3–4 pont) 2 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 395. Mérjük meg egy hajszárító léghozamát (időegységenként kifújt levegő térfogatát) különböző fokozatok esetén!

(*6 pont*) Közli: *Varga György,* Pilis

G. 705. Két golyót engedünk el egy magasan lebegő léghajóból. Melyik golyó esik gyorsabban, ha

a) egyforma nagyok, de nem egyforma nehezek;

b) egyforma nehezek, de nem egyforma nagyok?

(*3 pont*)

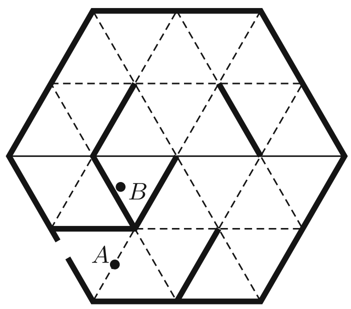
G. 706. Az Apollo 13 című film az űrhajó 1970-ben, szerencsésen végződött balesetéről készült. A súlytalanság pillanatait a NASA Boeing KC-135 típusú repülőgépén vették fel 612 rövid, egyenként 23 másodperces részletben. Egy-egy részlet felvételekor a repülőt parabolapályán vezették végig olyan módon, hogy benne súlytalanság uralkodjon.[1] Mekkora volt a repülőgép legkisebb sebessége a súlytalansági szakasz közben, ha a gép pályájának érintője 45°-os szöget zárt be a vízszintessel a szakasz elején és a végén is?

(*4 pont*)

G. 707. Zsiga és Sári egyenes pályán kocognak, Zsiga 3 m/s, Sári 2 m/s nagyságú állandó sebességgel. Futás közben Buksi kutyájuk ide-oda szaladgál kettejük között. Kezdetben Sári van elöl, Zsiga pedig 20 méterrel mögötte. Buksi „csodakutya”, mert úgy tud közöttük 4 m/s állandó nagyságú sebességgel futni, hogy az összes irányváltoztatása pillanatszerű. Buksi tetszőleges kezdeti helyzetét és futásirányát figyelembe véve határozzuk meg a kutya útjának, illetve elmozdulásának legkisebb és legnagyobb értékét a kezdőhelyzettől a két fiatal találkozásáig számítva!

(*4 pont*)

G. 708. Egy vidámpark tükrös labirintusába befutott Berci, és elbújt a B pontban. Láthatja-e őt az anyukája, aki az A pontban állva keresi őt? Látja-e Berci az anyukáját? A tükörlabirintus alaprajza az *ábrán* látható. A vastag vonalak mindkét oldalukon tükröző felületeket jeleznek.



(*4 pont*)

[1]Ezt – félreérthető módon – „zéró g repülésnek” (zero gravity flight-nak) nevezik.

Áprilisi pótgyakorlat.[2] Becsüljük meg, hogy mennyi glükózt kell elégetnie Garfieldnak ahhoz, hogy le tudja tolni Ubult az asztalról!

Közli: *Kós Olívia,* Budapest

P. 5219. Sík vidéken egy rét közepén gémeskút áll, függőleges oszlopa fele olyan magas, mint amilyen hosszú a gém. A rét szélére érve 2,3°-os látószögben látjuk a tőlünk 100 méterre, pontosan északra lévő gémeskút oszlopát. A szemünk 165 cm magasan van a talaj fölött. A gém kelet–nyugat irányú, és a közepénél támaszkodik az oszlopra.

Ezt követően 1 m/s állandó sebességgel közelítjük meg a kutat. Számítsuk ki és ábrázoljuk vázlatosan, hogyan változik az idő függvényében a gém látószöge az elindulásunktól a kúthoz érkezésünkig!

(*4 pont*) *Tankönyvi feladat nyomán*

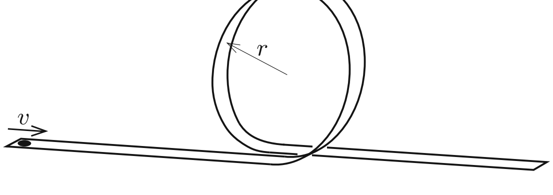
P. 5220. M és $2M$ tömegű kiskocsik közé egy összenyomott állapotában fonállal rögzített rugót helyezünk úgy, hogy a rugó csak az egyik kocsihoz van rögzítve. Ezt a rendszert súrlódásmentes, vízszintes asztalon v_0 sebességgel ellökjük. Bizonyos idő eltelte után a fonál elszakad, ennek hatására az egyik kiskocsi megáll.

a) Mekkora sebességgel halad tovább a másik kocsi?

b) Mekkora energia volt a rugóban?

(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

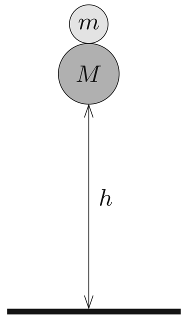
P. 5221. Egy piciny (pontszerűnek tekinthető) játékautónak építünk egy súrlódásmentes pályát, amely vízszintes szakasszal indul, azután egy r sugarú, függőleges síkú, kör alakú hurokban folytatódik, majd a hurok kezdetéhez visszaérve ismét vízszintessé válik. Legyen v az a legkisebb indítási sebesség, amellyel a kisautó már végighalad a pályán. Ezen v sebesség hányad részével kell elindítani az autót, hogy a hurokszakaszról leválva éppen a kör átellenes pontjába csapódjon majd be?



(*5 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

[2]Beküldhető a `szerk@komal.hu` címre, de nem számít bele a pontversenybe.

P. 5222. Két jó minőségű, tömör gumiból készült labdát az *ábrán* látható módon egymás tetejére teszünk, majd h magasságból elengedjük őket. A talajjal, illetve egymással történő ütközésüket közelítőleg a következő módon írhatjuk le: először az alsó, M tömegű labda ütközik tökéletesen rugalmasan a talajjal, majd ezt követően igen rövid idő múlva a talajról visszapattanó labda tökéletesen rugalmasan ütközik a felső, m tömegű labdával.



a) Milyen m/M tömegarány esetén kapja meg a felső labda a rendszer teljes kezdeti helyzeti energiáját? Milyen magasra pattan a felső labda ebben az esetben?

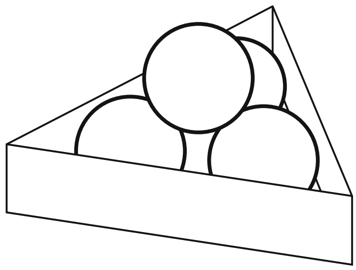
b) Milyen m/M tömegarány esetén pattan fel legmagasabbra a felső labda, és mekkora ez a magasság?

c) Milyen m/M tömegarány esetén alkalmazhatjuk az ütközések fenti leírását? Mi történik például a $k = m/M = 3$ tömegarány esetén?

(Az ütközéseket pillanatszerűnek tekinthetjük. A labdák mérete sokkal kisebb a h magasságnál.)

(*5 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves

P. 5223. Vízszintes asztallapon az *ábrán* látható módon elhelyeztünk négy egyforma, egyenként 30 N súlyú golyót egy keretben, amely egy szabályos háromszög alapú hasáb. Mekkora erők hatnak az egyes érintkezési pontokban, ha a háromszög oldala 15 cm, a golyók átmérője pedig 5 cm? (A súrlódástól eltekinthetünk.)



(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

P. 5224. Sötétedéskor az uszodában csak a medence függőleges falába épített világítótesteket kapcsolják be. A lámpák 1 méterrel vannak a víz felszíne alatt. Három méterre a faltól úgy állunk meg az egyik lámpával szemben, hogy szemünk 30 cm-re van a víz felett. A faltól milyen messze látunk egy fényfoltot a víz felszínén?

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5225. Egy 10 dm^2 alapterületű fazékban 5 liter, 998 kg/m^3 sűrűségű, 20 °C-os víz található. A vizet felmelegítjük 80 °C-ra. A víz térfogati hőtágulási együtthatóját a 20 °C és 80 °C közötti hőmérséklet-tartományban tekintsük állandó, $\beta_{\text{víz}} = 4 \cdot 10^{-4}$ 1/K értékűnek. A fazék rozsdamentes acélból készült, melynek térfogati hőtágulási együtthatója $\beta_{\text{acél}} = 5 \cdot 10^{-5}$ 1/K. A víz párolgását hanyagoljuk el.

a) Mekkora kezdetben a víz hidrosztatikai nyomása az edény alján? Mennyivel változik meg ez az érték a melegítés során?

b) Mennyivel emelkedik meg a melegítés során a fazékban a vízszint?

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

P. 5226. Két azonos keresztmetszetű, ℓ_1 és ℓ_2 hosszúságú, λ_1 és λ_2 hővezetőképességű fémrudat hőszigetelő borítással ellátva összeillesztünk úgy, hogy egyetlen $\ell_1+\ell_2$ hosszúságú rudat alkossanak. A két végén T_1 és T_2 hőmérsékletet állítunk be.

a) Mennyi a rudak hőmérséklete ott, ahol érintkeznek?

b) Ábrázoljuk a hőmérséklet rúd menti eloszlását!

Adatok: $\ell_1 = 65$ cm, $\ell_2 = 40$ cm, $\lambda_1 = 395\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\cdot K}}$, $\lambda_2 = 76\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\cdot K}}$, $T_1 = 30\ {}^\circ\mathrm{C}$, $T_2 = 80\ {}^\circ\mathrm{C}$.

(*4 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

P. 5227. *a*) Két doboz mindegyikében egy-egy 1 kΩ-os, 2 kΩ-os, 3 kΩ-os, 4 kΩ-os és 5 kΩ-os ellenállás található. A két dobozból találomra kiveszünk egy-egy ellenállást, és sorosan kapcsoljuk ezeket. Mekkora valószínűséggel lesz az eredő ellenállás 2 kΩ, 3 kΩ, 4 kΩ, 5 kΩ, 6 kΩ, 7 kΩ, 8 kΩ, 9 kΩ illetve 10 kΩ?

b) Másik két doboz mindegyikében egy-egy 60 kΩ-os, 30 kΩ-os, 20 kΩ-os, 15 kΩ-os és 12 kΩ-os ellenállás található. A két dobozból találomra kiveszünk egy-egy ellenállást, és párhuzamosan kapcsoljuk ezeket. Mekkora valószínűséggel lesz az eredő ellenállás 30 kΩ, 20 kΩ, 15 kΩ, 12 kΩ, 10 kΩ, illetve 10 kΩ-nál kisebb értékű?

(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

P. 5228. A galenitkristály sűrűségének és összetételének ismeretében számoljuk ki két szomszédos ólomatom távolságát! (A galenit a kősóhoz hasonlóan szabályos kristályrácsú.)

(*4 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

P. 5229. A súlytalanság állapotában egymástól $2L$ távolságra két, egyenként Q nagyságú ponttöltést rögzítünk. A töltések között, a szimmetriatengely körül, a felezőmerőleges síkban R sugarú körpályán kering egy m tömegű, Q-val ellentétes előjelű q ponttöltés.

a) Adjuk meg a keringési időt a pályasugár függvényében!

b) Elemezzük az $R \ll L$ és az $R \gg L$ határeseteket!

c) Állapítsuk meg, melyik a nagyobb: a körpályán keringésnek, vagy ugyanezen testnek a körpálya egyik átmérője mentén történő, R amplitúdójú rezgésének az ideje!

(A gyorsuló töltés sugárzásából és a légellenállásból adódó fékeződéstől eltekinthetünk.)

(*6 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

Áprilisi pótfeladat.[3] Sikerült rádiókapcsolatot létesíteni egy távoli bolygó értelmes lakóival, de távcsővel sem a csillagjukat, sem a bolygójukat nem tudtuk megfigyelni.

[3]Beküldhető a `szerk@komal.hu` címre, de nem számít bele a pontversenybe.

A földi kutatók a következő információkat kapták az idegen civilizáció fizikusaitól: bolygójuk körpályán kering a csillagja körül, a pálya sugara (nevezhetjük ezt „földöntúli CSE-nek") $\frac{1}{40\,000}$ „földöntúli fényév". A csillagjuk tömege $2{,}4 \cdot 10^{57}$ földöntúli tömegegység. A $2{,}77 \cdot 10^{-31}$ földöntúli fényév hullámhosszúságú foton energiája éppen a földöntúli tömegegységhez tartozó nyugalmi energiával egyezik meg.

a) Hányszorosa a távoli csillag tömege a mi Napunk tömegének?

b) A „földöntúli csillagászati egység" hány földi CSE, és a távoli bolygó keringési ideje hány földi év?

c) Mekkora a földöntúli tömegegység kilogrammban kifejezve?

(Az univerzális fizikai állandók az univerzum minden részében ugyanakkorák, számértékük csak az eltérő mértékegységek miatt különbözhetnek.)

Közli: *Bertalan Zoltán,* Békéscsaba

❄

Beküldési határidő: 2020. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 70. No. 4. April 2020)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition C (see page 225): **Exercises up to grade 10: C. 1602.** Two tenth-grade students and two eleventh-grade students sat down to solve the exercises of type C in the April issue of KöMaL*. After an hour, they observed that each exercise was solved by exactly one of them, and that everyone solved at least one exercise. In how many different arrangements may they have solved the exercises? (Two arrangements are considered different if there is at least one exercise that is solved by a different student.) **C. 1603.** The altitude drawn from vertex A of an isosceles triangle ABC intersects the leg BC at T. Let M denote the orthocentre, and let O be the centre of the inscribed circle. Prove that if line OT is parallel to the base AB, then $MC = 2AM$. **Exercises for everyone: C. 1604.** A farmer brought 1225 packets of seeds to an agricultural fair: 1 packet of 1 gram of seeds, 2 packets of 2 grams, 3 packets of 3 grams, $\ldots$, k packets of k grams of seeds in each – every positive integer 1 to k occurred. What was the average mass of seeds in a packet? **C. 1605.** The diagonals of a convex quadrilateral $ABCD$ intersect at M. The area of triangle ABM is greater than the area of triangle CDM. The midpoint of side BC of the quadrilateral is P, and the midpoint of side CD is Q, $AP + AQ = \sqrt{2}$. Prove that the area of quadrilateral $ABCD$ is

*There are seven exercises each month. Exercises 1–5 are for students in grade 10 at most, while exercises 3–7 may be solved by 11th and 12th grade students.

less than 1. **C. 1606.** The areas of two faces of a cuboid are 40 and 56 units. The length of the diagonal of the cuboid is $\sqrt{138}$ units of length. Calculate the possible surface area and the volume of the cuboid. (*S. Kiss,* Nyíregyháza) **Exercises upwards of grade 11: C. 1607.** Between 4 and 9, some digits of 4 are inserted, followed by the same number of digits of 8 (e.g. 4489). Prove that the resulting number is a perfect square. **C. 1608.** We are making a Vietnamese hat for a costume party. The hat is a right circular cone of apex angle 97.18°. The slant height is 28 cm. Is it possible to make a hat like this out of a 50×70 cardboard sheet available at the stationery store?

New exercises – competition B (see page 226): **B. 5094.** Prove that if two right-angled triangles have the same perimeter and the same area, then they are congruent. (*3 points*) (*S. Kiss,* Nyíregyháza) **B. 5095.** Let a, b, c denote distinct nonzero integers. Prove that if the sum of the three numbers $\frac{ab}{c}$, $\frac{bc}{a}$ and $\frac{ca}{b}$ is an integer, then each of the three numbers is an integer. (*3 points*) (*G. Stoica,* Saint John, Canada) **B. 5096.** In a regular triangle ABC of unit sides, let P be an arbitrary point on the circumference of the incircle. Let D, E, and F denote the orthogonal projections of point P on the sides BC, AC and AB, respectively. Prove that the area of triangle DEF is a constant, independent of the choice of P. (*4 points*) **B. 5097.** The product of the positive numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is 1. Prove that $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 \geqslant x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3$. (*4 points*) (*Dinu Ovidiu-Gabriel,* Bălceşti, Romania) **B. 5098.** Two players, First and Second, are playing the following game: First selects a positive integer not greater than 2020, which Second is trying to find out by guessing (by naming a number as a guess). The possible answers of First are as follows: "My number is smaller than that."; "You are right."; "My number is greater than that." If the answer is "My number is smaller than that" or "You are right", then Second pays 10 forints (Hungarian currency) to First. If the answer is "My number is greater than that" then he pays 20 forints. What is the minimum possible amount of money that Second needs to have in order to be certain that he can find out the number, and what strategy should he use? (The game terminates with the first "You are right" answer, even if Second already knows the number before asking the last question.) (*5 points*) **B. 5099.** The angle at vertex A of a rhombus $ABCD$ is 60°. An ellipse is inscribed in the rhombus, with the axes lying along the diagonals of the rhombus. The points of tangency of the ellipse on sides divide the sides in a ratio $1:3$. On sides AB and AD it is the point closer to A, and on sides BC and CD it is the point closer to C. Let some point P move along the ellipse. Draw lines through P, parallel to the midlines of the rhombus, and consider the intersections with the other midline. Let these point be Q and R. Show that the length of the line segment QR is independent of the position of P. (*5 points*) **B. 5100.** Show that it is always possible to select some numbers (at least one) out of n consecutive integers such that their sum is divisible by $(1+2+\cdots+n)$. (*6 points*) (Based on the idea of *B. Kovács* and *Zs. Várkonyi*) **B. 5101.** $ABCDO$ is a four-sided pyramid, and P is a point in the interior of base $ABCD$. A plane not passing through O cuts the lines OA, OB, OC, OD and OP at points A', B', C', D', and P', respectively. Prove that $\frac{t_{PAB} \cdot t_{PCD}}{t_{PBC} \cdot t_{PDA}} = \frac{t_{P'A'B'} \cdot t_{P'C'D'}}{t_{P'B'C'} \cdot t_{P'D'A'}}$, where t_{XYZ} denotes the area of triangle XYZ. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 228): **A. 775.** Let $H \subseteq \mathbb{R}^3$ such that if we reflect any point in H across another point of H, the resulting point is also in H. Prove that either H is dense in $\mathbb{R}^3$ or one can find equidistant parallel planes which cover H. (Submitted by *Árpád Kurusa,* Szeged and *Vilmos Totik,* Szeged) **A. 776.** Let

$k>1$ be a fixed odd number, and for non-negative integers n let $f_n=\sum\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ k\mid n-2i}}\binom{n}{i}$. Prove that f_n satisfy the following recursion: $f_n^2=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f_i f_{n-i}$. (Submitted by *András Imolay,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 249)

M. 395. Measure the rate of airflow of a hair dryer at different speed settings.

G. 705. Two balls are released from an airship floating at a great height. Which ball falls faster, if *a*) they have the same size, but different weights; *b*) they have the same weight, but different sizes? **G. 706.** The docudrama titled Apollo 13 is about the happily ended accident of the spacecraft, occurred in 1970. The scenes depicting weightlessness were recorded in a Boeing KC-135 air-plane (belonging to NASA) in 612 short, 23 second-long parts. In order to create the "zero gravity" for each of these short parts the plane flew along a parabolic path. What was the smallest speed of the plane during the zero gravity period of the flights if the angle between the horizontal and tangent to the parabolic path of the plane both at he beginning and at the end of the zero gravity manoeuvre was 45°? **G. 707.** Sam and Sarah are jogging along a straight path at constant speed. Sam's speed is 3 m/s and Sara's speed is 2 m/s. Pluto, their dog, is running back and forth between them. Initially Sarah is 20 m ahead Sam. Pluto is a "miraculous" dog, because he can run between them at a constant speed of 4 m/s such that all his turns are immediate. Considering Pluto's arbitrary initial location and direction of running, determine the smallest and greatest values of both the distance covered and the displacement of the dog until Sam and Sarah meet. **G. 708.** Ben ran into a mirrored labyrinth of an amusement park, and hid at point B. Can his mother, who is looking for Ben standing at point A, see him? The plan of the mirrored labyrinth of the amusement park is shown in the *figure.* The thick lines represent mirrors with reflexive surfaces at both of their sides.

P. 5219. There is a shadoof in the middle of a meadow in a plain. Its vertical pole has half the length of its horizontal beam. Reaching the rim of the meadow, the shadoof is at a distance of 100 m from us towards the north. Observing the shadoof from the rim of the meadow the angle subtended by its vertical pole is 2.3°. Our eyes are at a height of 165 cm, the horizontal beam is east–west and is supported by the pole at its centre. We walk towards the shadoof at a constant speed of 1 m/s. Calculate and sketch how the angle subtended by the shadoof change over time as we walk from the rim of the meadow to the shadoof until we reach it. **P. 5220.** A compressed spring, which is tied with a piece of thread, is placed between two carts of masses M and $2M$ such that it is fixed to only one of the carts. This system is placed to a horizontal frictionless tabletop and given an initial speed of v_0. After some time the thread breaks, and because of this one of the carts stops. *a*) At what speed does the other cart move further? *b*) How much energy was stored in the spring? **P. 5221.** A frictionless track is built for a small (point-like) toy car. The initial part of the track is horizontal, and then it continues in a vertical circular loop of radius r, and horizontal again after the loop is closed. Let v be the least initial speed of the toy car at which it must be started in order that it just go along the circular loop. What fraction of this speed v should be given to the toy car in order that after leaving the loop it strike the track exactly at the opposite point of the circle? **P. 5222.** Two solid rubber balls, made of high-quality rubber, are placed on the top of one another as shown in the *figure,* and then they are released from a height of h. The collisions occur as follows: first the bottom ball of mass M collides with the ground totally elastically, then after a very short time the ball that bounced back from the ground collides totally elastically with the upper ball of mass m. *a*) What is the ratio of m/M in the case when the total initial potential energy of the balls is converted to the energy of the upper ball? How high will the upper ball go up in this case? *b*) What is the ratio of m/M in the case when the upper ball bounces to the greatest possible height and what is this height? *c*) At what ratio of m/M can the above description of the collisions be applied? What happens for example at the mass ratio of $k = m/M = 3$? (The collisions are momentary. The size of the balls is much smaller than the height h.) **P. 5223.** Four alike balls, each of which has a weight of 30 N, are placed to the horizontal table into a frame – which has a shape of an equilateral-triangle-based right prism – as shown in the *figure*. Calculate the forces at the contact points if the side of the triangle is 15 cm, and the diameter of a ball is 5 cm. (Friction is negligible.) **P. 5224.** In a swimming pool only the lights built in the vertical walls of the pool are turned on as dusk falls. The lights are 1 metre below the surface of the water. Someone stands 3 metres from the wall in front of a lamp such that his or her eyes are at a height of 30 cm above the water. How far from the wall does he or she observe a light spot on the surface of the water? **P. 5225.** There is 5 litres water at a temperature of 20 °C in a stockpot of base area 10 dm^2. The density of water is 998 $\mathrm{kg/m}^3$. The water is heated to 80 °C. The coefficient of volume expansion of water can be considered constant between the temperature values of 20 °C and 80 °C, and it is $\beta_{\text{water}} = 4\cdot 10^{-4}$ 1/K. The pot is made of stainless steel whose coefficient of volume expansion is $\beta_{\text{steel}} = 5\cdot 10^{-5}$ 1/K. Neglect the vaporization of water. *a*) What is the initial hydrostatic pressure at the bottom of the pot? How much does this value change during the heating? *b*) How much does the level of water change due to the heating? **P. 5226.** Two metal rods of lengths ℓ_1 and ℓ_2, of thermal conductivity of λ_1 and λ_2, and having the same cross section are both covered with thermal insulating sleeves, and put together such that they form a single rod of length $\ell_1+\ell_2$. The temperature values at the the two ends are adjusted to the values of T_1 and T_2. *a*) What is the temperature of the rods at their contact points? *b*) Sketch the temperature of the rod as a function of the position along the rod. *Data:* $\ell_1 = 65$ cm, $\ell_2 = 40$ cm, $\lambda_1 = 395\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\cdot K}}$, $\lambda_2 = 76\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\cdot K}}$, $T_1 = 30$ °C, $T_2 = 80$ °C. **P. 5227.** *a*) Different resistors were put into two boxes. Each box contains one from each of the following resistors: 1 kΩ, 2 kΩ, 3 kΩ, 4 kΩ and 5 kΩ. One resistor is taken out randomly from each box, and they are connected in series. What is the probability that the equivalent resistance of the series connection is 2 kΩ, 3 kΩ, 4 kΩ, 5 kΩ, 6 kΩ, 7 kΩ, 8 kΩ, 9 kΩ or 10 kΩ? *b*) In other two boxes there are also some resistors. Both of these two boxes contain one from each of the following resistors: 60 kΩ, 30 kΩ, 20 kΩ, 15 kΩ and 12 kΩ. One resistor is taken out randomly from each box, and they are connected in parallel. What is the probability that the equivalent resistance of the parallel connection is 30 kΩ, 20 kΩ, 15 kΩ, 12 kΩ, 10 kΩ, or less than 10 kΩ? **P. 5228.** Calculate the distance between two lead atoms in a galena crystal, if its density and its constituents are known. (Similarly to rock salt, galena has a cubic crystal system.) **P. 5229.** Two point-like charges, each having a charge of Q, are fixed at a distance of $2L$ from each other in weightlessness. Between these charges another point like charge of mass m and of charge q (q and Q are opposite charges) is revolving about the symmetry axis of the charges along a circular path of radius R. The plane of this circle is the perpendicular bisector of the line segment that joins the two fixed charges. *a*) Determine the period of the circular motion as a function of the radius of the path. *b*) Evaluate the limiting cases when $R \ll L$ and when $R \gg L$. *c*) Determine which is greater: the period of the motion of charge q along the circular path, or the period of the same charge when it undergoes simple harmonic motion along one of the diameters of the circle with amplitude R? (Neglect the deceleration of the charge due to the radiation of the accelerating charge and due to air resistance.)